

MODELI VISKOELASTIČNIH SNOVI

ALJAŽ VELIKONJA

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Poleg preprostih elastičnih hookovskih trdnin in viskoznih newtonskih tekočin v naravi obstajajo tudi snovi, ki združujejo lastnosti obeh. Takšne snovi se imenujejo viskoelastične. Prvi del članka je namenjen kvalitativni predstavitvi viskoelastičnih materialov. Sledi obravnava dveh preprostih makroskopskih modelov, in sicer Maxwellovega in Kelvin-Voigtovega modela, kar omogoča poglobitev pridobljenega znanja tudi na kvantitativni ravni. V zadnjem delu članka je izpeljan Oldroyd-B model, ki izvira iz mikroskopskega sveta in natančneje opisuje obnašanje kompleksnih tekočin.

MODELS OF VISCOELASTIC MATERIALS

In addition to simple elastic Hookean solids and viscous Newtonian fluids, there also exist substances in nature that combine the properties of both. Such substances are called viscoelastic. The first part of the article is devoted to a qualitative presentation of viscoelastic materials. This is followed by a discussion of two simple macroscopic models, namely the Maxwell and Kelvin-Voigt models, which enables a deeper understanding of the acquired knowledge also on a quantitative level. In the final part of the article, the Oldroyd-B model is derived, which originates from the microscopic world and provides a more precise description of the behaviour of complex fluids.

1. Uvod

Viskoelastične snovi so močno prisotne na vsakem našem koraku, čeprav se tega pogosto ne zavedamo. To so namreč materiali, ki kažejo tako elastične kot viskozne lastnosti, kar je v splošnem posledica tega, da so zgrajeni iz daljših molekul. Ker je večina organskih snovi zgrajena iz večjih makromolekul, smo najzanimivejši primer viskoelastičnih snovi iz vsakdana ljudje sami. Posledično je razumevanje takšnih lastnosti pomembno tudi v biologiji in medicini. Obnašanje omenjenih snovi so najprej opisovali preprosti makroskopski modeli, kot sta Maxwellov in Kelvin-Voigtov model, ki kljub preprostosti zajameta bistvene značilnosti viskoelastičnih materialov. Naprednejši modeli, kot je Oldroyd-B, izvirajo iz mikroskopskih predpostavk in natančneje opisujejo kompleksne pojave. Mednje sodi tudi Weissenbergov pojav, ki je na kratko predstavljen v zadnjem delu članka.

2. Viskoelastičnost

Različne makroskopske lastnosti kondenzirane snovi povzročajo sile med gradniki, ki se razlikujejo po moči in dosegu. Zaradi teh sil se v trdninah po končani obremenitvi vsak gradnik vrne na svoje mesto. V tekočinah pa se gradniki lahko premikajo s karakterističnim relaksacijskim časom. Viskoelastične snovi zaradi večjih, a končnih relaksacijskih časov združujejo lastnosti preprostih trdnin in tekočin. Natančno poznavanje elastičnih hookovskih trdnin in viskoznih newtonskih tekočin je torej ključnega pomena za razumevanje viskoelastičnosti.

2.1 Hookovska trdnina in newtonska tekočina

Hookovska trdnina, ki jo karakterizira popolnoma elastično obnašanje, se od newtonske tekočine, ki jo določa konstantna viskoznost, razlikuje glede na odziv na strižno napetost. Ta pri trdnini povzroči raztezek

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{G}, \quad (1)$$

kjer je $\varepsilon = \frac{\Delta x}{y}$ relativni raztezek, G strižni modul in $\sigma = \frac{F}{A}$ strižna napetost, kar prikazuje slika 1. Ker je pri trdnini strižni raztezek linearno sorazmeren s strižno napetostjo, ob konstantni napetosti σ tudi raztezek ε ostaja konstanten. Seveda taka linearna zveza velja samo za dovolj majhne raztezke in napetosti, saj pri večjih trdnina zaide v plastični režim in kasneje počni.

Za tekočine velja linearna zveza med časovnim odvodom strižnega raztezka in napetostjo

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\eta}, \quad (2)$$

kjer η predstavlja viskoznost. To pomeni, da se ob konstantni obremenitvi σ , raztezek ε s časom linearno povečuje. V splošnem sta napetost in raztezek tenzorski količini. Toda tekom tega članka strižna napetost nastopa vedno v samo eni smeri, enako velja za raztezek, zato ju bomo zaradi enostavnosti obravnavali kot skalarja [2].

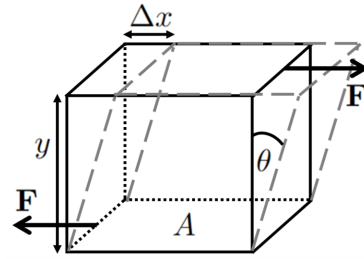
2.2 Viskoelastične snovi

Podobno kot obremenitev s konstantno strižno silo razloči med trdnino in tekočino, lahko pomembne lastnosti viskoelastičnih snovi spoznamo pri poskusih s konstantnim raztezkom, konstanto napetostjo in časovno odvisno periodično napetostjo [3].

Pri poskusu s konstantno napetostjo σ opazujemo njeno posledico, torej časovno odvisnost raztezka ε . Ta odvisnost je za različne snovi predstavljena v drugi vrstici slike 2. Pri hookovski trdnini tudi raztezek ostaja konstanten, pri viskozni tekočini pa se linearno povečuje. Pri viskoelastičnih materialih so odzivi močno časovno odvisni. Toda vseeno v limiti dolgo trajajočih obremenitev opazimo dva različna tipa snovi. Prvi tip se za večje čase obnaša kot viskozna tekočina, zato ga imenujemo viskoelastična tekočina. Pri drugem tipu snovi odmik po dolgem času doseže asimptotično vrednost in je zato podoben trdnini, zato ime viskoelastična trdnina. Omeniti velja, da sta idealna viskoelastična trdnina in tekočina, prikazani na grafih 2i in 2j, samo limitna primera in da je opis realnih snovi precej zahtevnejši [1]. Matematično sta idealna viskoelastična tekočina in trdnina obravnavani v poglavju 3. kot Maxwellov in Kelvin-Voigtov model, zato se za zdaj zadovoljimo z opazovanjem grafov na sliki 2, ki bodo torej kasneje potrjeni.

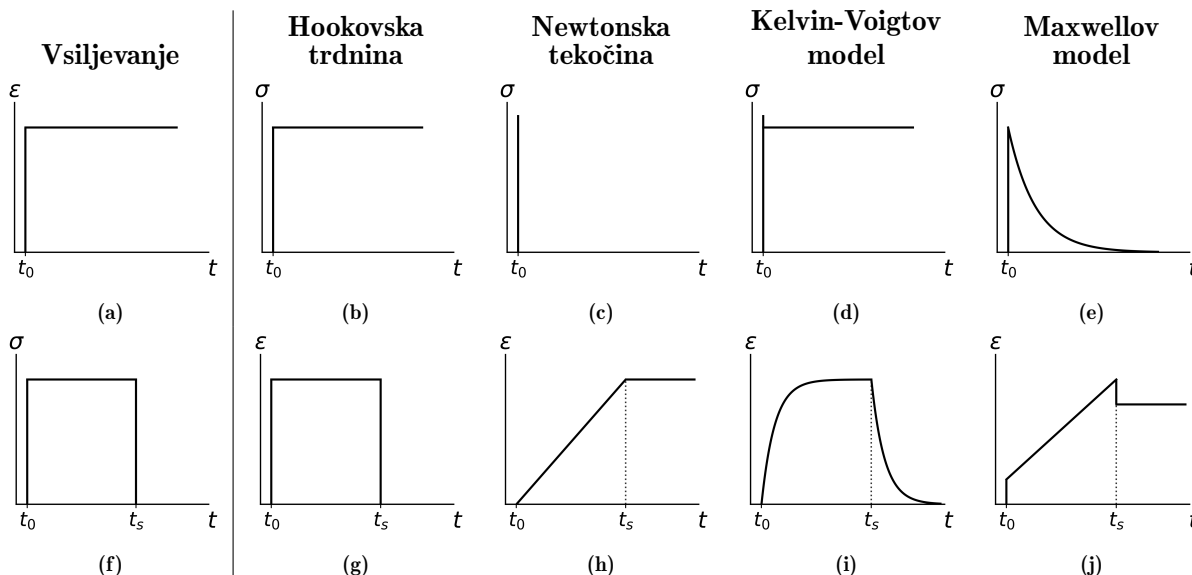
Pri preverjanju odziva snovi na konstanten odmik ε merimo silo, ki je potrebna, da tak odmik vzdržujemo. Tak eksperiment predstavlja prva vrstica slike 2. V tem primeru se viskoelastične snovi bistveno razlikujejo od samo viskoznih, pri katerih sila po začetnem skoku izgine, oziroma elastičnih, pri katerih sila ostaja ves čas enaka. Razlog za hipen skok sile pri viskoznih snoveh je ta, da je ob hipnem raztezanju do konstantnega odmika časovni odvod $\dot{\varepsilon}$ velik, nato pa se ε ne spreminja več. Pri viskoelastičnih snoveh po začetnem skoku sila eksponentno pojenja. Razlog za to je hiter začetni odmik elastičnega dela, ki ga sčasoma prevzame viskozni del, in tako sila izgine. V tem primeru idealna viskoelastična tekočina (glej sliko 2e), dokaj dobro predstavi obnašanje viskoelastičnih snovi v splošnem [1].

Ko snov obremenjujemo s periodično silo, torej $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 \sin(\omega t)$, nas predvsem zanima, koliko energije sistem izmenjuje z okolico. Zvezo za delo $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, ob predpostavki, da sta površina A in debelina y konstanti, hitro prevedemo na zvezo $W(t) = V \int \sigma(t) d\varepsilon(t)$, ki vsebuje želeni količini napetost σ in raztezek ε . Dobljen izraz pomeni, da je izguba energije enaka ploščini, ki jo obdaja krivulja na grafih napetosti v odvisnosti od raztezka (glej sliko 3). Iz enačbe (1) sledi, da je krivulja $\sigma(\varepsilon)$, če snov obremenjujemo s periodično silo, za elastično trdnino premica. To pomeni, da se energija sistema ohranja. Za viskozno tekočino dobimo z enačbo (2) na grafu $\sigma(\varepsilon)$ krožnico, torej



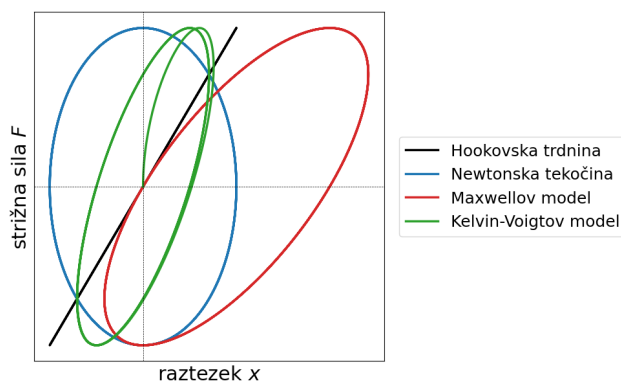
Slika 1. Ključne spremenljivke za opis strižnih raztezkov, predstavljene na primeru kocke. Prirejeno po: [1].

izgubo energije. Pri viskoelastičnih materialih je ta krivulja elipsa, kar spet kaže tako na elastične kot viskozne lastnosti [1]. Če namesto računanja dela raje računamo moč, ki se porablja na enoto volumna, dobimo $\frac{P}{V} = \frac{dw}{dt} = \sigma(t)\dot{\epsilon}(t)$. Ob časovnem povprečenju $\langle \frac{dw}{dt} \rangle$ torej vsi členi, ki so posledica elastičnosti, odpadejo. S to metodo lahko pri kompleksnejših modelih hitro ugotovimo, kateri členi v enačbah so posledica viskoznosti oziroma elastičnosti [4].



Slika 2. Značilni poskusi, ki prikazujejo viskoelastične lastnosti snovi. V prvi vrstici je prikazana izmerjena napetost v različnih snoveh kot odziv na vsiljen konstanten raztezek (2a), v drugi pa izmerjeni odmik kot posledica konstantne napetosti (2f). Pri hookovski trdnini sila ostaja, dokler ostaja raztezek (2b), pri viskozni tekočini pa sila izgine v trenutku, ko se preneha raztezanje (2c). Kelvin-Voigtov model, ki predstavlja idealno viskoelastično trdnino, se po rahli hipni sprostitvi zaradi viskoznosti začne obnašati kot trdnina (2d). Maxwellov model, ki ustreza idealni viskoelastični tekočini, napove značilno disipacijo sile (2e). Na konstantno silo se elastična snov odzove s konstantnim raztezkom (2g), viskozna pa z linearnim naraščanjem raztezka (2h). Kelvin-Voigtov model napove eksponentno približevanje raztezka h konstanti (2i), Maxwellov model pa predvidi le rahlo odstopanje od viskozne tekočine (2j). Grafi v drugi vrstici prikazujejo tudi značilnosti primarnih odzivnih funkcij. Prirejeno po: [1].

Spoznali smo, da je odziv viskoelastičnih snovi na obremenitev časovno odvisen. Za splošno viskoelastično snov velja, da se za majhne časovne skale na napetost odzove elastično, torej kot hookovska trdnina, za daljše pa viskozno, torej kot newtonska tekočina. Karakteristični čas τ , ki loči elastično obnašanje od viskoznega, imenujemo relaksacijski čas. Poglejmo si, kaj ta čas predstavlja na mikroskopskem nivoju. Viskoelastične lastnosti večinoma kažejo snovi, ki so sestavljene iz večjih molekul, na primer polimeri. Ko takšno snov obremenimo, se v začetku odzove elastično, k čemur prispeva natezanje makromolekul. Zaradi prepletenosti daljše molekule šele čez čas τ uspejo zdrseti ena mimo druge, takrat se začne snov obnašati viskozno. Tak opis je smiseln predvsem za nezamrežene polimerne sisteme, kot so polimerne tekočine in raztopine. Pri močno zamreženih polimerih so verige namreč med seboj povezane, zato njihovo medsebojno drsenje ni mogoče na enak način. Podoben razmislek lahko naredimo tudi za navadne newtonske tekočine, le da so pri teh molekule majhne in imajo zato zelo kratek relaksacijski čas $\tau \sim 0$. Prostorsko oviranje molekul med seboj ni nič drugega kot odbojna sila kvantnomehanskega izvora, ki deluje na kratke razdalje. Take sile pojasnjuje Paulijevo izključitveno načelo [2]. Pomemben dejavnik so tudi privlačne sile med gradniki. V trdninah te ne dovolijo razmika delcev, zato je relaksacijski čas trdnin $\tau \sim \infty$, čeprav so lahko sestavljene iz enako majhnih gradnikov kot tekočine. Tudi med nezamreženimi polimeri delujejo privlačne medmolekulske sile, na primer Van der Waalove sile. Toda potenciali teh sil tipično niso veliko večji od termične energije $k_B T$, kar pomeni, da je verjetnost za porušitev teh vezi in posledično za termično premikanje molekul precejšnja [2].



Slika 3. Odziv raztezka na periodično silo v različnih modelih viskoelastičnih snovi. Za elastično snov je graf napetosti v odvisnosti od raztezka premica, za viskozno tekočino je krožnica. Zanimivi sta tudi krivulji za Maxwellov in Kelvin-Voigtov model, ki ustrezata idealni viskoelastični tekočini in trdnini. Prva krivulja je posebna zaradi premika ravnovesne lege, druga pa zaradi začetnega dušenja do nihanja okrog izhodišča.

3. Modeli viskoelastičnih snovi

Pomembne značilnosti viskoelastičnih snovi predstavimo z različnimi modeli. Ti lahko izvirajo iz makroskopskih predpostavk, kot na primer Maxwellov in Kelvin-Voigtov model ali iz mikroskopskih, primer je Oldroyd-B model.

3.1 Primarna odzivna funkcija

Pri preverjanju, ali dani model dobro opiše viskoelastično snov, pogosto ugotavljamo, kako napove odziv snovi na sile z različnim časovnim potekom. Zato je prikladno definirati primarno odzivno funkcijo $\mu(t)$, ki opiše odmik sistema $\tilde{x}(t)$ zaradi delovanja hipne sile $F(t) = F_0\delta(t)$, torej $\mu(t)$ definiramo kot

$$\mu(t) = \frac{1}{F_0} \tilde{x}(t). \quad (3)$$

Odziv sistema na poljubno časovno odvisno silo izračunamo kot

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \mu(t-t') F(t') dt'. \quad (4)$$

Ta formula je posledica kavzalnosti in superpozicije. Prva pomeni, da je odziv sistema odvisen le od sil iz preteklosti, zato je zgornja meja integrala enaka t . Druga upošteva, da lahko poljubno silo razpišemo kot zaporedje δ -funkcij s primernimi amplitudami in da je odmik odvisen od vseh teh prispevkov [4].

3.2 Maxwellov model

Preprosti modeli viskoelastičnih snovi izhajajo iz opazovanj makroskopskega sveta. Predpostavijo namreč, da lahko viskoelastično snov opišemo kot skupek elastičnih in viskoznih snovi, ki jih lahko združujemo na različne načine. Shematsko se modele predstavi kot zaporedno oziroma vzporedno vezane elemente. Zaporedna vezava pomeni enako porazdelitev sile, vzporedna pa enak raztezek elementov. Elastično snov na skicah modelov predstavlja vzmet, viskozno pa blažilec [1]. Pomembno se je zavedati, da pri modelih viskoelastičnih snovi največkrat obravnavamo strižne napetosti in odmike. V takih primerih vzmet na skicah zgolj simbolno predstavlja hookovsko trdnino, ki sledi enačbi (1). Skice so torej lahko rahlo zavaajajoče, saj smo pri vzmeteh vajeni vzdolžnih sil in odmikov. Podobno velja za blažilec, ki zgolj predstavlja snov, ki se odziva po enačbi (2).

Maxwellov model predpostavi enakomerno porazdelitev sile med viskoznim in elastičnim materialom, to shematsko pomeni zaporedno vezavo vzmeti in blažilca (glej sliko 4). Izkaže se, da je pri preprostih modelih lažje računati z absolutnim raztežkom x in silo F , kot pa z relativnim odmikom ε in napetostjo σ . Poleg tega sila in odmik kažeta v isti smeri, zato ju lahko obravnavamo kot skalarja. Maxwellov model zapišemo kot

$$F = k_e x_e = k_v \dot{x}_v, \quad (5)$$

kjer je $k_e = G \frac{A}{y}$ in $k_v = \eta \frac{A}{y}$ ter x_e in x_v odmika elastične oziroma viskozne snovi. Predpostavimo konstantno površino A in debelino y .

Kako dobro Maxwellov model predstavi viskoelastično snov, najprej preverimo s preizkusom s konstantnim skupnim raztežkom, torej $x_s = x_e + x_v = konst.$ Izrazimo $x_e = x_s - x_v$ ter vstavimo v enačbo (5). Rešitev dobljene diferencialne enačbe je $F = k_e x_0 \exp(-t/\tau)$, kjer je $\tau = \frac{k_v}{k_e} = \frac{\eta}{G}$ relaksacijski čas. Če rezultat še delimo s površino A , pridemo do enačbe za napetost

$$\sigma(t) = \sigma_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad (6)$$

kjer je $\sigma_0 = G \frac{x_s}{y}$ takojšnja in ne začetna napetost. Začetna napetost je namreč določena kot robni pogoj in je enaka nič, saj raztezamo prej neobremenjen sistem. Maxwellov model zelo dobro napove značilno relaksacijo sile (glej sliko 2e). Relaksacijo si lahko predstavljamo tako, da se ob obremenitvi v trenutku raztegne elastična snov oziroma vzmet, saj sta sila in odmik linearno povezana. To povzroči takojšnjo napetost σ_0 . Odmik v viskozni snovi začne postopoma naraščati, saj je sila sorazmerna s časovnim odvodom odmika. Ker skupni raztezek ostaja enak in se viskozni raztezek povečuje, se elastični odmik zmanjšuje, kar pomeni manjšo silo. Zaradi zmanjšanja sile se viskozni odmik povečuje počasneje, a vendar se. Tako povratno zanko opiše dobljeno eksponentno upadanje. V limiti $t \rightarrow \infty$, predstavlja konstanten raztezek viskozne snovi celoten skupni odmik, kar ne povzroča sile.

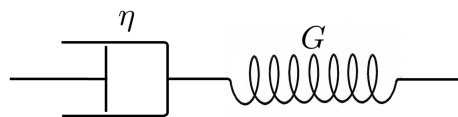
Sledi še preizkus, pri katerem na sistem delujemo s konstantno strižno silo in opazujemo skupni raztezek x_s . V tem primeru najprej izračunamo primarno odzivno funkcijo $\mu(t)$. Čeprav je primer s $F = konst.$ zelo preprost in bi ga z lahkoto rešili tudi brez uporabe $\mu(t)$, se bo ta za uporabno izkazala kasneje. Rešujemo torej enačbi $k_e \mu_e(t) = \delta(t)$ in $k_v \dot{\mu}_v(t) = \delta(t)$. Slednjo rešimo z integriranjem. Celotna primarna odzivna funkcija je enaka

$$\mu(t) = \mu_e(t) + \mu_v(t) = \frac{1}{k_e} \delta(t) + \frac{1}{k_v} \Theta(t), \quad (7)$$

kjer je $\Theta(t)$ Heavisideova funkcija. Ugotovimo, da je $\mu(t)$ samo vsota elastičnega in viskoznega odziva. Elastični odziv po prenehanju delovanja sile takoj izgine, medtem ko viskozni odziv ohrani vrednost, ki jo je dosegel do trenutka prenehanja delovanja sile. Ta ugotovitev ni presenetljiva, saj je celoten Maxwellov model postavljen tako, da je skupni odmik samo vsota elastičnega in viskoznega odmika. Sedaj z uporabo enačbe (4) za časovno odvisno silo $F = F_0 \Theta(t)$ izračunamo odmik za Maxwellov model

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right), \quad (8)$$

kjer je $\varepsilon_0 = \frac{1}{G} \frac{F_0}{A}$ takojšnji in ne začetni odmik. Začetni pogoj sistema je namreč $x_s = 0$. V trenutku, ko začnemo delovati s silo, se elastična snov raztegne, to predstavlja raztezek ε_0 . Tako primarna odzivna funkcija kot časovni potek raztezka sta prikazana na sliki 2j.



Slika 4. Shematski prikaz Maxwellovega modela z zaporedno vezavo blažilca z viskoznostjo η in vzmeti s konstanto G . Prirejeno po: [5].

Glede na odziv na konstantno silo in odmik, Maxwellov model natančno predstavlja idealno viskoelastično tekočino. Da je Maxwellov model bolj podoben tekočini kot pa trdnini, lahko sklepamo iz začetnih enačb modela. V njih namreč nikjer ni omejitve za strižni viskozni raztezek, kar pomeni, da lahko plasti znotraj snovi zdrsijo poljubno daleč, kar ustreza obnašanju tekočin in ne trdnin.

Zanimiv je tudi poskus s periodično silo $F = F_0 \sin(\omega t)\Theta(t)$. Tokrat primarna odzivna funkcija za Maxwellov sistem močno olajša postopek. Z enačbo (4) izračunamo izraza

$$x = \frac{F_0}{k_v \omega} (1 - \cos(\omega t)) + \frac{F_0}{k_e} \sin(\omega t), \quad (9)$$

$$\frac{dW}{dt} = F \frac{dx}{dt} = \frac{F_0^2 \omega}{2k_e} \sin(2\omega t) + \frac{F_0^2}{k_v} \sin^2(\omega t). \quad (10)$$

Hitro opazimo, da je časovno povprečje prvega člena na desni strani enačbe (10) enako nič. Ta člen namreč izvira iz premikanja vzmeti, ki ob raztezanju prejema delo, ter ga oddaja ob vračanju v ravnovesno lego. Časovno povprečje drugega člena pa je enako $\langle \frac{dW}{dt} \rangle = \frac{F_0^2}{2k_v}$ in predstavlja moč, ki se troši za deformacijo viskoznega dela Maxwellovega modela. Do enakega rezultata bi prišli z izračunom ploščine pod krivuljo $\sigma(\varepsilon)$ (glej sliko 3).

3.3 Kelvin-Voigtov model

Kelvin-Voigtov model domneva enak odmik viskozne in elastične snovi, kar predstavimo z vzporedno vezavo vzmeti in blažilca (glej sliko 5). Posledično se model zapiše kot

$$F = k_e x + k_v \dot{x}. \quad (11)$$

Najprej izračunamo odziv Kelvin-Voigtovega modela na konstanten odmik $x = konst.$ Takoj sledi, da je napetost konstantna

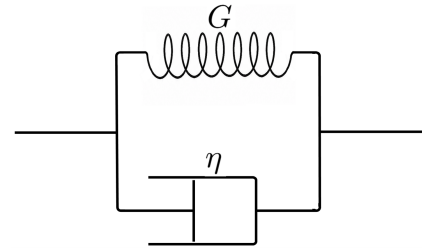
$$\sigma = G\varepsilon, \quad (12)$$

pri čemer predpostavimo, da sta površina A in debelina y konstantni. Če upoštevamo še, da smo morali odmik povzročiti, na primer ob času $t = 0$, potem velja $x(t) = x_0 \Theta(t)$ in ne $x = konst.$ Izboljšani postopek da rezultat $\sigma = G\varepsilon \Theta(t) + \eta \varepsilon \delta(t)$. Člen z δ -funkcijo razloži začetni skok zaradi viskoznosti, ki je viden na sliki 2d. Bistvo ostaja ne glede na zahtevnost nastavka enako, torej da Kelvin-Voigtov model ne napove relaksacije napetosti, saj elastična komponenta ostaja napeta.

Pri preizkusu s konstantno napetostjo zopet najprej izračunamo primarno odzivno funkcijo. Rešujemo enačbo $k_e \mu(t) + k_v \dot{\mu}(t) = \delta(t)$. Enačbo se reši posebej za intervala $t < 0$ in $t > 0$, takrat je namreč desna stran enačbe enaka nič. Dobimo rešitev

$$\mu(t) = \begin{cases} C \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), & t < 0 \\ D \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), & t > 0 \end{cases}, \quad (13)$$

kjer je karakteristični čas zopet enak $\tau = \frac{\eta}{G}$. Za dokončno rešitev moramo upoštevati še robne pogoje. Prvi robni pogoj dobimo z integracijo začetne enačbe na majhnem intervalu $(-\Delta t, \Delta t)$ v okolici točke $t = 0$ in s kasnejšim limitiranjem $\Delta t \rightarrow 0$. Robni pogoj se glasi $k_v \mu(\Delta t) - k_v \mu(-\Delta t) = 1$. Upoštevali smo, da je integral funkcije $\mu(t)$ na neskončno majhnem intervalu ničeln. Drugi robni pogoj sledi iz kavzalnosti, torej zahtevamo, da je odmik pred delovanjem sile ničeln, kar postavi $C = 0$ in $D = \frac{1}{k_v}$. Primarna odzivna funkcija za Kelvin-Voigtov model je enaka



Slika 5. Shematski prikaz Kelvin-Voigtovega modela, torej vzporedne vezave blažilca z viskoznostjo η in vzmeti s konstanto G . Prirejeno po: [6].

$$\mu(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{k_v} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), & t > 0 \end{cases} \quad (14)$$

Vrednost $\mu(t)$ v točki $t = 0$ zaradi nezveznosti ni izračunana. To nas ne moti, saj primarno odzivno funkcijo vedno uporabljamo znotraj integralov, ki jih nezveznost v eni sami točki ne spremeni. Iz enačbe (4) sledi, da je raztezek za silo $F = F_0\Theta(t)$ enak

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_\infty \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right), \quad (15)$$

kjer je $\varepsilon_\infty = \frac{1}{G} \frac{F_0}{A}$ asimptotična vrednost raztezka (glej sliko 2i). Raztezek ε_∞ povsem določa elastični del snovi, saj se po dolgem času odmik ustali in posledično viskozni del ne prispeva več k skupni sili. Začetno postopno povečevanje raztezka je posledica tega, da na začetku vsa sila izhaja iz viskoznega dela, saj je raztezek takrat enak nič, njegov odvod pa ni. Skozi čas se odmik povečuje in tako k skupni sili vedno več prispeva elastični del snovi, posledično je časovni odvod, ki je povezan z viskozno silo, vedno manjši. Za velike čase se tako postopoma doseže stacionarno stanje.

Kelvin-Voigtov model z odzivom na konstantno strižno napetost in odmik ustreza idealni viskoelastični trdnini. Ker je v modelu viskozni odmik omejen z vzporedno vezavo elastične komponente, kljub določenim viskoznim lastnostim sistema gradniki snovi ostajajo približno na istem mestu. Torej ni presenetljivo, da je Kelvin-Voigtov model bliže trdninam kot tekočinam.

Z uporabo primarne odzivne funkcije izračunamo še odziv sistema na silo $F = F_0 \sin(\omega t)$ in moč, ki se ob tem troši. Dobimo enačbi

$$x = \frac{F_0}{k_e(\tau^2\omega^2 + 1)} \left[\tau\omega \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \sin(\omega t) - \tau\omega \cos(\omega t) \right], \quad (16)$$

$$\frac{dW}{dt} = F \frac{dx}{dt} = \frac{F_0^2\omega}{k_e(\tau^2\omega^2 + 1)} \left[\frac{\sin(2\omega t)}{2} + \tau\omega \sin^2(\omega t) - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \sin(\omega t) \right]. \quad (17)$$

Hitro ugotovimo, da je časovno povprečje prvega člena desne strani enačbe (17) ničelno, povprečje drugega člena pa enako $\langle \frac{dW}{dt} \rangle = \frac{F_0^2\tau\omega^2}{2k_e(\tau^2\omega^2 + 1)}$. Za razliko od Maxwellovega modela (glej enačbo (10)), se tu pojavi še eksponentni člen. Če pogledamo limito $t \rightarrow \infty$, ko izginejo posledice vseh začetnih pogojev, ugotovimo, da sistem ne niha v fazi s silo. Toda na začetku vzbujanja ($t = 0$) sta zaradi robnih pogojev tako sila kot odmik sistema ničelna, torej prav na začetku ne nihata z želeno fazo. Eksponentni člen torej predstavlja dušenje začetnih pogojev do nihanja s fazno razliko, ki se uveljavi po dolgem času. Ta eksponentni člen se lepo opazi na sliki 3, kjer se krivulja za Kelvin-Voigtov model začne v izhodišču in se nato nadaljuje v elipso. Posledično bi lahko za Maxwellov model sklepali, da niha v fazi s silo, ker v enačbi (10) ni eksponentnega člena. Toda ta sklep je zaradi enačbe (9) očitno napačen. Prava razlaga je ta, da odmik Maxwellovega modela ne niha okoli izhodišča, ampak okoli vrednosti $x = \frac{F_0}{k_v\omega}$, kar se lepo vidi v omenjeni enačbi (9). Ta premik ravnovesne lege zagotovi, da se sistem ob začetku vzbujanja, ob času $t = 0$, nahaja v izhodišču in že od začetka vzbujanja začne nihati s takim faznim zamikom glede na silo, kot bi se sicer vzpostavil šele za daljše čase. Omenjeno prikazuje slika 3, kjer opazimo, da je krivulja za Maxwellov model premaknjena elipsa, ki seka izhodišče. Premik elipse ustreza premiku ravnovesne lege nihanja raztezka.

3.4 Oldroyd-B model

Prvi model, pri katerem opis viskoelastičnih snovi izvira iz mikroskopskih značilnosti gradnikov, je bil Oldroyd-B model. Poimenovan je po britanskem matematiku in reologu Jamesu G. Oldroydu; oznaka B pa označuje eno izmed različic, ki jih je razvil [7]. V okviru tega modela obravnavamo

raztopino polimerov v newtonskem topilu. Pri tem predpostavimo, da se topilo še vedno obnaša po Navier-Stokesovih enačbah (glej enačbe (27), (28) in (29)), vendar k skupni napetosti poleg viskoznega trenja in tlačnih sil v topilu prispevajo še sile zaradi polimerov [8].

Posamičen polimer je obravnavan kot dve kroglici polmera a , povezani z linearno vzmetjo s konstanto λ , kar prikazuje slika 6. Polmer kroglic a v modelu izberemo tako, da viskozna sila na kroglici čim bolj opiše viskozno silo, s katero topilo deluje na polimer (glej enačbo (18)). Konstanto λ lahko izračunamo s pomočjo ekviparticijskega izreka, ki pove, da vsaka neomejena, neodvisna in kvadratična prostostna stopnja k skupni energiji doda energijo $\frac{k_B T}{2}$. Ob predpostavki, da je ravnovesni raztezek polimera enak r_0 , lahko njegovo prožnostno energijo zapišemo kot $W = \frac{1}{2} \lambda r_0^2$. Upoštevamo še, da je polimer tridimenzionalen in z enačenjem energij dobimo, da je konstanta enaka $\lambda = \frac{3k_B T}{r_0^2}$. Obravnavamo torej sistem dveh kroglic, prvo predstavlja koordinata $\mathbf{s}$, drugo pa $\mathbf{s} + \mathbf{r}$. Torej je spremenljivka $\mathbf{r}$ raztezek vzmeti.

Ker model predpostavi, da sta kroglici dovolj majhni, da je njuna masa zanemarljiva, lahko za prvo kroglico zapišemo ravnovesje sil

$$\lambda \mathbf{r} + 6\pi\eta a \left(\mathbf{u}(\mathbf{s}) - \frac{d\mathbf{s}}{dt} \right) = 0. \quad (18)$$

Drugi člen predstavlja dobro znano silo, ki deluje na prvo kroglico zaradi njenega gibanja s hitrostjo $\frac{d\mathbf{s}}{dt}$ v okoliški tekočini s hitroštnim poljem $\mathbf{u}$ in viskoznostjo η . Sila zaradi viskoznosti okoliškega topila je namreč odvisna le od relativne hitrosti. Prvi člen predstavlja elastično silo zaradi vzmeti. Podobno enačbo zapišemo še za drugo kroglico, spremeniti moramo le predznak pred elastično silo, saj ta kaže v nasprotno smer, ter upoštevati, da je položaj druge kroglice enak $\mathbf{s} + \mathbf{r}$. Posledično lahko izrazimo hitrosti obeh kroglic kot

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{k_B T}{2\pi\eta a r_0^2} \mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{s}), \quad (19)$$

$$\frac{d(\mathbf{s} + \mathbf{r})}{dt} = -\frac{k_B T}{2\pi\eta a r_0^2} \mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{s} + \mathbf{r}). \quad (20)$$

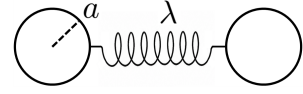
Enačbi (19) in (20) odštejemo in uporabimo Taylorjev razvoj $\mathbf{u}(\mathbf{s} + \mathbf{r}) = \mathbf{u}(\mathbf{s}) + \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{u}$. Razvoj je upravičen, saj je mikroskopska razdalja $|\mathbf{r}|$ mnogo manjša od tipičnih razdalj, na katerih se hitrost okoliške tekočine $\mathbf{u}$ znatno spremeni. Dobimo enačbo, ki opisuje časovno spreminjanje vektorja med kroglicama

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\frac{1}{2\tau} \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{u}, \quad (21)$$

kjer $\tau = \frac{\pi\eta a r_0^2}{2k_B T}$ označuje relaksacijski čas.

Spomnimo se, da polmer kroglic a v modelu določa hidrodinamsko velikost polimera. Torej je polmer a reda velikosti 10–100 nm, kar so ravno tipične velikosti delcev, ki kažejo Brownovo gibanje. Gre za naključno gibanje delcev, ki ga povzročajo trki z manjšimi gradniki okoliške tekočine [9]. Čeprav je teh trkov veliko z vseh smeri, se v majhnem časovnem intervalu ne izpovprečijo. To pomeni, da se opazovani večji delec znotraj vsakega takega časovnega intervala rahlo premakne. Zaradi narave množice trkov so vse smeri enakovredne. Brownovo gibanje si lahko torej predstavljamo kot naključni sprehod delca, pri katerem proti nič limitiramo velikost koraka $d\mathbf{r} \rightarrow 0$ in čas med zaporednima korakoma $dt \rightarrow 0$. Matematično lahko to zapišemo kot

$$d\mathbf{r} = \left(-\frac{1}{2\tau} \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) dt + \tau^{-\frac{1}{2}} d\mathbf{B}_t, \quad (22)$$



Slika 6. Oldroyd-B model obravnava polimer kot dve kroglici s polmerom a , ki sta povezani z vzmetjo s konstanto λ .

kjer člen $\tau^{-\frac{1}{2}}d\mathbf{B}_t$ predstavlja majhen premik zaradi Brownovega gibanja v časovnem intervalu dt . Zaradi lastnosti naključnega sprehoda je $d\mathbf{B}_t$ porazdeljen po normalni porazdelitvi, torej $d\mathbf{B}_t \sim \mathcal{N}(0, dt)$, kar pomeni da varianca narašča linearno s časom. Da v člen z Brownovim gibanjem dodamo še $\tau^{-\frac{1}{2}}$, upravičimo z dimenzijsko analizo. Seveda obstajajo bolj rigorozne razlage (glej [8]), a se tu zadovoljimo z najpreprostejšo.

Ker želimo dobiti izraz za dodatno napetost, ki jo povzročajo kroglice, povezane z vzmetmi, obravnavamo majhno površino velikosti dS z enotsko normalo $\mathbf{n}$. Sila, ki deluje med prostorom nad ravnino in pod njo zaradi enega sistema kroglica-vzmet-kroglica, je enaka $\mathbf{F} = \lambda \mathbf{r}$. Ugotoviti moramo le še, koliko takih vzmeti seka površino dS . Daljše vzmeti, torej tiste z večjim $|\mathbf{r}|$, imajo večjo verjetnost, da sekajo tako površino. Enako velja za vzmeti, ki so poravnane z normalo $\mathbf{n}$, v nasprotju s tistimi, ki so nanjo pravokotne. Če označimo še številsko gostoto sistemov kroglica-vzmet-kroglica z m , je enačba za število vzmeti, ki sekajo površino, enaka $N = m \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS$. Posledično je dodatna napetost, ki deluje na površino, enaka

$$\sigma_{ij} n_j dS = \lambda r_i (m r_j n_j dS). \quad (23)$$

V tem primeru se tenzorski naravi napetosti ne moremo izogniti. Nadalje velja

$$\sigma_{ij} = G A_{ij}, \quad (24)$$

kjer je $G = \frac{3\pi\eta am}{2\tau}$ in $A_{ij} = \langle r_i r_j \rangle$ konformacijski tenzor. Takoj ugotovimo, da je konformacijski tenzor simetričen zaradi komutacije množenja posameznih koordinat. Povprečenje poteka po vseh polimerih oziroma sistemih kroglica-vzmet-kroglica po snovi, saj s tem dobimo povprečno silo, ki deluje na površino dS . Poglejmo si, kaj predstavljajo posamezni elementi konformacijskega tenzorja. Diagonalni elementi A_{ii} so samo kvadrati posameznih koordinat, torej je njegova sled enaka $\text{Tr}(\mathbf{A}) = A_{ii} = x^2 + y^2 + z^2$. Opazimo, da je sled močno povezana z elastično potencialno energijo, torej diagonalni členi predstavljajo, koliko se polimer v posamezni smeri raztegne. Pri tem moramo seveda upoštevati, da ima tudi neobremenjen polimer neko dolžino. Za razlago izvendiagonalnih členov se opremo na primer, ko na raztopino polimerov ne deluje nobena napetost. Takrat so polimeri enakomerno porazdeljeni v vse smeri. To pomeni, da se izvendiagonalni členi izpovprečijo, čeprav so za posamezen polimer lahko neničelni. Poglejmo si še primer strižnega toka v smeri x z gradientom hitrosti v smeri z , torej $\mathbf{u} = (z, 0, 0)$. Predstavljamo si lahko, da tak strižni tok vsaj nekoliko nagne polimere proti osi x , stran od osi z . V tem primeru se izvendiagonalni prispevki produkta $r_i r_j$ oblike xz ne izpovprečijo več. Torej dobimo neničelna izvendiagonalna člena A_{xz} in A_{zx} . Skratka, diagonalni členi tenzorja A_{ij} so povezani z raztežkom polimerov, izvendiagonalni pa z orientacijo in posledično nakazujejo na strižni tok [10].

Sedaj še povežemo enačbi (22) in (24). To naredimo tako, da izračunamo, kako se spremeni konformacijski tenzor v časovnem intervalu dt . Položaj prve kroglice se v tem času spremeni kot $\mathbf{s} + d\mathbf{s} = \mathbf{s} + \mathbf{u}(\mathbf{s})dt$. Torej za tenzor A_{ij} velja enačba

$$A_{ij}(\mathbf{s} + \mathbf{u}(\mathbf{s})dt, t + dt) = \langle (r_i + dr_i)(r_j + dr_j) \rangle. \quad (25)$$

Upoštevamo še lastnost povprečenja, da je povprečje vsote enako vsoti povprečij, in v enačbo (25) vstavimo enakost (22). Po daljšem postopku (glej [8]), v katerem ohranimo samo najnižji red po dt in vse člene, ki vsebujejo $\langle r_i r_j \rangle$, izrazimo z A_{ij} ter po Taylorju razvijemo levo stran, pridemo do enačbe

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^\top \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{\tau}(\mathbf{A} - \mathbf{I}), \quad (26)$$

v kateri smo se znebili indeksne notacije. Gradient vektorja je, kot je pogosto v tuji literaturi (glej [11]), definiran kot $(\nabla \mathbf{u})_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial r_i}$. Spomnimo se še začetne predpostavke, da se raztopina s

polimeri obnaša po Navier-Stokesovih enačbah s popravkom dodatne napetosti zaradi polimerov. Matematično to zapišemo kot

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (27)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot \sigma, \quad (28)$$

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \eta \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\top \right) + G\mathbf{A}. \quad (29)$$

To so Navier-Stokesove enačbe za nestisljivo tekočino. Rahlo odstopa le enačba (29), pri kateri k napetosti prištejemo še člen $G\mathbf{A}$, ki je posledica elastičnih sil vzmeti med kroglicama in viskoznih sil okoliške tekočine na ti dve kroglici. Ostala dva člena v tej enačbi sta posledica tlačnih in viskoznih sil znotraj topila.

Oldroyd-B model torej predstavlja set štirih enačb (26), (27), (28) in (29), ki bistveno izboljša možnost teoretične napovedi in razlage opaženih pojavov, predvsem tistih, ki so večinoma strižne narave [12]. Primer je Weissenbergov pojav, pri katerem se viskoelastična tekočina v strižnem toku nepričakovano začne kopičiti v središču vrtinca. A vendarle ima obravnavani model tudi veliko pomanjkljivost. Popolnoma namreč odpove pri obravnavi tokov s hitrostnimi polji, ki denimo vsebujejo sedla [13]. Težava je v tem, da lahko dva majhna volumna tekočine, ki sta v okolici sedla poljubno blizu skupaj, odpotujeta daleč narazen. Takrat je predpostavka, da so polimeri približno dve kroglici povezani z linearno vzmetjo, neustrezna. Lahko se namreč zgodi, da se kroglici, ki sta v okolici sedla poljubno blizu skupaj, kasneje močno oddaljita. Ker v modelu ni vključena nobena omejitev glede raztezka vzmeti, linearna vzmet med takima kroglicama povzroča ogromne sile. Uporaba Oldroyd-B modela za obravnavo preprostega dvodimenzionalnega toka s hitrostnim profilom v obliki sedla, celo napove nesmiselne negativne vrednosti efektivne viskoznosti [11].

3.4.1 Weissenbergov pojav

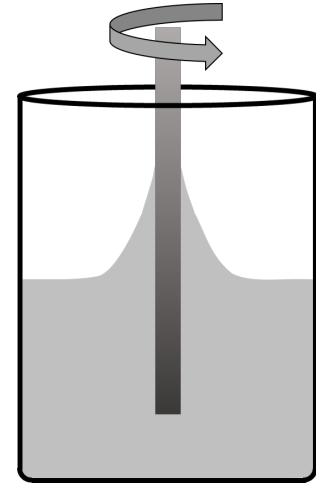
Weissenbergov pojav se zgodi, ko se v viskoelastični tekočini vzpostavi vrtničasto hitrostno polje. Za newtonsko tekočino v takem primeru pričakujemo, da se bo gladina v središču vrtinca znižala, saj bo tekočino odneslo stran. V primeru viskoelastičnih tekočin pa se začne tekočina zbirati v središču vrtinca, torej se tam gladina dvigne, kar prikazuje slika 7. Tak dvig gladine uspešno napove tudi Oldroyd-B model [11]. Razlago pojava lahko utemeljimo na primeru preprostega strižnega hitrostnega polja v smeri x , torej $\mathbf{u} = (\gamma y, 0, 0)$. Zadostna je že obravnava v dveh dimenzijah. Najprej z enačbama (26) in (29) izračunamo konformacijski tenzor in napetost, dobimo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 + 2\gamma^2\tau^2 & \gamma\tau \\ \gamma\tau & 1 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} -p + G + 2G\gamma^2\tau^2 & \gamma(\eta + G\tau) \\ \gamma(\eta + G\tau) & -p + G \end{pmatrix}. \quad (31)$$

V izračunu smo upoštevali, da se $\mathbf{A}$ ne spreminja s časom, ker je polje stacionarno. Poleg tega smo iz hitrostnega profila sklepali še, da je $\mathbf{A}$ neodvisen od koordinate x . Spomnimo se, da diagonalni

element napetostnega tenzorja, na primer σ_{xx} , pomeni normalno silo, ki deluje na majhen volumen snovi vzdolž osi x . Pozitivna vrednost σ_{xx} pomeni delovanje sile v smeri zunanje normale takega volumna, negativna pa v obratni smeri. Pozitivna vrednost razlike $\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = 2G\gamma^2\tau^2$ torej



Slika 7. Weissenbergov pojav. Viskoelastična tekočina se zaradi vrtničastega hitrostnega polja zbere v središču vrtinca. Če tako polje ustvarjamo z vrtečo se palico, se tekočina nabere ob njej. Prirejeno po: [14].

pomeni, da so majhen volumen in polimeri v njem močnejše napeti v smeri tokovnic kot v smeri pravokotno nanje. Poenostavljeno si tak primer lahko predstavljamo tako, da so tokovnice kot elastike, ki so močno napete v vzdolžni smeri in le rahlo v prečni smeri. Če take tokovnice sklenemo v krožnice, torej če v tekočini ustvarimo vrtnično polje, se zaradi vzdolžne napetosti stisnejo k središču krožnice. Sila, ki nastane zaradi takšne težnje po relaksaciji elastik, potisne viskoelastično tekočino proti sredini vrtnice. To je točno razlog za Weissenbergov pojav.

4. Zaključek

Prvi koraki k razumevanju viskoelastičnih lastnosti snovi so bili narejeni že pred več kot stoletjem. Takrat sta bila namreč postavljena Maxwellov in Kelvin-Voigtov model, ki še vedno služita kot osnova, saj kljub preprostosti zajemata bistvo. Z leti so se pojavili novi in izboljšani modeli, kot na primer Oldroyd-B model, ki se je uveljavil zaradi uspešne napovedi Weissenbergovega pojava. Čeprav se ta model še dandanes uporablja, še zdaleč ni popoln. Večkrat se namreč izkaže za pomanjkljivega pri razlagi kompleksnejših pojavov, mednje sodi tudi turbulenca. Toda ravno te pomanjkljivosti so predstavljale spodbudo za razvoj še novejših modelov. S tem se še vedno izboljšuje natančnost opisa viskoelastičnih snovi, ki ni pomembna le v fiziki, temveč tudi za napredek v industriji, biologiji in na številnih drugih področjih.

LITERATURA

- [1] C. Roberto in T. Veronique, *Introduction to viscoelasticity and plasticity, and their relation to the underlying microscopic dynamics in soft matter systems*, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications **631** (2023), 128653.
- [2] R.A.L. Jones, *Soft Condensed Matter*, Oxford University Press, 2002.
- [3] X. Zhou, D. Yu in O. Barrera, *Mechanics constitutive models for viscoelastic solid materials: Development and a critical review*, Advances in Applied Mechanics **56** (2023), 189–321.
- [4] P. Zihlerl, *Physics of Soft Matter*, 2014, <http://www-f1.ijs.si/~zihlerl/smt.pdf>, dostop: 12.5.2026.
- [5] Wikipedia, *Maxwell material*, 2024, https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell_model, dostop: 10.5.2026.
- [6] Wikipedia, *Kelvin-Voigt material*, 2024, https://en.wikipedia.org/wiki/Kelvin%E2%80%93Voigt_material, dostop: 10.5.2026.
- [7] J. Hinch in O. Harlen, *Oldroyd B, and not A?*, 2021, <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/hinch/publications/Oldroyd12b.pdf>, dostop: 5.7.2026.
- [8] H. J. Wilson, *Microscopic dynamics*, 2006, <https://www.homepages.ucl.ac.uk/~ucahhi/GM05/lecture4-5.pdf>, dostop: 21.5.2026.
- [9] Wikipedia, *Brownian motion*, 2006, https://en.wikipedia.org/wiki/Brownian_motion, dostop: 21.5.2026.
- [10] I. Hameduddin, C. Meneveau, T. A. Zaki in D. F. Gayme, *Geometric decomposition of the conformation tensor in viscoelastic turbulence*, Journal of Fluid Mechanics **842** (2018), 395–427.
- [11] H. J. Wilson, *Oldroyd-B fluid*, 2006, <https://www.homepages.ucl.ac.uk/~ucahhi/GM05/lecture6.pdf>, dostop: 21.5.2026.
- [12] H. A. Castillo Sanchez, M. R. Jovanović, S. Kumar, A. Morozov, V. Shankar, G. Subramanian in H. J. Wilson, *Understanding viscoelastic flow instabilities: Oldroyd-B and beyond*, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics **302** (2022), 104742.
- [13] E. J. Hinch, *Lecture 9: Strong flows*, 2018, https://www.who.edu/cms/files/lecture09_21380.pdf, dostop: 22.5.2026.
- [14] H. He, M. Gao, D. Torok in K. Molnar, *Self-feeding electrospinning method based on the Weissenberg effect*, Polymer **190** (2020), 122247.