

O NEKONTRAKTIBILNOSTI KROŽNICE V HOMOTOPSKI TEORII TIPOV

JAKA SLAPAR

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

V članku so predstavljeni osnovni gradniki homotopske teorije tipov. Znotraj teorije je nato izpeljan preprost dokaz znanega dejstva iz algebraične topologije, da krožnica S^1 ni kontraktibilna. Dokaz temelji na konceptu vlaknenja, ki je v homotopski teoriji tipov zelo osnovna konstrukcija. Namen članka je predstaviti uporabnost homotopske teorije tipov skozi primer dokaza, ki je klasično precej netrivialen, saj delo s homotopijami hitro zahteva veliko znanja iz topologije. Ker so poti popolnoma osnovni objekti v homotopski teoriji tipov, za razumevanje članka ni potrebno predznanje iz drugih matematičnih področij, seveda pa lahko pripomore k intuiciji pri nekaterih dokazih.

ON THE NONCONTRACTIBILITY OF THE CIRCLE IN HOMOTOPY TYPE THEORY

The article presents the basic building blocks of homotopy type theory. Within the theory, a simple proof is then derived of the well-known fact from algebraic topology that the circle S^1 is not contractible. The proof is based on the concept of a fibration, which is a very basic construction in homotopy type theory. The aim of the article is to present the usefulness of homotopy type theory through an example of a proof that is classically quite nontrivial, since working with homotopies quickly requires a great deal of knowledge of topology. Since paths are completely basic objects in homotopy type theory, no prior knowledge of other areas of mathematics is required to understand the article, although such knowledge can of course contribute to intuition in some of the proofs.

1. Uvod

Homotopska teorija tipov je razmeroma mlado matematično področje, ki združuje ideje iz logike, teorije tipov in algebraične topologije. Nastala je iz opažanja, da lahko tipe identifikacij v Martin-Löfovi teoriji tipov interpretiramo kot poti med točkami, zaradi česar številni topološki pojmi postanejo dostopni neposredno znotraj formalnega jezika teorije tipov.

Ena izmed zanimivih posledic te interpretacije je, da se lahko klasične topološke trditve dokazujejo na precej drugačen način kot običajno. V algebraični topologiji je na primer temeljno dejstvo, da krožnica S^1 ni kontraktibilna. Klasični dokazi tega dejstva navadno temeljijo na razmeroma bogatem topološkem aparatu. Med najbolj znanimi pristopi so uporaba fundamentalne grupe, pokritij ali pa ovojnega števila. Že za formulacijo teh rezultatov potrebujemo precej predznanja iz topologije.

V homotopski teoriji tipov se znajdemo v drugačnem položaju. Ker so poti in zanke vgrajene neposredno v samo teorijo, lahko vprašanja o kontraktibilnosti obravnavamo brez zunanega topološkega aparata. Namen tega članka je pokazati, kako lahko s pomočjo nekaj osnovnih konstrukcij homotopske teorije tipov izpeljemo presenetljivo kratek dokaz, da krožnica ni kontraktibilna.

Pri tem ne bomo predpostavljali predznanja iz algebraične topologije. Postopoma bomo predstavili osnovne pojme Martin-Löfove teorije tipov, nato pa vpeljali homotopsko interpretacijo tipov, univalenčni aksiom in višje induktivne tipe. Ti bodo zadostovali za konstrukcijo preprostega vlaknenja nad krožnico, iz katerega bo sledil dokaz osrednjega rezultata članka.

2. Martin-Löfova teorija tipov

Homotopska teorija tipov temelji na Martin-Löfovi teoriji tipov (MLTT). To je formalni sistem, ki ga lahko razumemo kot alternativo običajnim matematičnim temeljem, zasnovanim na teoriji množic. Namesto množic so njeni osnovni objekti tipi in njihovi elementi.

Če je A tip in a njegov element, to zapišemo kot $a : A$. Pomembna razlika teorije tipov je to, da je vsak element element natanko enega tipa. Čeprav recimo tipa naravnih in celih števil vsebujeta element, ki ga označimo z 0 , pa to nikakor nista *enaki* ničli.

Tudi tipi so sami elementi posebnih tipov, ki jim pravimo vesolja in jih bomo označevali s črko $\mathcal{U}$. Vesolja tvorijo hierarhijo, ki preprečuje paradokse, povezane z idejo „tipa vseh tipov“. Tako je vsak tip element nekega vesolja, samo vesolje pa pripada nekemu višjemu vesolju.

Preden nadaljujemo, pojasnimo še zapis za enakost. V članku bomo simbol $=$ uporabljali izključno za tako imenovane **type identifikacij**, ki predstavljajo osrednji predmet homotopske teorije tipov in jih bomo podrobneje predstavili kasneje. Kadar bomo želeli izraziti, da sta dva matematična objekta enaka v običajnem smislu oziroma da ju preprosto obravnavamo kot isti objekt, bomo uporabljali simbol $\equiv$.

2.1 Funkcijski tipi

Če sta A in B tipa, lahko tvorimo nov tip $A \rightarrow B$, ki ga imenujemo **funkcijski tip**. Njegovi elementi so funkcije, ki vsakemu elementu tipa A priredijo natanko en element tipa B . Tako kot v običajni matematiki lahko tudi v teoriji tipov funkcijo uporabimo na argumentu: če imamo funkcijo $f : A \rightarrow B$ in element $a : A$, dobimo element $f(a) : B$.

Pomembnejša novost se pojavi, ko dopustimo, da se ciljni tip spreminja glede na izbrani argument. Za to potrebujemo vesolje tipov $\mathcal{U}$, ki smo ga predstavili na začetku poglavja. Funkciji

$$P : A \rightarrow \mathcal{U}$$

pravimo **družina tipov nad A** , saj vsakemu elementu $a : A$ priredi nek tip $P(a)$. Namesto enega samega ciljnega tipa imamo sedaj za vsak element tipa A svoj tip.

Takšni situaciji ustreza **tip odvisnih funkcij**

$$\prod_{x:A} P(x).$$

Njegovi elementi so funkcije, ki vsakemu $x : A$ priredijo element tipa $P(x)$. Za razliko od navadne funkcije se torej tip vrednosti lahko spreminja od argumenta do argumenta.

Običajne funkcije lahko razumemo kot poseben primer te konstrukcije. Če je družina tipov P konstantna, torej če za vsak $x : A$ velja $P(x) \equiv B$, dobimo natanko funkcijski tip $A \rightarrow B$.

Opomba 1. V teoriji tipov pogosto raje pišemo funkcije v *curryani obliki*. Namesto da funkciji f dveh argumentov podajamo pare iz $A \times B$, jo raje zapišemo v obliki

$$A \rightarrow (B \rightarrow C).$$

Ta oblika je bolj primerna, saj dovoljuje delno aplikacijo $f(a)$, česar ne bi mogli početi v prvem primeru. Hkrati obstaja popolna korespondenca med funkcijami obeh oblik.

Za teorijo tipov je zelo pomembna **Curry-Howardova korespondenca**. To je opažanje, da lahko izjave razumemo kot tipe, njihove dokaze pa kot elemente teh tipov. Dokaz izjave A je torej člen $a : A$. V tej interpretaciji funkcijski tip $A \rightarrow B$ ustreza implikaciji: element tipa $A \rightarrow B$ je postopek, ki iz dokaza a izjave A proizvede dokaz $f(a)$ izjave B , zato ga lahko beremo kot dokaz izjave $A \implies B$.

Odvisni funkcijski tip $\prod_{x:A} P(x)$ ustreza univerzalnemu kvantifikatorju. Njegov element je postopek, ki za vsak element $x : A$ poda dokaz izjave $P(x)$, zato ga beremo kot dokaz izjave $\forall x : A. P(x)$. Na ta način logične operacije niso dodane teoriji od zunaj, temveč so že vsebovane v samih konstrukcijah teorije tipov.

2.2 Induktivni tipi

Nove tipe lahko v Martin-Löfovi teoriji tipov ustvarimo na dva načina: iz obstoječih tipov s pomočjo konstrukcij, kot so na primer funkcijski tipi ali tako, da podamo njihove **generatorje**. Tipom, ki jih dobimo na drugi način, pravimo **induktivni tipi**. Generatorji tipa določajo, kako lahko konstruiramo elemente tega tipa, iz njih pa izhajajo tudi pravila za definiranje funkcij iz teh tipov.

Oglejmo si dva preprosta primera.

Prazni tip

Prazni tip $\mathbf{0}$ nima nobenega generatorja. Posledično nima nobenih elementov. Njegova najpomembnejša lastnost je, da za vsak tip A obstaja funkcija

$$\text{ex-falso} : \mathbf{0} \rightarrow A.$$

Ker prazni tip nima elementov, taka funkcija nima nobene vrednosti, ki bi jo bilo treba določiti. To je različica načela *ex falso quodlibet* oziroma „iz protislovja lahko sklepamo karkoli“. Če namreč uspemo konstruirati element praznega tipa, lahko na njem uporabimo funkcijo *ex-falso* in tako dobimo elemente poljubnih tipov (torej dokaze poljubnih izjav).

S pomočjo praznega tipa lahko definiramo **negacijo** tipa A kot

$$\neg A := (A \rightarrow \mathbf{0}),$$

kar je natanko metoda dokaza z negacijo oziroma „iz A sledi protislovje“.

Tip Bool

Tip logičnih vrednosti **Bool** ima natanko dva generatorja,

$$\text{false} : \text{Bool}, \quad \text{true} : \text{Bool}.$$

Funkcijo, ki slika iz tipa **Bool**, definiramo tako, da predpišemo njeno vrednost na obeh generatorjih. Funkcijo negacije $\text{neg} : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}$ na primer definiramo tako, da podamo vrednosti

$$\text{neg}(\text{false}) := \text{true} \quad \text{in} \quad \text{neg}(\text{true}) := \text{false}.$$

Odvisna vsota

Če je $P : A \rightarrow \mathcal{U}$ družina tipov, lahko tvorimo **odvisno vsoto**.

$$\sum_{x:A} P(x).$$

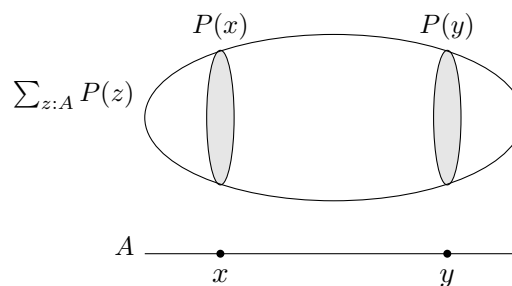
Njegovi elementi so pari (x, y) , kjer je $x : A$ in $y : P(x)$. Če je družina P konstantna, torej če za vsak $x : A$ velja $P(x) \equiv B$, dobimo običajni produkt tipov $A \times B$. Zato lahko odvisno vsoto razumemo kot odvisno različico kartezičnega produkta, podobno kot lahko odvisne funkcijske tipe razumemo kot posplošitev navadnih funkcij.

Geometrijsko imajo odvisne vsote posebno zanimivo interpretacijo. Družino tipov $P : A \rightarrow \mathcal{U}$ si lahko predstavljamo tako, da nad vsako točko $x : A$ stoji svoj tip $P(x)$, ki mu pravimo **vlakno** nad točko x . Namesto da bi ta vlakna obravnavali ločeno, jih lahko združimo v en sam prostor

$$\sum_{x:A} P(x),$$

ki vsebuje vse elemente vseh vlaken hkrati. Ta prostor imenujemo **totalni prostor** družine P .

V topologiji takšni strukturi pravimo vlaknenje. Stroga definicija vlaknenj presega okvir tega članka, vendar si jih lahko predstavljamo tako, da nad vsako točko nekega prostora postavimo vlakno in nato vsa vlakna zlepimo v en sam geometrijski objekt, kot na sliki 1. V homotopski teoriji tipov družine tipov pogosto obravnavamo prav na ta način. Kasneje bomo videli primer vlaknenja nad krožnico, pri kateri bo izbira načina lepljenja vlaken nosila bistveno matematično informacijo.



Slika 1. Odvisna vsota kot lepljenje vlaken

2.3 Tipi identifikacij

Če sta $x, y : A$, lahko tvorimo tip identifikacij

$$x =_A y.$$

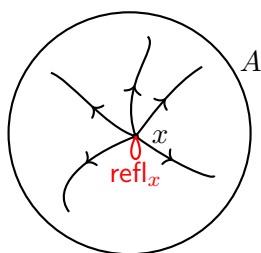
Njegove elemente razumemo kot dokaze enakosti med x in y . Če imamo element $p : x =_A y$, pravimo, da sta x in y **propozicijsko enaka**. Pomembna podrobnost je, da lahko tipe identifikacij tvorimo samo za elemente istega tipa.

Tipi identifikacij so induktivni tipi, katerih osnovni generator je element

$$\text{refl}_x : x =_A x,$$

ki izraža dejstvo, da je vsak element enak samemu sebi. Občasno bomo ambientni tip pod enakostjo izpustili, ko bo iz konteksta razviden.

V homotopski teoriji tipov tipe identifikacij interpretiramo geometrijsko. Element tipa $x =_A y$ razumemo kot **pot** med točkama x in y , element tipa $x =_A x$ pa kot **zanko** v točki x . Ta interpretacija spremeni pojem enakosti iz logičnega razmerja v geometrijski objekt. Prav zaradi nje lahko topološke pojme, kot so poti, zanke in kontraktibilnost, obravnavamo neposredno znotraj teorije tipov.



Slika 2. Poti s fiksiranim levim krajiščem

Osrednje pravilo za delo z identitetnimi tipi se imenuje **indukcija na poteh**. Intuitivno pravi, da je za dokaz trditve o poteh s fiksiranim levim krajiščem x (slika 2) dovolj obravnavati najosnovnejšo identifikacijo, namreč refleksivnost refl_x . Natančneje, naj bo za fiksni $x : A$ družina tipov P , ki vsakemu elementu $y : A$ in poti $p : x =_A y$ priredi tip/izjavo $P(y, p)$. Indukcija na poteh pravi, da lahko funkcijo

$$f : \prod_{(y : A)} \prod_{(p : x =_A y)} P(y, p)$$

definiramo tako, da podamo njeno sliko $f(x, \text{refl}_x)$.

Podobno kot matematična indukcija omogoča dokazovanje trditev o vseh naravnih številih s preverjanjem začetnega koraka in indukcijskega koraka, nam indukcija na poteh omogoča sklepanje o vseh identifikacijah z razumevanjem njihovega najpreprostejšega predstavnika.

Na primeru si oglejmo indukcijo na poteh.

Trditev 2. Propozicijska enakost je ekvivalenčna relacija.

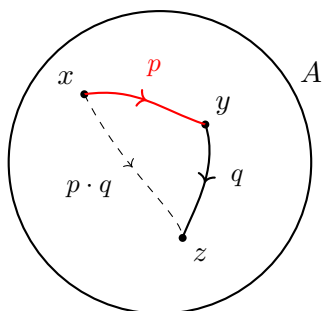
Dokaz. **Refleksivnost:** Res imamo za vsak element $x : A$ dokaz refleksivnosti $\text{refl}_x : x =_A x$.

Simetričnost: Definirali bomo funkcijo inverzije inv , ki sprejme tri elemente: levo in desno krajišče $x, y: A$ ter pot $p: x =_A y$, vrne pa $\text{inv}(x, y, p): y =_A x$. Če fiksiramo levo krajišče, lahko $\text{inv}(x)$ definiramo preko indukcije na poteh, tako da podamo vrednost

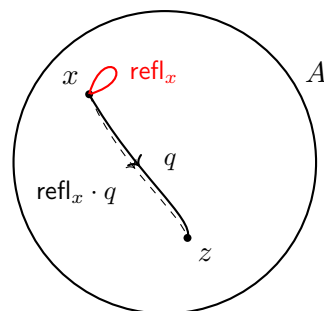
$$\text{inv}(x, x, \text{refl}_x): x =_A x,$$

kar je preprosto refl_x .

Tranzitivnost: Potrebujemo način, da iz elementov $x, y, z: A$ in poti $p: x =_A y$, $q: y =_A z$ konstruiramo njuno **konkatenacijo** $p \cdot q: x =_A z$. Če fiksiramo krajišče x , lahko na poti p uporabimo indukcijo na poteh in p zamenjamo z refl_x . Potem moramo definirati samo še konkatenacijo $\text{refl}_x \cdot q$, kjer je q sedaj tipa $x =_A z$. Vzamemo definicijo $\text{refl}_x \cdot q := q$. Geometrijska predstava zgornjega dokaza je vidna na sliki 3. ■



(a) Imamo dve poti p, q v tipu A in želimo definirati konkatenacijo



(b) Za $\text{refl}_x \cdot q$ lahko vzamemo preprosto pot q

Slika 3. Vizualizacija uporabe indukcije za dokaz tranzitivnosti propozicijske enakosti

Lema 3. Za poljubne poti $p: x =_A y$, $q: y =_A z$, $r: z =_A w$ veljajo enakosti

1. $p \cdot p^{-1} = \text{refl}_x$,
2. $p^{-1} \cdot p = \text{refl}_y$,
3. $p \cdot \text{refl}_y = p$,
4. $\text{refl}_x \cdot q = q$,
5. $(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$.

Dokaz. Dokazujemo samo prvo enakost. Če izberemo fiksno levo krajišče x , lahko uporabimo indukcijo na poti p in potrebujemo še dokaz enakosti

$$\text{refl}_x \cdot \text{refl}_x^{-1} = \text{refl}_x.$$

Po definiciji invertiranja poti je $\text{refl}_x^{-1} \equiv \text{refl}_x$, po definiciji konkatenacije pa je $\text{refl}_x \cdot \text{refl}_x \equiv \text{refl}_x$.

Enakost 4 je samo definicija konkatenacije.

Dokazi ostalih enakosti prav tako potekajo po indukciji na poteh in jih lahko najdemo v [1]. ■

Poti imajo torej lepo algebraično strukturo, ki močno spominja na grupo. Grupni zakoni pa večinoma držijo zgolj propozicijsko oziroma do poti (identifikacije), ki enakost dokazuje.

S tem je naš hiter opis Martin-Löfove teorije tipov zaključen. Bolj formalen in razširjen opis je na voljo v [1] in [2].

3. Osnove homotopske teorije tipov

V tem poglavju predstavimo osnovna orodja in konstrukcije homotopske teorije tipov. Poleg tega vpeljemo aksiom univalence in višje induktivne tipe.

3.1 Kontraktibilnost

Definicija 4. Rečemo, da je tip A **kontraktibilen**, če obstaja par

$$(c, C) : \sum_{(c: A)} \prod_{(x: A)} (c =_A x).$$

Elementu $c: A$ pravimo **center kontrakcije**, funkciji $C: \prod_{(x: A)} c =_A x$ pa **kontrakcija**.

Primer 5. Elementarni primer kontraktibilnega tipa je **enofec 1**. To je tip z enim generatorjem $*$: **1**. Njegov induktivni princip pravi, da je za podajanje odvisne funkcije $f: \prod_{(x: \mathbf{1})} P(x)$ dovolj podati element $*': P(*)$, v katerega funkcija f preslika $*$. Za center kontrakcije lahko vzamemo kar element $*$. Kontrakcija je potem odvisna funkcija v družino $P(x) \equiv (* =_{\mathbf{1}} x)$. Po indukciji moramo podati element $\text{refl}_*: P(*) \equiv (* =_{\mathbf{1}} *)$.

Lema 6. Naj bo (c, C) dokaz, da je tip A kontraktibilen, in $a: A$ poljuben element. Potem obstaja dokaz kontraktibilnosti (a, C') , kjer je $C'(a) = \text{refl}_a$.

Dokaz. Če kontrakcijo C uporabimo na elementu a , dobimo $C(a): c =_A a$.

Na sliki 4 vidimo, da lahko novo kontrakcijo podamo s predpisom

$$C'(x) \equiv C(a)^{-1} \cdot C(x).$$

Potem velja $C'(a) \equiv C(a)^{-1} \cdot C(a) = \text{refl}_a$. ■

3.2 Aplikacija in transport

V tem poglavju bomo formalizirali splošno dejstvo, da v homotopski teoriji tipov funkcije in odvisne funkcije *spoštujejo poti*.

V primeru običajnih funkcij lahko pokažemo lemo, ki pravi, da lahko funkcija med tipoma A in B poti v tipu A preslika v poti v tipu B .

Lema 7 (Aplikacija). Naj bo $f: A \rightarrow B$ funkcija. Za elementa x, y tipa A obstaja funkcija

$$\text{apply}_f: (x =_A y) \rightarrow (f(x) =_B f(y)).$$

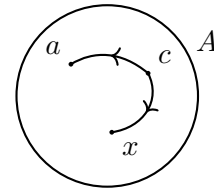
Dokaz. Dokazujemo z indukcijo na poteh. Ta pravi, da je dovolj podati vrednost

$$\text{apply}_f(\text{refl}_x) \equiv \text{refl}_{f(x)}. \quad \blacksquare$$

Podobne izjave za primer odvisne funkcije $f: \prod_{(x: A)} P(x)$ ne moremo samo prepisati. Elementa $f(x)$ in $f(y)$ se namreč nahajata v različnih tipih $P(x)$ in $P(y)$, tipe identifikacij pa lahko tvorimo le za elemente istega tipa.

Lema 8 (Transport). Naj bo $P: A \rightarrow \mathcal{U}$ družina tipov nad A in x, y elementa tipa A . Potem lahko definiramo funkcijo

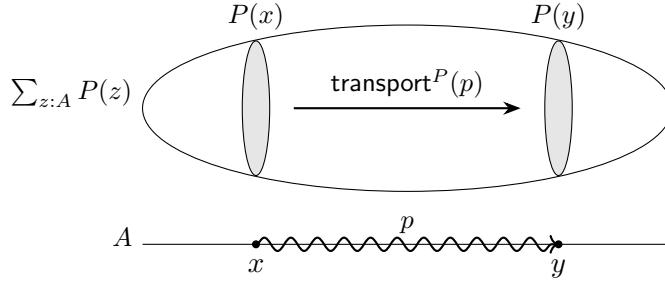
$$\text{transport}^P: (x =_A y) \rightarrow (P(x) \rightarrow P(y)).$$



Slika 4. Poti iz centra kontrakcije

Dokaz. Ponovno nam indukcija na poteh omogoča, da podamo samo vrednost funkcije v konstantni poti $\text{transport}^P(\text{refl}_x): P(x) \rightarrow P(x)$. Naraven izbor je identična preslikava $\text{id}_{P(x)}$. ■

Če si odvisno vsoto $\sum_{(x:A)} P(x)$ predstavljamo kot prostor, ki ga dobimo z lepljenjem vlaken $P(x)$, je transport prikazan na sliki 5.



Slika 5. Transport

Transportiranje je močno orodje, saj nam omogoča, da potujemo med vlakni neke družine. Oglejmo si primer, kako lahko praktično uporabimo transport .

Trditev 9. Za elementa $\text{false}, \text{true}: \text{Bool}$ velja

$$\text{true} \neq_{\text{Bool}} \text{false},$$

kar je samo krajši zapis za $\neg(\text{true} =_{\text{Bool}} \text{false})$.

Dokaz. Definirajmo družino tipov $P: \text{Bool} \rightarrow \mathcal{U}$ kot

$$P(\text{false}) \equiv \mathbf{0} \quad P(\text{true}) \equiv \mathbf{1}.$$

Spomnimo se, da $\neg(\text{true} =_{\text{Bool}} \text{false})$ označuje funkcijski tip $(\text{true} =_{\text{Bool}} \text{false}) \rightarrow \mathbf{0}$. Predpostavimo torej, da imamo pot $p: \text{true} =_{\text{Bool}} \text{false}$ in iščemo protislovje. Na poti p uporabimo transport in dobimo $\text{transport}^P(p): P(\text{true}) \rightarrow P(\text{false})$. Če upoštevamo še definicijo družine, smo dobili funkcijo tipa

$$\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0},$$

ki jo lahko uporabimo na elementu $*$ in pridemo v protislovje. ■

S pomočjo funkcije transport lahko definiramo tudi odvisno verzijo funkcije apply .

Lema 10 (Odkvisna aplikacija). Za odvisno funkcijo $f: \prod_{(z:A)} P(z)$ in pot $p: x =_A y$ lahko definiramo

$$\text{dep-apply}_f: \text{transport}^P(p, f(x)) = f(y).$$

Opomba 11. V zgornjem zapisu smo uporabili curryano obliko funkcije, kot smo pojasnili v opombi 1. Spomnimo se, da je $\text{transport}^P(p)$ funkcija tipa $P(x) \rightarrow P(y)$. Uporabo te funkcije na elementu $f(x): P(x)$ zapišemo preprosto kot $\text{transport}^P(p, f(x))$.

Dokaz. Dokazujemo z indukcijo na p . Podati moramo še dokaz

$$\text{transport}^P(\text{refl}_x, f(x)) = f(x).$$

Ker je leva stran po definiciji enaka $f(x)$, vzamemo $\text{refl}_{f(x)}$. ■

Naslednjih nekaj lem je nekoliko tehničnih, a jih bomo nujno potrebovali v dokazu osrednjega izreka.

Lema 12. Naj bo $P: A \rightarrow \mathcal{U}$ družina tipov. Za elemente $x, y, z: A$ in poti $p: x =_A y$, $q: y =_A z$ velja enakost

$$\text{transport}^P(p \cdot q) = \text{transport}^P(q) \circ \text{transport}^P(p).$$

Dokaz. Dokazujemo lahko z indukcijo na poti p , od koder moramo poiskati enakost

$$\text{transport}^P(\text{refl}_x \cdot q) = \text{transport}^P(q) \circ \text{transport}^P(\text{refl}_x).$$

Po definiciji konkatencije vemo, da sta $\text{refl}_x \cdot q$ in q propozicijsko enaki poti. Na tej enakosti lahko uporabimo $\text{apply}_{\text{transport}^P}$ in vidimo, da je leva stran enaka $\text{transport}^P(q)$.

Po definiciji je $\text{transport}^P(\text{refl}_x) \equiv \text{id}_{P(x)}$, torej je desna stran enaka $\text{transport}^P(q) \circ \text{id}_{P(x)}$, kar je isto kot $\text{transport}^P(q)$. S tem je dokaz končan. ■

Lema 13. Naj bo $P: B \rightarrow \mathcal{U}$ družina tipov in $f: A \rightarrow B$. Potem je $P \circ f$ družina tipov nad A in za poljubno pot $p: x =_A y$ velja enakost

$$\text{transport}^{P \circ f}(p) = \text{transport}^P(\text{apply}_f(p)).$$

Dokaz. Dokazujemo z indukcijo na poti p . Najti moramo enakost

$$\text{transport}^{P \circ f}(\text{refl}_x) = \text{transport}^P(\text{apply}_f(\text{refl}_x)).$$

Leva stran je po definiciji transporta enaka $\text{id}_{P(f(x))}$, na desni strani pa najprej upoštevamo definicijo funkcije apply in dobimo $\text{transport}^P(\text{refl}_{f(x)})$, kar je dalje po definiciji enako $\text{id}_{P(f(x))}$. ■

Lema 14. Naj bo a poljuben element tipa A in naj bosta $p: x =_A y$ ter $q: a = x$ poti. Potem imamo enakost

$$\text{transport}^{x \mapsto (a =_A x)}(p, q) = q \cdot p.$$

Dokaz. Dokazujemo lahko z indukcijo na p , od koder moramo pokazati le še enakost

$$\text{transport}^{x \mapsto (a =_A x)}(\text{refl}_x, q) = q \cdot \text{refl}_x.$$

Desna stran je po lemi 3 enaka q , leva pa je enaka $\text{id}_{a=x}(q) \equiv q$. ■

3.3 Ekvivalenca tipov

Definicija 15. Pravimo, da je funkcija $f: A \rightarrow B$ **ekvivalenca**, če obstaja element tipa

$$\left(\sum_{(h: B \rightarrow A)} \left(\prod_{(x: A)} h(f(x)) =_A x \right) \right) \times \left(\sum_{(g: B \rightarrow A)} \left(\prod_{(y: B)} f(g(y)) =_B y \right) \right).$$

Če med tipoma A in B obstaja ekvivalenca, rečemo, da sta **ekvivalentna** in označimo $A \simeq B$.

Dokaz, da je funkcija $f: A \rightarrow B$ ekvivalenca, tvori element oblike

$$((h, H), (g, G)),$$

kjer sta h in g funkciji tipa $B \rightarrow A$, funkcija H predstavlja izbor enakosti med slikami $h(f(x))$ ter $x: A$, funkcija G pa med $f(g(y))$ in $y: B$. To lahko razumemo na naslednji način: funkcija H (oziroma G) je dokaz, da je h (oziroma g) levi (oziroma desni) inverz funkcije f .

Opomba 16. Morda se zdi nenavadno, da zahtevamo obstoj levega in desnega inverza ne pa tudi, da sta ta inverza enaka. Lahko bi namesto dveh funkcij h, g zahtevali le eno ter dokaza, da je res obojestranski inverz funkcije f , kar izraža tip

$$\text{quinv}(f) := \sum_{(g: B \rightarrow A)} \left(\prod_{(x: A)} g(f(x)) =_A x \right) \times \left(\prod_{(y: B)} f(g(y)) =_B y \right).$$

Temu tipu pravimo tip *kvazi inverzov*. Tip kvazi inverzov nima lastnosti, ki bi jih želeli za tip ekvivalenc. Izkaže se, da „imeti kvazi inverz“ ni *propozicija*, medtem ko „biti ekvivalenca“ je, kar pa presega obseg članka. Natančnejša razlaga je na voljo v [1] ali v [3].

Vseeno pa sta tipa *logično ekvivalentna*. To pomeni, da imamo funkciji v obe smeri med tipoma ekvivalenc in kvazi inverzov funkcije f . Če imamo obojestranski inverz g z dokazoma H in G , lahko seveda podamo element $((g, H), (g, G))$ tipa ekvivalenc. Malenkost težje je opaziti, da lahko tudi iz levega in desnega inverza tvorimo funkcijo, ki bo obojestranski inverz.

Primer 17. Funkcija $\text{neg}: \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}$, ki smo jo definirali v prejšnjem poglavju, je ekvivalenca

$$\text{Bool} \simeq \text{Bool}.$$

Za levi in desni inverz vzamemo ponovno neg in obravnavamo primere

$$\begin{aligned} \text{neg}(\text{neg}(\text{true})) &\equiv \text{neg}(\text{false}) \equiv \text{true} \\ \text{neg}(\text{neg}(\text{false})) &\equiv \text{neg}(\text{true}) \equiv \text{false}. \end{aligned}$$

Torej je funkcija res sama sebi inverz.

Lema 18. Naj bosta $f, g: \prod_{(x: A)} P(x)$ odvisni funkciji. Tvorimo lahko funkcijo

$$\text{happly}: (f = g) \rightarrow \prod_{(x: A)} f(x) =_{P(x)} g(x).$$

Lemo lahko razumemo tako, da propozicijsko enaki funkciji vse elemente tipa A slikata v propozicijsko enaka elementa.

Dokaz. Po indukciji na poteh lahko podamo le $\text{happly}(\text{refl}_f): \prod_{(x: A)} f(x) =_{P(x)} f(x)$. Funkcijo definiramo kot $\text{happly}(\text{refl}_f, x) := \text{refl}_{f(x)}$. ■

Primer 19. Pravzaprav smo spoznali še en pomemben primer ekvivalence. Za družino tipov $P: A \rightarrow \mathcal{U}$ in pot $p: x =_A y$ je funkcija $\text{transport}^P(p)$ ekvivalenca vlaken $P(x)$ in $P(y)$. Res, po lemi 12 imamo enakost

$$\text{transport}^P(p^{-1}) \circ \text{transport}^P(p) = \text{transport}^P(p \cdot p^{-1}),$$

desna stran pa je po lemi 3 in uporabi funkcije apply enaka $\text{transport}^P(\text{refl}_x) \equiv \text{id}_{P(x)}$. Potem imamo po lemi 18 tudi za vsak $u: P(x)$ dokaz enakosti $(\text{transport}^P(p^{-1}) \circ \text{transport}^P(p))(u) = \text{id}_{P(x)}(u) \equiv u$.

Podobno dokažemo tudi, da je funkcija $\text{transport}^P(p^{-1})$ desni inverz.

3.4 Krožnica

Krožnico $\mathbb{S}^1$ v homotopski teoriji tipov predstavimo kot **višji induktivni tip**. To pomeni, da ga podamo s generatorji, podobno kot smo to počeli v poglavju 2.2, le da tokrat dopuščamo tudi generatorje, ki so poti.

Krožnica je tip z generatorjema

$$\text{base} : \mathbb{S}^1 \quad \text{in} \quad \text{loop} : \text{base} =_{\mathbb{S}^1} \text{base}.$$

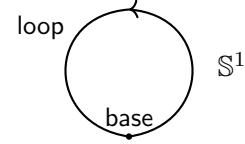
Ima torej dva generatorja: eno točko **base** in zanko **loop**, napeto okoli te točke, kot je prikazano na sliki 6.

Funkcijo $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow A$ definiramo tako, da podamo

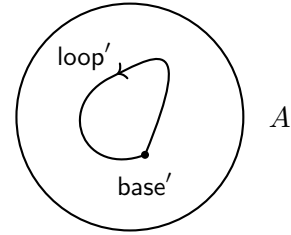
- točko $\text{base}' : A$,
- zanko $\text{loop}' : \text{base}' =_A \text{base}'$,

kot na sliki 7. Tako definirana funkcija f ustreza pravilom

$$\begin{aligned} f(\text{base}) &\equiv \text{base}', \\ \text{apply}_f(\text{loop}) &= \text{loop}'. \end{aligned}$$



Slika 6. Krožnica



Slika 7. Slika funkcije $\mathbb{S}^1 \rightarrow A$

Opomba 20. Opazimo, da računsko pravilo za generator **loop** velja zgolj propozicijsko ($=$) in ne definicijsko ($\equiv$), kot velja na primer za točkovni generator **base**. Gre za konvencijo, katere razlogi za nas niso bistvenega pomena.

Posledično bomo podatke, ki določajo funkcije $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow A$, zapisali z mešano notacijo

$$\begin{aligned} f(\text{base}) &:= \text{base}', \\ \text{apply}_f(\text{loop}) &:= \text{loop}'. \end{aligned}$$

3.5 Univalenčni aksiom

Zadnja formalnost, ki jo moramo še predstaviti, je tako imenovani **univalenčni aksiom**. Ta je ključen za homotopsko teorijo tipov, saj nam nudi način, kako podajati poti med tipi v istem vesolju, torej poti tipa $A =_{\mathcal{U}} B$.

Preden navedemo aksiom, definirajmo funkcijo **id-to-equiv**: $(A =_{\mathcal{U}} B) \rightarrow (A \simeq B)$. Lahko bi jo definirali preko indukcije na poteh, bolj elegantna pa bo za nas naslednja formulacija. Če uporabimo funkcijo **transport** na poti $p : A =_{\mathcal{U}} B$, dobimo po primeru 19 dokaz ekvivalence $A \simeq B$. Torej vzemimo definicijo

$$\text{id-to-equiv}(p) := \text{transport}^{X \mapsto X}(p).$$

Sedaj lahko zapišemo izjavo univalenčnega aksioma.

Aksiom 1. Funkcija **id-to-equiv** je ekvivalenca.

Posebej od tod sledi, da ima funkcija obojestranski inverz, ki ga označimo z

$$\text{univalence} : (A \simeq B) \rightarrow (A =_{\mathcal{U}} B).$$

Funkcija **univalence** nam torej omogoča, da lahko poti med tipoma v vesolju podamo tako, da definiramo ekvivalenco med njima in na njej uporabimo **univalence**. To bo ključnega pomena, ko bomo v naslednjem poglavju definirali vlaknenje $P : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{U}$, saj smo v našem opisu krožnice videli, da tako družino podajamo z dvema podatkom: sliko **base**, ki bo v tem primeru nek tip A , in potjo tipa $A =_{\mathcal{U}} A$.

4. Krožnica ni kontraktibilna

Izrek 21. Krožnica $\mathbb{S}^1$ ni kontraktibilna.

Potrebovali bomo pomožno trditev.

Trditev 22. Za elementa $\text{loop}, \text{refl}_{\text{base}} : \text{base} =_{\mathbb{S}^1} \text{base}$ velja

$$\text{loop} \neq \text{refl}_{\text{base}}.$$

Dokaz. Predpostavimo, da velja enakost

$$\text{loop} = \text{refl}_{\text{base}}.$$

Definiramo vlaknenje $P : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{U}$ s predpisom

$$\begin{aligned} P(\text{base}) &:= \text{Bool}, \\ \text{apply}_P(\text{loop}) &:= \text{univalence}(\text{neg}), \end{aligned}$$

kjer je $\text{neg} : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}$ funkcija, definirana v razdelku 2.2, za katero smo v primeru 17 pokazali, da je ekvivalenca.

Totalni prostor vlaknenja P je prikazan na sliki 8. Na sliki v ospredju ne pride do singularne točke, pač pa je to zanka in ena stran preide pod drugo. Izračunajmo sedaj transport po poteh $\text{refl}_{\text{base}}$ in loop . Po definiciji imamo enakost

$$\text{transport}^P(\text{refl}_{\text{base}}, \text{false}) \equiv \text{false}.$$

Po drugi strani si lahko transport elementa false po zanki predstavljamo tako, da element enkrat „popeljemo okrog“ v totalnem prostoru družine P . Ker se true in false pri enem obhodu zamenjata, prispemo v element true .

Res, izpeljemo lahko

$$\begin{aligned} \text{transport}^P(\text{loop}, \text{false}) &= \text{transport}^{X \mapsto X}(\text{apply}_P(\text{loop}), \text{false}) && \text{(lema 13)} \\ &= \text{transport}^{X \mapsto X}(\text{univalence}(\text{neg}), \text{false}) && \text{(definicija družine } P) \\ &= \text{id-to-equiv}(\text{univalence}(\text{neg}), \text{false}) && \text{(definicija funkcije id-to-equiv)} \\ &= \text{neg}(\text{false}) && \text{(univalenčni aksiom)} \\ &= \text{true}. \end{aligned}$$

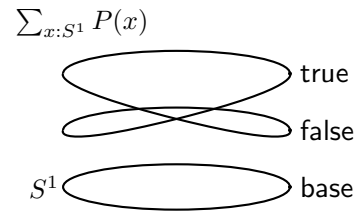
Na predpostavki $\text{loop} = \text{refl}_{\text{base}}$ lahko uporabimo $\text{apply}_{\text{transport}^P}$ in dobimo element tipa

$$\text{transport}^P(\text{loop}) = \text{transport}^P(\text{refl}_{\text{base}}).$$

Funkcija happly nam od tod da enakost $\text{transport}^P(\text{loop}, \text{false}) = \text{transport}^P(\text{refl}_{\text{base}}, \text{false})$, oziroma po zgornjih izračunih

$$\text{true} =_{\text{Bool}} \text{false}.$$

Po trditvi 9 to vodi v protislovje. ■



Slika 8. Totalni prostor vlaknenja

Dokaz izreka. Predpostavimo, da je krožnica kontraktibilna, tj. imamo element $(c, C) : \text{isContr}(\mathbb{S}^1)$. Po lemi 6 smemo obravnavati primer, ko je center kontrakcije c kar base in je $C(\text{base}) = \text{refl}_{\text{base}}$.

Ker je C odvisna funkcija tipa $\prod_{(x : \mathbb{S}^1)} \text{base} =_{\mathbb{S}^1} x$, lahko uporabimo funkcijo dep-apply_C iz leme 10 na generatorju loop in dobimo enakost

$$\text{dep-apply}_C(\text{loop}) : \text{transport}^{x \mapsto (\text{base} =_{\mathbb{S}^1} x)}(\text{loop}, \text{refl}_{\text{base}}) = \text{refl}_{\text{base}}.$$

Leva stran je po lemi 14 enaka $\text{refl}_{\text{base}} \cdot \text{loop}$, kar je naprej enako loop , torej lahko zgornjo enakost ekvivalentno zapišemo kot $\text{loop} = \text{refl}_{\text{base}}$. Po trditvi 22 to vodi v protislovje. ■

5. Zaključek

V članku smo predstavili osnovne gradnike homotopske teorije tipov in z njihovo pomočjo dokazali, da krožnica $\mathbb{S}^1$ ni kontraktibilna. Čeprav je rezultat sam po sebi klasičen, je zanimiv predvsem način dokaza. Namesto dela s topološkimi prostori, zveznimi preslikavami in homotopijami smo argument izpeljali neposredno znotraj teorije tipov, pri čemer so poti nastopale kot osnovni matematični objekt.

Osrednjo vlogo v dokazu je igralo vlaknenje nad krožnico. Dejstvo, da lahko družine tipov razumemo kot vlaknenja, nam je omogočilo, da smo geometrijsko informacijo o zankah na krožnici prevedli v trditev o transportu med vlakni. V kombinaciji z univalenčnim aksiomom je to vodilo do protislovja in s tem do dokaza nekontraktibilnosti krožnice.

Tudi za višjedimenzionalne sfere lahko v homotopski teoriji tipov pokažemo, da niso kontraktibilne, vendar se zgornji argument z vlaknenjem z vlaknom Bool ne posploši neposredno. Za vsak $n \geq 1$ je namreč mogoče v homotopski teoriji tipov dokazati, da so tako imenovane n -te homotopske grupe $\pi_n(\mathbb{S}^n)$ ekvivalentne tipu $\mathbb{Z}$, od koder sledi nekontraktibilnost $\mathbb{S}^n$. Dokaz v splošnem zahteva močnejša orodja homotopske teorije tipov, med drugim Freudenthalov izrek o suspenziji.

Upamo, da je bil iz članka razviden preplet logike, geometrijske intuicije o poteh in teorije tipov, ki je značilen za homotopsko teorijo tipov. Poleg interpretacije, ki jo nudi Curry-Howardova korespondenca, imajo tipi tudi homotopsko strukturo, ki jo predstavljajo tipi identifikacij med njihovimi elementi. To prepletanje različnih pogledov je razlog, da je homotopska teorija tipov v zadnjih desetletjih vzbudila veliko zanimanja.

LITERATURA

- [1] The Univalent Foundations Program, *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*, Institute for Advanced Study, 2013.
- [2] E. Rijke, *Introduction to Homotopy Type Theory*, Cambridge University Press, 2025.
- [3] M. Najdovski, *Obrnljive funkcije so sfere v svetu: delo diplomskega seminarja*, diplomsko delo, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko, 2024.