

METRIČNE DIMENZIJE USMERJENIH CIRKULANTNIH GRAFOV

MAŠA POPOVIČ

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Metrična dimenzija grafa predstavlja najmanjšo kardinalnost množice vozlišč, s katero se lahko enolično določi vsa ostala vozlišča grafa glede na njihove razdalje do izbranih vozlišč. V članku je obravnavana metrična dimenzija v smeri urinega kazalca usmerjenih cirkulantnih grafov $C(n, d)$. Najprej je predstavljen celoštevilski linearni program za izračun metrične dimenzije poljubnega usmerjenega grafa ter analiza njegove časovne zahtevnosti. Nato so z računalniškimi eksperimenti izračunane metrične dimenzije grafov $C(n, d)$ za $n \leq 40$ in na podlagi dobljenih rezultatov je oblikovanih več domnev in splošnih lastnosti. Dokazana je formula za razdaljo med poljubnima vozliščema in izraz za premer grafa $C(n, d)$ ter izpeljane so splošne zgornje in spodnje meje za metrično dimenzijo. Poleg tega so podane natančne vrednosti metrične dimenzije za nekatere posebne družine grafov, med drugim za $C(n, 1)$, $C(n, 2)$, $C(n, n-1)$ in $C(n, n-2)$. Rezultati nakazujejo tesno povezavo med parametroma n in d ter odpirajo več vprašanj za nadaljnje raziskovanje metrične dimenzije usmerjenih cirkulantnih grafov.

METRIC DIMENSION OF DIRECTED CIRCULANT GRAPHS

The metric dimension of a graph is the minimum cardinality of a set of vertices that uniquely determines all other vertices of the graph by their distances to the selected vertices. In this paper, the metric dimension of clockwise-oriented circulant graphs $C(n, d)$ is studied. First, an integer linear programming formulation for computing the metric dimension of an arbitrary directed graph is presented, and its computational complexity is analyzed. Using computational experiments, the metric dimensions of graphs $C(n, d)$ for $n \leq 40$ are then determined, and several conjectures and general properties are formulated based on the obtained results. A formula for the distance between arbitrary vertices and an expression for the diameter of the graph $C(n, d)$ are derived, and general upper and lower bounds for its metric dimension are established. Furthermore, exact values of the metric dimension are provided for several special families of graphs, including $C(n, 1)$, $C(n, 2)$, $C(n, n-1)$, and $C(n, n-2)$. The results indicate a strong relationship between the parameters n and d and open several directions for further research on the metric dimension of directed circulant graphs.

1. Uvod

1.1 Problem metrične dimenzije grafa

Koncept metrične dimenzije sta neodvisno uvedla Slater [1] ter Harary in Melter [2]. Slater je metrično dimenzijo poimenoval *location number* in njeno preučevanje motiviral s problemom optimalne postavitve sonarnih oziroma navigacijskih naprav v omrežju. Cilj je določiti najmanjše število naprav, ki omogočajo enolično določitev položaja vsake točke v omrežju zgolj na podlagi razdalj do teh naprav.

Metrična dimenzija grafa je kardinalnost najmanjše solventne množice grafa, to je podmnožice vozlišč, ki omogoča enolično identifikacijo vsakega vozlišča na podlagi njegovih razdalj do vozlišč iz te množice. Metrična dimenzija se je izkazala za uporaben koncept na številnih področjih. Pomembne uporabe najdemo pri navigaciji avtonomnih robotov, kjer solventna množica predstavlja množico orientacijskih točk (angl. *landmarks*), na podlagi katerih lahko robot določi svoj položaj v prostoru [3]. Poleg tega se metrična dimenzija uporablja pri načrtovanju komunikacijskih in senzor-skih omrežij, analizi socialnih omrežij, kemijski teoriji grafov ter optimizaciji prometnih sistemov [4].

Z matematičnega vidika je problem določanja metrične dimenzije NP-poln problem, kar sta trdila že Garey in Johnson [5] v svoji temeljni knjigi iz leta 1979 *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. Kasneje so Khuller, Raghavachari in Rosenfeld [3] to

tudi formalno dokazali. NP-polnost problema metrične dimenzije za usmerjene grafe pa so dokazali Rajan, Rajasingh, Cynthia in Manuel [6].

Prav zaradi NP-polnosti problema so raziskave usmerjene predvsem v razvoj aproksimacijskih algoritmov, celoštevilskih programov ter v preučevanje posebnih družin grafov, pri katerih je metrično dimenzijo mogoče določiti natančno. Med takšne družine sodijo tudi cirkulantni grafi, ki zaradi svoje strukture predstavljajo zanimiv razred grafov za preučevanje metrične dimenzije. Njihovo metrično dimenzijo so proučevali številni avtorji. Vetrík [7] je obravnaval metrično dimenzijo usmerjenih in neusmerjenih cirkulantnih grafov. Za usmerjene cirkulantne grafe $C_n(1, t)$, pri katerih je vsako vozlišče povezano z vozliščema v_{i+1} in v_{i+t} , je podal popolno rešitev v primeru $n > 2$, $n \geq 2t^2$. Pokazal je, da je metrična dimenzija teh grafov enaka t .

V tem članku obravnavamo drugačno družino usmerjenih cirkulantnih grafov, ki jo označimo z $C(n, d)$. Gre za družino v smeri urinega kazalca usmerjenih cirkulantnih grafov. V grafu $C(n, d)$ je vsako izmed n vozlišč povezano z naslednjimi d vozlišči v smeri urinega kazalca, torej z vozlišči $v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{i+d}$. V tem članku najprej predstavimo celoštevilski linearni program za izračun metrične dimenzije poljubnega usmerjenega grafa. Nato ga izvedemo na družini grafov $C(n, d)$. S pomočjo računalniških eksperimentov in teoretične analize pridobimo več splošnih lastnosti teh grafov, izpeljemo formule za razdaljo in premer ter določimo metrično dimenzijo nekaterih posebnih primerov.

1.2 Osnovni pojmi

Definicija 1. Naj bo G usmerjen graf z množico vozlišč $V(G)$ in množico povezav $E(G)$ ter $u, v \in V(G)$. Za vozlišče v velja, da je *dosegljivo* iz u , če med u in v obstaja pot. Za dolžino poti med vozliščema vzamemo dolžino najkrajše poti.

Definicija 2. Naj bo G graf z množico vozlišč $V(G)$ in množico povezav $E(G)$ ter $u, v, w \in V(G)$. Za vozlišče w pravimo, da *razreši* par vozlišč u in v , če velja, da sta u in v dosegljivi iz w na različnih razdaljah, tj. $d(w, u) \neq d(w, v)$. Množica vozlišč $S \subseteq V(G)$ razreši graf G , če za vsak par vozlišč v G velja, da ga razreši nek element S . Taki množici pravimo *solventna množica*, njeni elementi pa se imenujejo *orientacijske točke* (angl. landmarks). *Metrična dimenzija* grafa G je kardinalnost najmanjše take množice. To označimo z $\dim(G)$.

Opomba 3. Množica S , ki razreši dani graf G ni nujno enolična. Preprost primer je npr. graf, ki je pot. Potem je metrična dimenzija enaka ena, za vozlišče v S pa lahko vzamemo eno izmed robnih vozlišč grafa G .

Definicija 4. Naj bo G graf z množico vozlišč $V(G)$ in množico povezav $E(G)$. Naj bo $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, $W \subseteq V(G)$ urejena množica in $v \in V(G)$. Označi

$$r(v|W) = (d(w_1, v), d(w_2, v), \dots, d(w_n, v))$$

pravimo metrična reprezentacija v glede na množico W . Sledi, da W razreši G natanko tedaj, ko velja $r(u|W) \neq r(v|W)$ za vse $u, v \in V(G)$, kjer velja $u \neq v$.

Definicija 5. V smeri urinega kazalca usmerjen cirkulantni graf $C(n, d)$ je usmerjen graf z n vozlišči, kjer so vozlišča označena kot $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$. Množica povezav $E(C(n, d))$ vsebuje usmerjene povezave med vozlišči, in sicer vsakemu vozlišču v_i pripadajo povezave do naslednjih d vozlišč v smeri urinega kazalca. Množica povezav je torej podana kot:

$$E(C(n, d)) = \{(v_i, v_{(i+k) \bmod n}) : 1 \leq k \leq d\}, \quad \text{za vsak } i \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Definicija 6. Naj bo $C(n, d)$ v smeri urinega kazalca usmerjen cirkulantni graf z množico vozlišč $V = \{0, 1, \dots, n-1\}$, in usmerjenimi povezavami

$$i \rightarrow i + r \pmod{n}, \quad r \in \{1, 2, \dots, d\}.$$

Za poljubni vozlišči $u, v \in V$ definiramo *razliko v smeri urinega kazalca* kot

$$\Delta(u, v) = (v - u) \bmod n,$$

kjer je $\Delta(u, v)$ enolično določeno celo število iz množice $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Z drugimi besedami, $\Delta(u, v)$ predstavlja število korakov v smeri urinega kazalca od vozlišča u do vozlišča v na ciklu dolžine n .

Definicija 7. Naj bo $C(n, d)$ v smeri urinega kazalca usmerjen cirkulantni graf. Njegov *premer* je definiran z

$$\text{diam}(C(n, d)) = \max_{u, v \in V(C(n, d))} d(u, v).$$

2. Celoštevilski linearni program

Ker je določanje metrične dimenzije splošnega grafa NP-poln problem, je za manjše in srednje velike grafe smiselna uporaba metode celoštevilskega linearnega programiranja. Oglejmo si CLP, ki za podani usmerjeni graf izračuna metrično dimenzijo ter poišče solventno množico. Naj bo G poljuben usmerjeni graf z množico vozlišč $V(G)$ in množico povezav $E(G)$.

Vhodni podatki:

- Seznam vozlišč V : predstavimo kot seznam
- Matrika razdalj E : matrika, kjer je $E[i][j]$ razdalja med vozliščema i in j v grafu. Če med vozliščema ne obstaja pot, definiramo $E[i][j] = \infty$. Za izračun razdalj lahko na primer uporabimo algoritem Floyd-Warshall ali BFS.

Ciljna funkcija: Minimiziramo število vozlišč v solventni množici:

$$\min \sum_{v \in V} x_v,$$

kjer je x_v binarna spremenljivka, ki je enaka ena, če je vozlišče v vključeno v solventno množico, in enaka nič, če ni.

Omejitve:

- **Pogoj razrešljivosti:** Za vsak par različnih vozlišč u in v mora obstajati vsaj eno vozlišče w , ki jih razlikuje po razdalji.

$$\sum_{w \in V} z_{u,v}^w \geq 1, \quad \forall u, v \in V, u \neq v,$$

kjer je $z_{u,v}^w$ pomožna binarna spremenljivka, ki je enaka ena, če vozlišče w razreši par (u, v) po razdalji.

- **Povezava med $z_{u,v}^w$ in x_w :** Pomožna spremenljivka $z_{u,v}^w$ lahko postane ena samo, če je vozlišče w v solventni množici (tj. če je $x_w = 1$)

$$z_{u,v}^w \leq x_w, \quad \forall u, v, w \in V, u \neq v.$$

- **Pogoji za binarne spremenljivke:** Vse spremenljivke morajo biti binarne, da zagotovimo celoštevilsko rešitev:

$$x_v \in \{0, 1\}, \quad \forall v \in V;$$

$$z_{u,v}^w \in \{0, 1\}, \quad \forall u, v, w \in V, u \neq v.$$

Optimalna vrednost ciljne funkcije predstavlja metrično dimenzijo grafa, pripadajoče izbrane spremenljivke pa določajo eno izmed solventnih množic.

2.1 Časovna zahtevnost programa

Algoritem smo implementirali kot funkcijo znotraj okolja SageMath z manjšimi prilagoditvami. In sicer, vhodni podatek je objekt tipa graf, za katerega se najprej preveri, če je usmerjen tj. ali je instanca razreda `DiGraph`, nato z uporabo funkcije `vertices` pridobimo seznam vozlišč v grafu. Oglejmo si to funkcijo:

```
def metricna_dimenzija_usmerjenega_grafa(graf):
    if not isinstance(graf, DiGraph):
        return "Napaka: Podani graf ni usmerjen graf."
    V = graf.vertices()

    razdalje = {u: {v: graf.distance(u, v) for v in V} for u in V}

    lp = MixedIntegerLinearProgram(maximization=False)
    x = lp.new_variable(binary=True)
    lp.set_objective(sum(x[v] for v in V))

    for u in V:
        for v in V:
            if u != v:
                vozlisca = [
                    w for w in V
                    if razdalje[w][u] != razdalje[w][v] and
                    razdalje[w][u] < infinity and
                    razdalje[w][v] < infinity
                ]
                if not vozlisca:
                    return f"metrične dimenzije ni mogoče določiti"

                lp.add_constraint(sum(x[w] for w in vozlisca) >= 1)

    lp.solve()

    razresljiva_mnozica = [v for v in V if lp.get_values(x[v]) == 1]
    return razresljiva_mnozica, len(razresljiva_mnozica)
```

Naj bo n število vozlišč v grafu, m pa število povezav.

- **Preverjanje usmerjenosti grafa:** $O(1)$ – enostavno preverjanje vrste grafa (preverimo, ali je podani objekt instanca razreda `DiGraph`).
- **Seznam vozlišč:** $O(n)$
- **Izračun razdalj med vsemi pari vozlišč:** $O(n^2 + n \cdot m)$ – pri usmerjenem grafu je razdalja (u, v) običajno izračunana z algoritmom BFS. Za izračun razdalj od enega vozlišča u do vseh ostalih vozlišč v je časovna zahtevnost $O(n + m)$. To izvajamo za vsak $u \in V$, kar daje: $O(n \cdot (n + m))$
- **Omejitve:** $O(n^3)$ – tukaj imamo dve zanki, ki iterirata po vseh parih (u, v) , kar vzame $O(n^2)$ časa. Vsak pogoj preveri v konstantnem času, torej skupaj $O(n)$.
- **Reševanje celoštevilskega linearnega programa:** $O(2^n)$ – reševanje celoštevilskega linearnega programa je NP-težak problem, časovna zahtevnost je približno $O(2^n)$ v najslabšem primeru.

Skupna časovna zahtevnost programa je torej:

$$O(n^3 + n \cdot m + 2^n).$$

Časovna zahtevnost bo postala problematična pri večjih grafih, predvsem zaradi iskanja razdalj in reševanja celoštevilskega linearnega programa.

Zaradi NP-polnosti problema in eksponentne narave celoštevilskega programiranja postane reševanje modela pri večjih grafih računsko zahtevno. Eksperimentalna analiza je bila zato omejena na grafe z največ 40 vozlišči. Za vsak par parametrov (n, d) , kjer velja $n \leq 40$ in $1 \leq d < n$, smo izračunali metrično dimenzijo grafa $C(n, d)$.

Metrične dimenzije usmerjenih cirkulantnih grafov

p \ n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40				
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1					
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2				
3	3	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3				
4	4	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4			
5	5	3	4	4	5	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5			
6	6 <td>4</td> <td>4</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>5</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>5</td> <td>4</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>5</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>6</td>	4	4	4	5	6	5	4	5	6	6	5	4	6	6	6	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6		
7	7 <td>4</td> <td>5</td> <td>5</td> <td>4</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>5</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>6</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>7</td> <td>6</td> <td>5</td> <td>7</td> <td>7</td> <td>7</td> <td>6</td> <td>5</td> <td>7</td> <td>7</td> <td>7</td> <td>7</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>7</td> <td>7</td> <td>7</td> <td>7</td> <td>7</td> <td>7</td> <td>7</td> <td>7</td> <td>7</td>	4	5	5	4	6	7	5	5	6	6	6	7	6	5	6	7	7	6	5	7	7	7	6	5	7	7	7	7	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	
8	8 <td>5</td> <td>5</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>8</td> <td>6</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>8</td> <td>7</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>8</td> <td>8</td> <td>7</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>8</td> <td>8</td> <td>8</td> <td>8</td> <td>8</td> <td>8</td> <td>8</td> <td>8</td> <td>8</td> <td>8</td> <td>8</td> <td>8</td> <td>8</td> <td>8</td> <td>8</td> <td>8</td>	5	5	5	6	6	8	6	5	6	7	6	7	8	8	7	6	7	8	8	8	7	6	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	
9	9 <td>5</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>9</td> <td>7</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>6</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>9</td> <td>7</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>8</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>9</td> <td>9</td> <td>8</td> <td>8</td> <td>8</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>9</td> <td>9</td> <td>8</td> <td>7</td> <td>9</td> <td>8</td> <td>8</td> <td>8</td> <td>8</td> <td>8</td>	5	6	6	6	6	7	9	7	5	6	7	8	6	8	9	9	7	7	8	8	8	9	9	9	8	8	8	8	9	9	9	8	7	9	8	8	8	8	8		
10	10	6	6	6	5	7	7	6	8	10	7	6	7	8	8	9	9	10	10	8	7	8	9	10	10	8	7	8	9	10	8	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	
11	11	6	7	6	7	7	7	8	8	9	11	8	9	11	8	8	10	8	10	11	9	7	8	10	10	8	7	8	9	10	8	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	
12	12	7	7	7	7	7	8	8	9	8	10	12	9	7	9	9	9	10	10	9	11	12	12	10	8	9	10	11	12	10	8	9	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
13	13	7	8	7	6	8	8	7	9	8	10	13	9	7	9	9	10	10	11	10	11	11	12	13	10	9	10	11	12	13	10	11	11	11	11	12	12	13	13	10	10	10
14	14	8	8	8	8	8	8	9	10	9	10	11	14	10	8	10	10	10	10	11	11	11	12	12	12	10	9	10	11	12	13	10	11	11	11	12	12	12	12	12	12	12
15	15	8	9	8	8	9	9	10	9	10	11																															

Analiza dobljenih podatkov razkrije več zanimivih vzorcev in nakazuje obstoj preprostih zakonitosti, ki povezujejo metrično dimenzijo s parametroma n in d .

Na podlagi eksperimentalnih rezultatov smo oblikovali več domnev in opazovanj, od katerih nekatere v nadaljevanju tudi dokažemo. Nekatere med njimi so se izkazale za splošne lastnosti v smeri urinega kazalca usmerjenih cirkulantnih grafov in jih bomo v naslednjih razdelkih dokazali. Druge za zdaj ostajajo domneve, ki jih podpirajo vsi razpoložljivi eksperimentalni podatki.

5

Domneva 8. Na podlagi izračunanih metričnih dimenzij, lahko za v smeri urinega kazalca usmerjene cirkulantne grafe $C(n, d)$ zapišemo naslednje:

- Za fiksen n in majhne d (za $d \leq n/2$) metrične dimenzije naraščajo približno linearno, ko večamo d . Za večje vrednosti parametra d se rast metrične dimenzije postopoma upočasni in bistveno odstopi od linearnega trenda.
- Pri fiksnem n je maksimalna metrična dimenzija dosežena pri $d = n - 1$, tj. pri polnem usmerjenem grafu, kjer ima vrednost:

$$\dim(C(n, n - 1)) = n - 1.$$

- Za fiksen n in $d < n - 1$ je maksimalna metrična dimenzija dosežena ko je $d = n - 2$, za sode n pa tudi pri $d = n/2$. Takrat ima vrednost:

$$\dim(C(n, n - 2)) = \dim\left(C\left(n, \frac{n}{2}\right)\right) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Za fiksen $n > 4$ in $d < n - 1$, je ta maksimum vedno dosežen tudi v $d = n - 3$. Torej:

$$\dim(C(n, n - 3)) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad \text{za } n > 4.$$

Domneva 9. Za poljuben $n \geq 2$ velja

$$\dim(C(n, 1)) = 1, \quad \dim(C(n, 2)) = 2, \quad \dim(C(n, n - 1)) = n - 1.$$

Domneva 10. Za vsak $n \geq 3$ velja

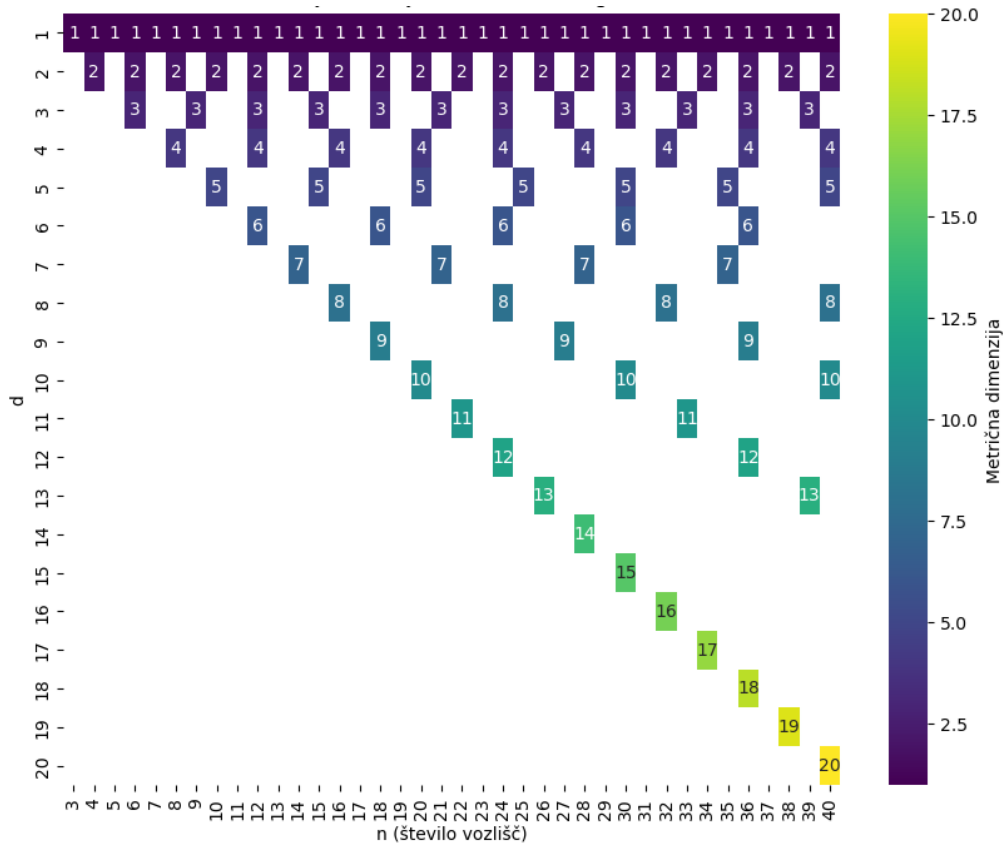
$$\dim(C(n, n - 2)) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Domneva 11. Za vse $n = c \cdot d$, kjer je $c \in \mathbb{N}$, velja:

$$\dim(C(cd, d)) = d.$$

Torej pri fiksnem d velja, da je metrična dimenzija enaka d v vseh tistih n , ki so večkratniki števila d . Ta pojav je lepo viden na Sliki 2. Torej na primer pri $d = 10$ zavzame vrednosti $\dim = 10$ za $n \in \{20, 30, 40, \dots\}$. To pa ne pomeni, da so to edini n pri fiksnem d , kjer metrična dimenzija zavzame vrednost d .

Metrične dimenzije usmerjenih cirkulantnih grafov



Slika 2. Metrične dimenzije v smeri urinega kazalca usmerjenih cirkulantnih grafov $C(n, d)$ za $n = cd$

Na podlagi dobljenih rezultatov lahko oblikujemo tudi več splošnih zgornjih mej.

Domneva 12 (Zgornja meja). Za poljubna n in d velja

$$\dim(C(n, d)) \leq d.$$

Posledično velja tudi $\dim(C(n, d)) \leq n - 1$.

Empirični rezultati kažejo, da je odvisnost metrične dimenzije od parametra d različna v različnih območjih. Pri fiksnem številu vozlišč n metrična dimenzija za manjše vrednosti parametra d narašča približno linearno. To je skladno z opažanjem, da v številnih primerih velja $\dim(C(n, d)) = d$. Ko se d približuje vrednosti $n/2$, se rast metrične dimenzije upočasni. Za vrednosti $d > \lceil n/2 \rceil$ eksperimentalni podatki kažejo bistveno počasnejšo rast od linearne, pri čemer dobljene vrednosti metrične dimenzije ostajajo precej pod zgornjo mejo $\dim(C(n, d)) \leq d$. Na podlagi računalniških eksperimentov za vse grafe $C(n, d)$ z $n \leq 40$ smo oblikovali naslednjo empirično oceno, ki se v opazovanem območju izkaže za bistveno natančnejšo od zgornje meje $\dim(C(n, d)) \leq d$.

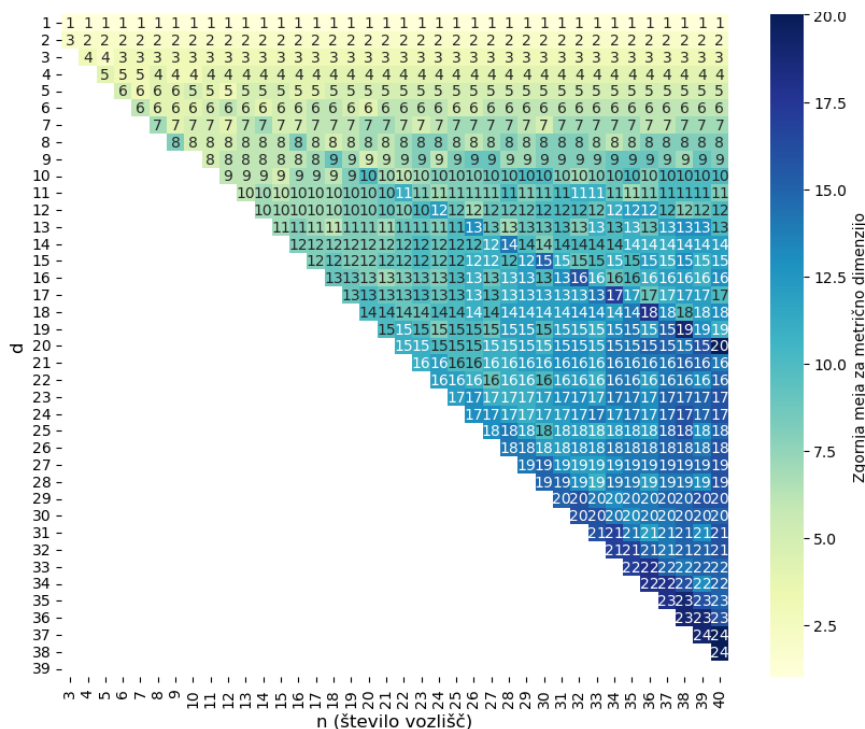
Domneva 13 (Boljša zgornja meja). Za $\lceil n/2 \rceil < d < n - 1$ je naslednja zgornja meja bolj natančna:

$$\lfloor \sqrt{d} \cdot \ln(d + 1) \rfloor + 2.$$

Torej

$$\dim(C(n, d)) \leq \begin{cases} d, & \text{če } d \leq \lfloor n/2 \rfloor, \\ \lfloor \sqrt{d} \cdot \ln(d + 1) \rfloor + 2, & \text{če } \lceil n/2 \rceil < d < n - 1. \end{cases}$$

Nova zgornja meja je boljše od prejšnje, saj je bolj natančna. Na Sliki 3 so prikazane izboljšane zgornje meje za metrično dimenzijo. Slika je primerna za primerjavo z dejanskimi metričnimi dimenzijami, ki so prikazane na Sliki 1, saj lahko vidimo, kako se približamo dejanski dimenziji.



Slika 3. Ocenjene zgornje meje za metrične dimenzije v smeri urinega kazalca usmerjenih cirkulantnih grafov $C(n, d)$ za $n \leq 40$

Za $(C(n, d))$, kjer $n \leq 40$ lahko opazimo tudi naslednje.

Domneva 14 (Zgornja meja). Za poljuben n in $d < n - 1$ velja

$$\dim(C(n, d)) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Če primerjamo to mejo s prejšnjo, opazimo, da je pri manjših n in $\lceil n/2 \rceil < d < n - 1$ meja $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ bolj natančna, za večje n in $\lceil n/2 \rceil < d < n - 1$ pa je bolj natančna meja $\lfloor \sqrt{d} \cdot \ln(d + 1) \rfloor + 2$.

3.2 Posplošitev empiričnih domnev na poljubne grafe $C(n, d)$

Za potrebo dokazov nekaterih domnev bomo potrebovali formulo razdalje med dvema poljubnima vozliščema.

Trditev 15. Naj bo $G = C(n, d)$ v smeri urinega kazalca usmerjen cirkulantni graf z množico vozlišč $V(G) = \{0, 1, \dots, n - 1\}$ in $u, v \in V(G)$ poljubni vozlišči. Potem je razdalja med u in v enaka

$$d(u, v) = \left\lceil \frac{\Delta(u, v)}{d} \right\rceil.$$

Ekvivalentno,

$$d(u, v) = \left\lceil \frac{(v - u) \bmod n}{d} \right\rceil.$$

Dokaz. Naj bo $G = C(n, d)$ v smeri urinega kazalca usmerjen cirkulantni graf z množico vozlišč $V(G) = \{0, 1, \dots, n - 1\}$ in usmerjenimi povezavami $i \rightarrow i + r \pmod{n}$, $r \in \{1, 2, \dots, d\}$. Naj bosta $u, v \in V(G)$ poljubni vozlišči. Dokazati želimo, da velja $d(u, v) = \lceil \frac{\Delta}{d} \rceil$. Dokazali bomo obe neenakosti:

$$d(u, v) \geq \left\lceil \frac{\Delta}{d} \right\rceil \quad \text{in} \quad d(u, v) \leq \left\lceil \frac{\Delta}{d} \right\rceil.$$

Iz tega bo sledila enakost.

Spodnja meja:

Predpostavimo, da obstaja usmerjena pot od u do v dolžine k . Začnemo v vozlišču u . Vsaka povezava na poti do v poveča indeks vozlišča za neko vrednost $a_i \in \{1, 2, \dots, d\}$. Skupni premik vzdolž poti je zato $a_1 + a_2 + \dots + a_k$. Ker se pot konča v vozlišču v , velja

$$u + a_1 + \dots + a_k \equiv v \pmod{n}.$$

Od koder sledi

$$a_1 + \dots + a_k \equiv \Delta \pmod{n}.$$

Ker je $a_i \leq d$ za vsak i , dobimo $a_1 + \dots + a_k \leq kd$. Po drugi strani pa mora biti vsota vsaj Δ , saj je Δ najmanjše nenegativno število, kongruentno z $v - u \pmod{n}$. Torej $a_1 + \dots + a_k \geq \Delta$. Zato velja $kd \geq \Delta$. Po deljenju z d dobimo $k \geq \frac{\Delta}{d}$. Ker je k celo število,

$$k \geq \left\lceil \frac{\Delta}{d} \right\rceil.$$

To velja za vsako usmerjeno pot od u do v , zato

$$d(u, v) \geq \left\lceil \frac{\Delta}{d} \right\rceil.$$

Zgornja meja:

Naj bo

$$q = \left\lfloor \frac{\Delta}{d} \right\rfloor, \quad r = \Delta - qd; \quad 0 \leq r < d.$$

Tedaj je $\Delta = qd + r$.

Konstruirajmo pot od u do v :

- naredimo q skokov velikosti d ;
- če je $r > 0$, dodamo še en skok velikosti r .

Dobimo pot: $u \rightarrow u + d \rightarrow u + 2d \rightarrow \dots \rightarrow u + qd$

Če je $r > 0$: $u + qd \rightarrow u + qd + r = v \pmod{n}$.

Dolžina tako konstruirane poti je $q + \mathbf{1}_{\{r>0\}} = \left\lceil \frac{\Delta}{d} \right\rceil$. Zato

$$d(u, v) \leq \left\lceil \frac{\Delta}{d} \right\rceil.$$

Če združimo spodnjo in zgornjo mejo, dobimo

$$d(u, v) = \left\lceil \frac{(v - u) \bmod n}{d} \right\rceil. \quad \blacksquare$$

Za kasnejše potrebe, si oglejmo še izračun premera v $C(n, d)$.

Trditev 16. Naj bo $C(n, d)$ v smeri urinega kazalca usmerjen cirkulantni graf. Potem je njegov premer enak

$$\text{diam}(C(n, d)) = \left\lceil \frac{n - 1}{d} \right\rceil.$$

Dokaz. Po trditvi 15 v cirkulantnem grafu usmerjenem v smeri urinega kazalca velja

$$d(u, v) = \left\lceil \frac{(v - u) \bmod n}{d} \right\rceil \quad \text{oz.} \quad d(u, v) = \left\lceil \frac{\Delta}{d} \right\rceil.$$

Spremenljivka Δ zavzame vse vrednosti iz množice $\{0, 1, \dots, n - 1\}$. Zato

$$\text{diam}(C(n, d)) = \max_{0 \leq \Delta \leq n-1} \left\lceil \frac{\Delta}{d} \right\rceil.$$

Ker je funkcija $f(\Delta) = \left\lceil \frac{\Delta}{d} \right\rceil$ monotonno naraščajoča v spremenljivki Δ , je njen maksimum na intervalu $0 \leq \Delta \leq n - 1$ dosežen pri največji vrednosti $\Delta = n - 1$. Sledi

$$\text{diam}(C(n, d)) = \left\lceil \frac{n - 1}{d} \right\rceil. \quad \blacksquare$$

Sedaj, ko imamo vse potrebno, si oglejmo in dokažimo spodnjo trditev, za poljubno velike v smeri urinega kazalca usmerjene cirkulantne grafe.

Trditev 17. Naj bo $C(n, d)$ v smeri urinega kazalca usmerjen cirkulantni graf. Za poljuben $n \geq 2$ velja

$$\dim(C(n, 1)) = 1, \quad \dim(C(n, 2)) = 2, \quad \dim(C(n, n - 1)) = n - 1.$$

Dokaz. Naj bo $C(n, d)$ v smeri urinega kazalca usmerjen cirkulantni graf. Najprej obravnavajmo primer $C(n, 1)$. Ta graf je usmerjen cikel

$$v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_{n-1} \rightarrow v_0.$$

Izberimo množico $W = \{v_0\}$. Za vsako vozlišče v_i velja

$$d(v_0, v_i) = i, \quad i \in \{0, \dots, n - 1\},$$

saj obstaja natanko ena najkrajša pot od v_0 do v_i v smeri cikla. Metrična reprezentacija vozlišča v_i glede na množico W je zato $r(v_i|W) = (i)$. Ker za poljubna različna vozlišča i, j velja $r(v_i|W) \neq r(v_j|W)$, množica W razreši graf $C(n, 1)$. Ker prazna množica grafa ne more razrešiti, je najmanjša možna kardinalnost enaka ena. Torej

$$\dim(C(n, 1)) = 1.$$

Sedaj obravnavajmo graf $C(n, 2)$, kjer ima vsako vozlišče povezavi do naslednjih dveh vozlišč:

$$v_i \rightarrow v_{i+1}, \quad v_i \rightarrow v_{i+2} \pmod{n}.$$

Vzemimo množico $W = \{v_0, v_1\}$. Za poljubno vozlišče v_k velja

$$r(v_k|W) = (d(v_0, v_k), d(v_1, v_k)).$$

Za poljubni vozlišči $i, j \in \{0, \dots, n - 1\}$ velja

$$d(v_i, v_j) = \left\lceil \frac{(j - i) \bmod n}{2} \right\rceil.$$

Od tod sledi

$$r(v_k|W) = \left(\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{(k - 1) \bmod n}{2} \right\rceil \right).$$

Te urejene dvojice so za različne k različne, zato množica W razreši graf in $\dim(C(n, 2)) \leq 2$. Pokažimo še obratno neenakost. Če bi obstajala solventna množica velikosti ena, denimo $W = \{v_i\}$, bi za vozlišči v_{i+1} in v_{i+2} veljalo

$$d(v_i, v_{i+1}) = 1, \quad d(v_i, v_{i+2}) = 1.$$

S tem bi dobili $r(v_{i+1}|W) = r(v_{i+2}|W)$, kar je protislovje. Zato velja $\dim(C(n, 2)) \geq 2$. Sledi

$$\dim(C(n, 2)) = 2.$$

Nazadnje obravnavajmo $C(n, n-1)$. V tem grafu ima vsako vozlišče povezavo do vseh ostalih vozlišč:

$$v_i \rightarrow v_j, \quad i \neq j.$$

Gre torej za polni usmerjeni graf. Za vsak par različnih vozlišč v_i, v_j velja $d(v_i, v_j) = 1$. Naj bo v_k poljubno vozlišče. Izberimo

$$W = V \setminus \{v_k\}.$$

Za poljubno vozlišče $v_i \in W$ je metrična reprezentacija oblike

$$r(v_i|W) = (1, \dots, 0, \dots, 1),$$

saj je razdalja do samega sebe enaka nič, do vseh ostalih vozlišč iz W pa enaka ena. Za vozlišče v_k dobimo

$$r(v_k|W) = (1, 1, \dots, 1).$$

Vse reprezentacije so med seboj različne, zato množica W razreši graf in $\dim(C(n, n-1)) \leq n-1$. Predpostavimo zdaj, da obstaja solventna množica W , za katero je $|W| \leq n-2$. Tedaj obstajata vsaj dve različni vozlišči $u, v \notin W$. Za vsak $w \in W$ velja

$$d(w, u) = d(w, v) = 1,$$

od koder sledi

$$r(u|W) = r(v|W),$$

kar je protislovje. Zato mora veljati $\dim(C(n, n-1)) \geq n-1$.

Skupaj dobimo

$$\dim(C(n, 1)) = 1, \quad \dim(C(n, 2)) = 2, \quad \dim(C(n, n-1)) = n-1. \quad \blacksquare$$

Za $n \geq 3$ dokažimo še spodnjo trditev.

Trditev 18. Za vsak $n \geq 3$ velja

$$\dim(C(n, n-2)) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Dokaz. Naj bo $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ množica vozlišč grafa $C(n, n-2)$. Po definiciji ima vsako vozlišče v_i usmerjene povezave do vseh vozlišč razen do samega sebe in do vozlišča v_{i-1} (indeksi modulo n). Torej velja:

$$d(v_i, v_j) = \begin{cases} 0, & i = j, \\ 2, & j = i-1, \\ 1, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Najprej pokažimo zgornjo mejo. Ločimo primera ko je n sodo in ko je n liho.

Naj bo n sodo število. Izberimo množico $W = \{v_0, v_2, v_4, \dots\}$, torej vsako drugo vozlišče. Tedaj velja $|W| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Naj bo $u \neq v$ poljuben par vozlišč. Če je vsaj eno izmed vozlišč u in v vsebovano v množici W , potem se njuni metrični reprezentaciji glede na W razlikujeta v koordinati, ki ustreza temu vozlišču, saj je razdalja vozlišča do samega sebe enaka nič, razdalja drugega vozlišča do njega pa je pozitivna. Če sta obe vozlišči izven množice W , sta nujno oblike v_{2k+1} in $v_{2\ell+1}$, kjer je $k \neq \ell$. Vzemimo vozlišče $w = v_{2k+2} \pmod n \in W$. Ker je v_{2k+1} neposredni predhodnik vozlišča w , velja

$$d(w, v_{2k+1}) = 2.$$

Po drugi strani je $v_{2\ell+1}$ edino vozlišče, ki je od w oddaljeno dve. Ker je $v_{2\ell+1} \neq v_{2k+1}$, dobimo

$$d(w, v_{2\ell+1}) = 1.$$

Torej vozlišče w razloči vozlišči v_{2k+1} in $v_{2\ell+1}$. S tem smo pokazali, da imata poljubni dve vozlišči grafa različni metrični reprezentaciji glede na množico W . Torej množica W razreši graf in dobimo $\dim(C(n, n-2)) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Predpostavimo sedaj, da je n liho. Tedaj zapišemo $n = 2m + 1$. Izberimo množico

$$W = \{v_1, v_3, v_5, \dots, v_{2m-1}\},$$

torej vsa liha vozlišča. Ker je med n vozlišči natanko m lihih vozlišč, velja $|W| = m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Naj bo $u \neq v$ poljuben par vozlišč. Če je vsaj eno izmed vozlišč u in v vsebovano v množici W , potem se podobno kot prej njuni metrični reprezentaciji glede na W razlikujeta v koordinati, ki ustreza temu vozlišču, saj je razdalja vozlišča do samega sebe enaka nič, razdalja drugega vozlišča do njega pa je pozitivna. Ostane primer, ko sta obe vozlišči izven množice W . Ker W vsebuje vsa liha vozlišča, sta tedaj vozlišči nujno oblike $u = v_{2k}, v = v_{2\ell}$, kjer je $k \neq \ell$. Izberimo vozlišče $w = v_{2k+1} \pmod n \in W$. Ker je v grafu $C(n, n-2)$ edino vozlišče, ki je od w oddaljeno dve, njegov neposredni predhodnik, velja

$$d(w, v_{2k}) = 2.$$

Ker je $v_{2\ell} \neq v_{2k}$, vozlišče $v_{2\ell}$ ni neposredni predhodnik vozlišča w . Torej velja

$$d(w, v_{2\ell}) = 1.$$

Torej vozlišče w razloči vozlišči v_{2k} in $v_{2\ell}$, kar pomeni, da imata različni metrični reprezentaciji glede na množico W . S tem smo pokazali, da množica W razreši graf $C(n, n-2)$ in velja $\dim(C(n, n-2)) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Sedaj pokažimo še spodnjo mejo. Tukaj ne rabimo ločevati primerov, glede na sodost oz. lihost n . Predpostavimo, da obstaja solventna množica S z

$$|S| < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.$$

Razdelimo vozlišča v $\lfloor n/2 \rfloor$ disjunktnih parov zaporednih vozlišč: $(v_0, v_1), (v_2, v_3), \dots$ (pri lihih n ostane eno vozlišče neparjeno). Ker je $|S| < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, ni dovolj elementov, da bi vsak tak par vseboval vsaj eno vozlišče iz S . Zato obstaja par zaporednih vozlišč v_i in v_{i+1} , ki ne pripadata množici S . V grafu $C(n, n-2)$ je vsako vozlišče povezano z vsemi ostalimi vozlišči razen s svojim neposrednim predhodnikom. Ker $v_i, v_{i+1} \notin S$, za vsak $s \in S$ velja:

- če je $s = v_{i-1}$, potem je

$$d(s, v_i) = 1 \quad \text{in} \quad d(s, v_{i+1}) = 1;$$

- za vsak drug $s \in S$ je s neposredno povezan z obema vozliščema v_i in v_{i+1} , zato je

$$d(s, v_i) = d(s, v_{i+1}) = 1.$$

Torej za vsak $s \in S$ velja $d(s, v_i) = d(s, v_{i+1})$, od koder sledi $r(v_i | S) = r(v_{i+1} | S)$.

To je v nasprotju s predpostavko, da je S solventna množica. Zato mora veljati

$$|S| \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Od tod zaključimo:

$$\dim(C(n, n-2)) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \quad \blacksquare$$

V nadaljevanju obravnavamo zgornjo mejo za metrično dimenzijo poljubnih v smeri urinega kazalca usmerjenih cirkulantnih grafov. Če opazujemo Sliko 1, opazimo, da je za usmerjene cirkulantne grafe $C(n, d)$ z $d < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ta meja pogosto blizu dejanski vrednosti metrične dimenzije, v številnih primerih pa je celo dosežena.

Trditev 19 (Zgornja meja). Za poljubna n in d velja

$$\dim(C(n, d)) \leq d.$$

Posledično velja tudi $\dim(C(n, d)) \leq n-1$.

Dokaz. Naj bo $W = \{0, 1, \dots, d-1\}$. Pokazali bomo, da množica W razreši graf $C(n, d)$. Od tod bo sledilo $\dim(C(n, d)) \leq |W| = d$ in ker je $d \leq n-1$ tudi $\dim(C(n, d)) \leq n-1$.

Vsako vozlišče $v \in V(C(n, d))$ lahko enolično zapišemo v obliki $v = qd + r$, kjer velja

$$q = \left\lfloor \frac{v}{d} \right\rfloor, \quad 0 \leq r \leq d-1.$$

Torej je vsako vozlišče določeno s kvocientom q in ostankom r . Po trditvi 15 v grafu $C(n, d)$ za vsak $j \in W$ in vsak $v \in V(C(n, d))$ velja

$$d(j, v) = \left\lceil \frac{\Delta(j, v)}{d} \right\rceil = \left\lceil \frac{(v-j) \bmod n}{d} \right\rceil.$$

Naj bo $v = qd + r$.

Najprej obravnavajmo primer $v \in W$. Tedaj je $q = 0$ in $v = r$. Ker je razdalja vozlišča do samega sebe enaka nič, velja $d(v, v) = 0$. Po drugi strani pa za vsako vozlišče $u \in V(C(n, d))$, $u \neq v$ velja $d(u, v) > 0$. Zato ima metrična reprezentacija vozlišča v v koordinati, ki ustreza vozlišču v , vrednost nič, medtem ko ima metrična reprezentacija vsakega drugega vozlišča v isti koordinati pozitivno vrednost. Sledi, da se metrična reprezentacija vozlišča v razlikuje od metrične reprezentacije kateregakoli drugega vozlišča.

Predpostavimo sedaj, da $v \notin W$. Tedaj je $q \geq 1$. Ker za vsak $j \in W$ velja $0 \leq j \leq d-1$, dobimo

$$v - j = qd + (r - j) > 0.$$

Zato je

$$(v - j) \bmod n = v - j,$$

in lahko zapišemo

$$d(j, v) = \left\lceil \frac{v - j}{d} \right\rceil.$$

Ločimo dva primera.

$j < r$: Tedaj je $v - j = qd + (r - j)$, kjer velja $1 \leq r - j \leq d - 1$. Zato

$$d(j, v) = \left\lceil \frac{qd + (r - j)}{d} \right\rceil = q + 1.$$

$j \geq r$: Tedaj je $v - j = qd - (j - r)$, kjer velja $0 \leq j - r \leq d - 1$. Dobimo

$$d(j, v) = \left\lceil \frac{qd - (j - r)}{d} \right\rceil = q.$$

Sledi, da je metrična reprezentacija vozlišča v glede na množico W oblike

$$r(v|W) = (\underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_r, \underbrace{q, \dots, q}_{d-r}).$$

Torej je vektor popolnoma določen s parom (q, r) .

Naj bo sedaj $u = q_2d + r_2$ poljubno vozlišče. Če velja $q \neq q_2$, potem se vse koordinate njunih metričnih reprezentacij razlikujejo za vsaj ena, zato $r(v|W) \neq r(u|W)$. Če pa velja $q = q_2$ in $r \neq r_2$, potem se mesto prehoda med vrednostma q in $q + 1$ pojavi v različnih koordinatah, zato sta metrični reprezentaciji ponovno različni. V obeh primerih dobimo

$$r(v|W) \neq r(u|W),$$

zato množica W razreši graf $C(n, d)$. Sledi

$$\dim(C(n, d)) \leq |W| = d. \quad \blacksquare$$

V nadaljevanju predstavimo splošno spodnjo mejo za metrično dimenzijo, ki velja za poljubne $C(n, d)$. Dobljena spodnja meja je precej groba in ne upošteva posebne strukture cirkulantnih grafov, zato v številnih primerih ne omogoča natančne ocene metrične dimenzije. Vseeno pa zagotavlja koristno informacijo o najmanjšem možnem številu vozlišč v solventni množici.

Trditev 20 (Spodnja meja). Naj bo $C(n, d)$ v smeri urinega kazalca usmerjen cirkulantni graf. Potem velja

$$\dim(C(n, d)) \geq \left\lceil \log_{\left(\lceil \frac{n-1}{d} \rceil + 1\right)}(n) \right\rceil.$$

Dokaz. Naj bo $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ množica vozlišč, ki razreši graf $C(n, d)$, in naj bo $|W| = k$. Metrično reprezentacijo poljubnega vozlišča $v \in V(C(n, d))$ zapišemo kot

$$r(v|W) = (d(w_1, v), d(w_2, v), \dots, d(w_k, v)).$$

Ker množica W razreši graf, so metrične reprezentacije vseh vozlišč med seboj različne. Naj bo $D = \text{diam}(C(n, d))$. Po definiciji premera za vsak par vozlišč $u, v \in V(C(n, d))$ velja $d(u, v) \leq D$. Zato lahko vsaka koordinata metrične reprezentacije zavzame le eno izmed vrednosti $0, 1, \dots, D$. Ker lahko vsaka izmed k koordinat zavzame največ $D + 1$ različnih vrednosti, je skupno število različnih metričnih reprezentacij največ $(D + 1)^k$. Ker je v grafu n vozlišč in morajo ta med seboj imeti različne metrične reprezentacije, mora veljati

$$n \leq (D + 1)^k.$$

Po logaritmiranju z osnovo $D + 1$ dobimo

$$\log_{D+1}(n) \leq k.$$

Ker je k celo število, sledi

$$k \geq \lceil \log_{D+1}(n) \rceil.$$

Ker neenakost velja za vsako solventno množico, velja tudi za najmanjšo solventno množico. Zato

$$\dim(C(n, d)) \geq \lceil \log_{D+1}(n) \rceil.$$

Če uporabimo trditev 16 o premeru grafa $C(n, d)$, dobimo $D = \lceil \frac{n-1}{d} \rceil$, od koder sledi

$$\dim(C(n, d)) \geq \left\lceil \log_{(\lceil \frac{n-1}{d} \rceil + 1)} n \right\rceil. \quad \blacksquare$$

4. Zaključek

V članku smo obravnavali metrično dimenzijo v smeri urinega kazalca usmerjenih cirkulantnih grafov $C(n, d)$. S pregledom metričnih dimenzij vseh grafov $C(n, d)$ za $n \leq 40$ smo opazili linearno naraščanje metrične dimenzije pri fiksnem n in $d \leq n/2$. Pridobljeni rezultati kažejo, da je metrična dimenzija grafov $C(n, d)$ močno odvisna od parametra d . Za primer usmerjenega cikla $C(n, 1)$ smo pokazali, da za razločljivost zadošča že eno samo vozlišče, za grafe $C(n, 2)$ dve vozlišči, za grafe $C(n, n-1)$ pa potrebujemo v solventni množici vsaj $n-1$ vozlišč. Pokazali smo tudi, da je za $n \leq 3$ metrična dimenzija grafa $C(n, n-2)$ enaka $\lfloor n/2 \rfloor$. Poleg tega smo izpeljali splošno spodnjo mejo za metrično dimenzijo poljubnih grafov $C(n, d)$, ki omogočajo oceno najmanjše velikosti solventne množice. Poleg tega smo pokazali, da za metrično dimenzijo poljubnega grafa $C(n, d)$ velja zgornja meja $\dim(C(n, d)) \leq d$.

Dobljeni rezultati kažejo, da je mogoče zaradi izrazite simetrije cirkulantnih grafov v nekaterih primerih metrično dimenzijo določiti eksplicitno, kljub splošni računski zahtevnosti problema. Hkrati pa ostaja določitev metrične dimenzije za splošne grafe $C(n, d)$ odprt problem. Naravna smer nadaljnjega raziskovanja je izboljšanje dobljenih splošnih mej ter določitev natančne metrične dimenzije za širše razrede usmerjenih cirkulantnih grafov.

LITERATURA

- [1] P. J. Slater, *Leaves of trees*, Congressus Numerantium **14** (1975), 549–559.
- [2] F. Harary in R. A. Melter, *On the metric dimension of a graph*, Ars Combinatoria **2** (1976), 191–195.
- [3] S. Khuller, B. Raghavachari in A. P. Rosenfeld, *Landmarks in graphs*, Discrete Applied Mathematics **70** (1996), 217–229.
- [4] D. Kuziak in I. G. Yero, *Metric dimension related parameters in graphs: A survey on combinatorial, computational and applied results*, arXiv preprint arXiv:2107.04877 (2021).
- [5] M. R. Garey in D. S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, California, 1979.
- [6] B. Rajan, I. Rajasingh, J. A. Cynthia in P. Manuel, *Metric dimension of directed graphs*, Int. J. Comput. Math. **91** (2014), no. 7, 1397–1406. Zbl 1305.05090. doi: 10.1080/00207160.2013.844335.
- [7] T. Vetrík, *On the metric dimension of directed and undirected circulant graphs*, Discuss. Math. Graph Theory **40** (2020), no. 1, 67–76. Zbl 1437.05114.