

TOPOLOGIJA ZA KROJAČE (ALI KAKO PLOSKEV RAZREZATI NA HLAČE)

LUKA LJEVAR

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

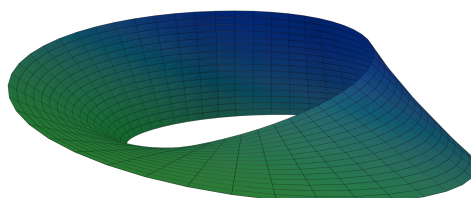
V tem članku bo predstavljeno, kako lahko nekatere orientabilne ploskve razrežemo na komponente, homeomorfne sferi s tremi luknjami (oziroma hlačam). Ključno vlogo bodo imeli rezni sistemi, ki povedo, kako razrezati ploskev. Nato bodo predstavljene dekompozicije ploskev. To so množice komponent, na katere rezni sistem razreže ploskev. Nekaj več bo povedanega o hlačah. To so ploskve, homeomorfne sferi s tremi luknjami. Podrobneje bo predstavljen poseben primer dekompozicij – hlačne dekompozicije. To so dekompozicije, pri katerih je vsaka komponenta homeomorfna hlačam. Povedano bo, za katere orientabilne ploskve hlačne dekompozicije sploh obstajajo. Nato bo pokazano, kako lahko hlačni dekompoziciji priredimo multigraf, oziroma kako hlačno dekompozicijo „zakodirati“ z multigrafom. Nato bodo predstavljeni premiki. To so načini za prehajanje med različnimi hlačnimi dekompozicijami dane ploskve. Na koncu bosta dokazana ključna rezultata, ki zagotovita, da so premiki dobro definirani, tj. premiki iz hlačne dekompozicije vedno dajo novo hlačno dekompozicijo.

HOW TO CUT A SURFACE INTO PANTS

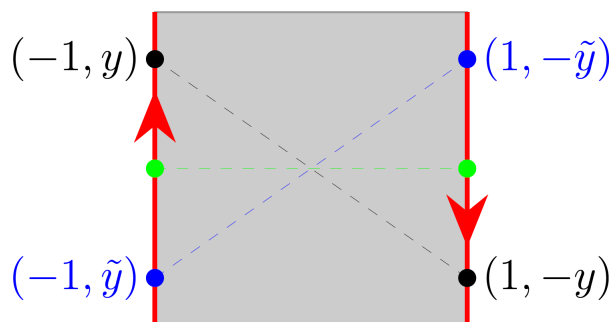
In this article, it will be shown how some orientable surfaces can be cut into components, homeomorphic to a sphere with three holes (also known as a pair of pants). Cuttings of surfaces will be discussed. Cut systems will have a crucial role here. Cut systems tell us how to cut the surface. Then the decompositions of surfaces will be considered. Those are sets of components into which the cut system cuts our surface. A surface, known as pants, will be presented next. Those are surfaces homeomorphic to a sphere with three holes. Then, the focus will be shifted to a special type of decomposition, namely pants decompositions. Those are decompositions, where every component is homeomorphic to a pair of pants. It will be shown for which orientable surfaces pants decompositions exist. Then, a method for assigning a multigraph to a pants decomposition will be presented. Conversely, it will be shown how a pants decomposition can be „encoded“ with a multigraph. Then the moves will be presented. Those are ways to move between different pants decompositions of the given surface. In the end, two essential results that ensure the well-definedness of moves will be proven, i.e., the moves always give us a new pants decomposition.

1. Orientabilne ploskve

Preučevali bomo orientabilne ploskve, ki jih bomo rezali na komponente, homeomorfne sferi s tremi luknjami. V definiciji orientabilnosti ploskve ima ključno vlogo Möbiusov trak, ki je prikazan na sliki 1. Möbiusov trak lahko predstavimo kot kvocient kvadrata $[-1, 1]^2$, pri katerem za vsak $y \in [-1, 1]$ točko $(-1, y)$ izenačimo s točko $(1, -y)$, kot je prikazano na sliki 2.



Slika 1. Möbiusov trak, [1].

Slika 2. Möbiusov trak kot kvocient kvadrata $[-1, 1]^2$.

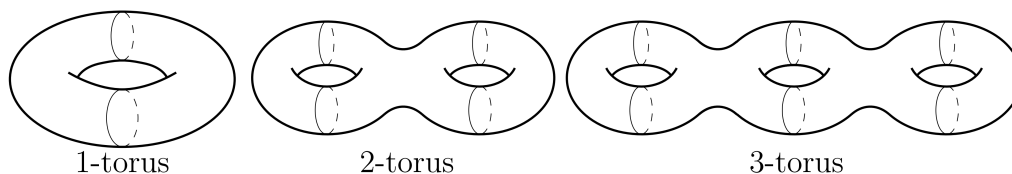
Definicija 1. Ploskev je povezana mnogoterost razsežnosti 2. Drugače povedano je ploskev povezan, 2-števen in Hausdorffov prostor, v katerem ima vsaka točka okolico homeomorfno $\mathbb{R}^2$ ali $\mathbb{R} \times [0, \infty)$. Ploskev je **sklenjena**, če je kompaktna in ima vsaka točka okolico homeomorfno $\mathbb{R}^2$. Ploskev je **orientabilna**, če vanjo ne moremo vložiti Möbiusovega traku.

Zabeležimo še pomembno dejstvo glede orientabilnih ploskev. Izkaže se, da lahko sklenjene orientabilne ploskve do homeomorfizma natančno klasificiramo na naslednji način.

Izrek 2 (Klasifikacijski izrek, [2]). Vsaka sklenjena orientabilna ploskev je homeomorfna

- bodisi sferi S^2 ,
- bodisi n -torusu nT (za neki $n \in \mathbb{N}$).

Ploskve iz zgornjega seznama so paroma nehomeomorfne.

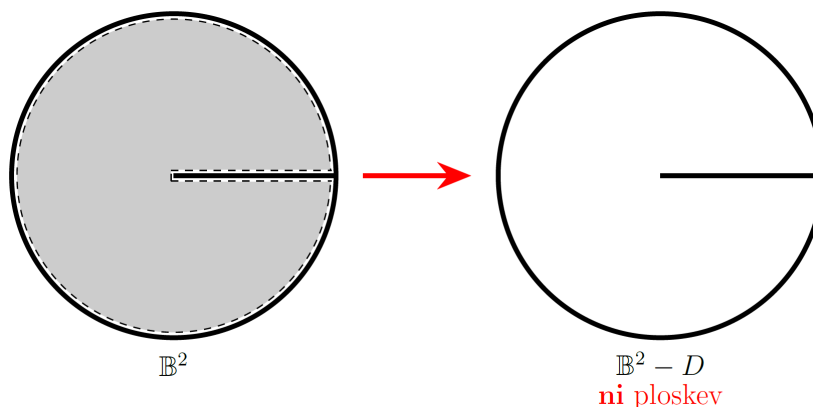


Slika 3. 1-torus, 2-torus in 3-torus.

Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Opišimo konstrukcijo n -torusa. Standardnemu torusu, to je ploskvi homeomorfni $S^1 \times S^1$ bomo rekli 1-torus. Denimo, da je $n \geq 2$. Podajmo induktivno konstrukcijo n -torusa iz $(n-1)$ -torusa in torusa. Naj bo $D \subset (n-1)T$ podmnožica $(n-1)$ -torusa, homeomorfna disku $\mathbb{B}^2$. Naj bo $E \subset T$ podmnožica torusa, homeomorfna disku $\mathbb{B}^2$. Oglejmo si $(n-1)T - \text{int } D$ ter $T - \text{int } E$. Obe imata natanko eno robno komponento, homeomorfno S^1 . Naj bo $\partial((n-1)T - \text{int } D)$ robna komponenta $(n-1)T - \text{int } D$ in naj bo $\partial(T - \text{int } E)$ robna komponenta $T - \text{int } E$. Velja $\partial((n-1)T - \text{int } D) \approx S^1 \approx \partial(T - \text{int } E)$. Naj bo $\varphi : \partial((n-1)T - \text{int } D) \rightarrow \partial(T - \text{int } E)$ homeomorfizem. Zlepek $((n-1)T - \text{int } D) \cup_{\varphi} (T - \text{int } E)$ označimo z nT in mu pravimo n -torus.

Iz sklenjenih orientabilnih ploskev lahko dobimo poljubne kompaktne orientabilne ploskve tako, da prvim odstranimo odprte diske z disjunktnimi zaprtji. Pri odstranjevanju diskov pa moramo biti previdni, sicer se lahko zgodi, da rezultat ni ploskev. Na primer, disk $\mathbb{B}^2$, ki mu odstranimo odprti topološki disk $D = \mathbb{B}^2 - (S^1 \cup ([0, 1] \times \{0\}))$, ni ploskev, saj nobena točka nima okolice homeomorfne $\mathbb{R}^2$ ali $\mathbb{R} \times [0, \infty)$. Še več, ljubitelji geometrijske topologije bodo opazili, da $\mathbb{B}^2 - D$

ni niti mnogoterost¹.



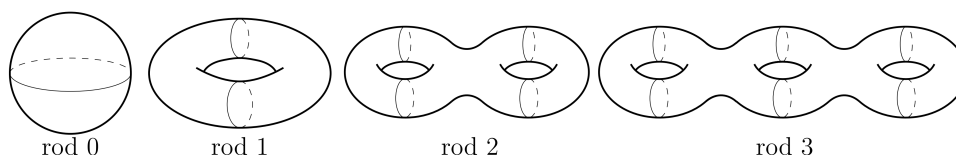
Slika 4. Pri odstranjevanju odprtih diskov iz ploskev moramo biti previdni, saj dobljeni rezultat ni nujno ploskev.

Opomba 3. V nadaljevanju bomo vedno predpostavili, da so bili diski odstranjeni tako, da je rezultat **še vedno ploskev**. To storimo tako, da v notranjost ploskve vložimo končno disjunktno unijo zaprtih diskov. Nato ploskvi odstranimo notranjost slike te vložitve.

Povedano po domače, kompaktna orientabilna ploskev je homeomorfna sferi ali n -torusu, v katero/katerega lahko izvrtamo še nekaj lukenj. Na primer, disk $\mathbb{B}^2$ je homeomorfen sferi, v katero smo izvrtali eno luknjo.

Opomba 4. Vedno, ko bomo rekli „torus“, bomo seveda imeli v mislih plašč torusa.

Pomemben pojem pri študiju ploskev je njihov **rod**. Namesto podajanja natančne definicije si oglejmo nekaj risbic, ki prikazujejo orientabilne ploskve rodov 0, 1, 2 in 3.



Slika 5. Ploskve rodov 0, 1, 2 in 3.

Po domače, v primeru orientabilnih ploskev nam rod pove, „*koliko torusov smo staknili skupaj*“. Rod kompaktne ploskve je določen z rodом pripadajoče sklenjene ploskve, iz katere smo kompaktno ploskev dobili z odstranitvijo nekaj diskov.

Dokaz izreka 2 opuščamo. Podroben dokaz se nahaja v [2]. Omenimo zgolj, da v dokazu igra pomembno vlogo **Eulerjeva karakteristika**. Za orientabilno ploskev roda g z n robnimi komponentami je slednja enaka $2 - 2g - n$.

Naj $\Sigma_{g,n}$ označuje orientabilno ploskev roda g , ki smo ji odstranili n odprtih diskov z disjunktными zaprtji. Drugače povedano, $\Sigma_{g,n}$ je g -torus (0-torus $\equiv$ sfera), v katerega smo izvrtali n lukenj.

¹Namig: Nagaja nam točka $(1, 0) \in \mathbb{B}^2 - D$.

2. Rezni sistemi

Od sedaj naprej vedno privzemamo, da S označuje orientabilno ploskev.

Za začetek se vprašamo, kako bomo ploskev rezali. Ideja je, da ploskev S razrežemo vzdolž krožnic, vloženih v notranjost ploskve. Zato se je potrebno najprej vprašati, kaj sploh je krožnica na ploskvi.

2.1 Krožnice in izotopije krožnic

Definicija 5. Krožnica na ploskvi S je vložitev $a : S^1 \rightarrow \text{int } S$.

Opomba 6. Oznaka $\text{int } S$ označuje notranjost ploskve S . To je množica vseh točk na ploskvi S , ki imajo okolico homeomorfno $\mathbb{R}^2$. Na primer, odprti disk $\text{Int } \mathbb{B}^2$ je notranjost ploskve $\mathbb{B}^2$.

Opomba 7. Pogosto bomo krožnico a na ploskvi S (tj. vložitev $a : S^1 \rightarrow \text{int } S$) identificirali z njeno sliko $a(S^1)$. Namesto o preslikavi bomo torej razmišljali o podmnožici ploskve S .

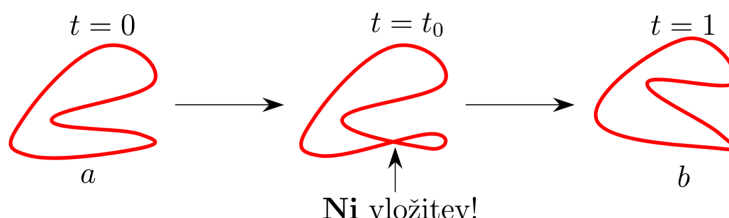
Vprašali se bomo, kdaj sta dve krožnici „podobni“. Možen odgovor da naslednja definicija.

Definicija 8. Krožnici $a, b : S^1 \rightarrow \text{int } S$ na ploskvi S sta **izotopni**, če med a in b obstaja **izotopija**. To je zvezna preslikava $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow \text{int } S$, za katero velja:

1. $H(z, 0) = a(z)$ za vse $z \in S^1$,
2. $H(z, 1) = b(z)$ za vse $z \in S^1$,
3. $H(\cdot, t_0) : S^1 \rightarrow \text{int } S$ je vložitev za poljuben $t_0 \in [0, 1]$.

Mislimo si, da interval $[0, 1]$ predstavlja časovni interval. Tretja točka iz definicije 8 zahteva, da je ob vsakem času t_0 tudi $H(\cdot, t_0) : S^1 \rightarrow \text{int } S$ krožnica. Torej krožnico a zvezno deformiramo do krožnice b , pri čemer imamo ob vsakem času krožnico. Protiprimer preslikave, ki ni izotopija krožnic, je shematično ponazorjen na sliki 6.

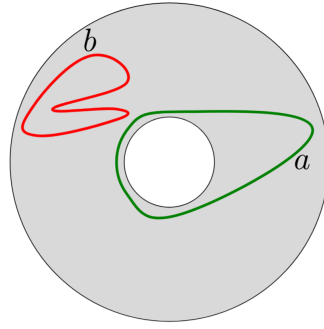
Primer 9. Prikazana preslikava ni izotopija krožnic a in b , saj ob času $t = t_0$ nimamo krožnice ($H(\cdot, t_0)$ ni vložitev).



Slika 6. Prikazana preslikava ni izotopija krožnic a in b .

Primer 10. Slika 7 prikazuje primer krožnic na kolobarju $S (\approx S^1 \times [0, 1])$, ki nista izotopni. Lahko si mislimo, da nam luknja v sredini preprečuje, da bi krožnico a z izotopijo deformirali v krožnico b . Za natančen dokaz tega bi uporabili fundamentalno grupo. Pred tem pa potrebujemo lemo 11.

Topologija za krojače
(ali kako ploskev razrezati na hlače)



Slika 7. Neizotopni krožnici na kolobarju.

Lema 11. Naj bo $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow \text{int } S$ izotopija krožnic. Potem sta zanki

$$\begin{aligned} \alpha : [0, 1] &\rightarrow \text{int } S \\ \alpha : t &\mapsto H(\exp(2\pi it), 0) \quad \text{in} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta : [0, 1] &\rightarrow \text{int } S \\ \beta : t &\mapsto \begin{cases} H(1, 3t); & \text{za } t \in [0, \frac{1}{3}] \\ H(\exp(2\pi i(3t-1)), 1); & \text{za } t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ H(1, 3-3t); & \text{za } t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

homotopni relativno na $\{0, 1\}$. To pomeni, da obstaja zvezna preslikava $\tilde{H} : I \times I \rightarrow \text{int } S$, da je $\tilde{H}(\cdot, 0) = \alpha$, $\tilde{H}(\cdot, 1) = \beta$ ter za vsak $s \in [0, 1]$ velja $\tilde{H}(0, s) = \alpha(0)$ in $\tilde{H}(1, s) = \alpha(1)$.

Dokaz. Iskana preslikava $\tilde{H}$ je

$$\begin{aligned} \tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow \text{int } S \\ \tilde{H} : (t, s) &\mapsto \begin{cases} H(1, 3t); & \text{za } t \in [0, \frac{s}{3}] \\ H\left(\exp\left(2\pi i \frac{3t-s}{3-2s}\right), s\right); & \text{za } t \in [\frac{s}{3}, 1 - \frac{s}{3}] \\ H(1, 3(1-t)); & \text{za } t \in [1 - \frac{s}{3}, 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

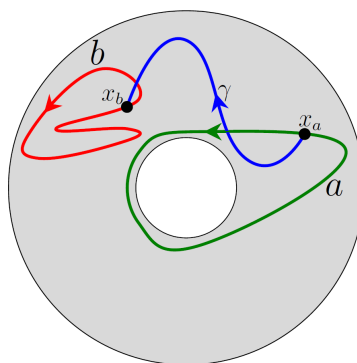
Preverjanje, da $\tilde{H}$ izpolni zelene lastnosti, prepustimo bralcu za izziv. ■

V jeziku algebraične topologije zanki α in β v lemi 11 ustrezata istemu elementu v fundamentalni grupi. Za podrobnosti o fundamentalni grupi glejte poglavje 1 v [3].

V luči slike 8, si lahko izberemo poljubno točko x_a na krožnici a in poljubno točko x_b na krožnici b . Krožnicama a in b izberemo poljubno orientacijo. Naj bo γ poljubna pot od x_a do x_b . Zanka²³ $\gamma b \bar{\gamma}$ je očitno homotopna točki, zanka a pa ustreza generatorju fundamentalne grupe $\pi_1(S, x_a) \cong \mathbb{Z}$. Zanki $\gamma b \bar{\gamma}$ in a torej nista homotopni. Iz leme 11 sledi, da krožnici a in b nista izotopni.

²Oznaka $\bar{\gamma}$ označuje pot v nasprotni smeri, t. j. $\bar{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$.

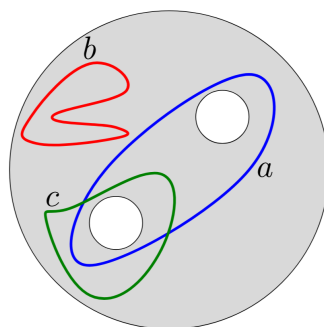
³Če sta α in β poti na S ter je konec poti α enak začetku poti β , potem je produkt poti, $\alpha\beta$ dobljen s stikom (konkatenacijo) poti α in β .

Slika 8. Zanki $\gamma b \bar{\gamma}$ in a nista homotopni.

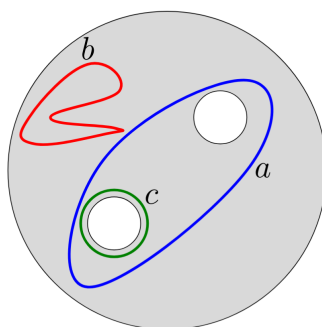
2.2 Rezni sistemi in dekompozicije

Definicija 12. **Rezni sistem** ploskve S je množica krožnic $\{a_1, \dots, a_n\}$, vloženi v notranjost ploskve S , pri čemer zahtevamo, da so $a_i(S^1)$ paroma disjunktne, tj. poljubni krožnici iz reznega sistema imata prazen presek. Krožnicam iz reznega sistema pravimo **rezne krožnice**.

Primer 13. Množica krožnic $\{a, b, c\}$ na disku z dvema luknjama na sliki 9 ni rezni sistem, saj krožnici a in c nista disjunktne.

Slika 9. Množica krožnic a, b in c ni rezni sistem.

Z izotopijami krožnic a, b in c lahko v tem primeru dosežemo, da so disjunktne. Tako dobimo rezni sistem. Primer je prikazan na sliki 10.

Slika 10. Množica krožnic a, b in c je rezni sistem.

Ogledali si bomo kose, na katere rezni sistem razreže ploskev. Začnemo s pomožno definicijo.

Definicija 14. Naj bo c krožnica na orientabilni ploskvi S . Denimo, da ima krožnica c okolico, homeomorfno $S^1 \times [-1, 1]$. Denimo, da obstaja vložitev $\varphi : S^1 \times [-1, 1] \hookrightarrow \text{int } S$, da je $\varphi(S^1 \times \{0\}) = c$.

Razrez ploskve S je ploskev (ali disjunktna unija ploskev) $S' = S - \varphi(S^1 \times (-1, 1))$. Če režemo vzdolž več krožnic naenkrat, dodatno zahtevamo, da so pripadajoče okolice krožnic, homeomorfne $S^1 \times [-1, 1]$, paroma disjunktne.

Opomba 15. Definicija 14 sicer ni povsem v duhu tega, kar počnemo, in odpre nekaj tehničnih pomislekov. Precej učbenikov se natančni definiciji razreza preprosto izogne, zato si tudi mi raje intuitivno predstavljajmo, da ploskev s škarjami razrežemo vzdolž krožnice.

V naslednji definiciji bomo krožnice iz reznega sistema razumeli kot podmnožice ploskve S .

Definicija 16. Naj bo $C = \{a_1, \dots, a_n\}$ rezni sistem na ploskvi S . **Dekompozicija** ploskve S glede na rezni sistem C je razrez ploskve S vzdolž krožnic iz reznega sistema C . Lahko si mislimo, da iterativno režemo vzdolž $a_1, \dots, a_n$.

Enostavno povedano, dekompozicija je množica „kosov“, na katere rezni sistem razreže našo ploskev.

Opomba 17. Rezni sistem C na ploskvi S enolično določa dekompozicijo.

3. Hlače

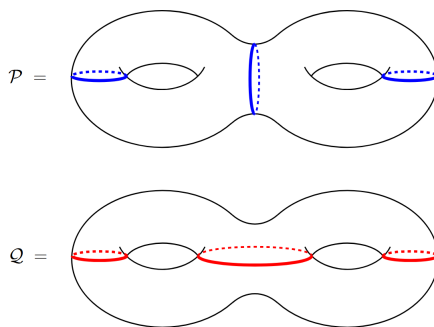
3.1 Uvod v „teorijo hlač“

Tipične hlače imajo tri luknje: eno okoli pasu in dve luknji na koncu vsake izmed dveh hlačnic – za vsako nogo ena luknja. Topološko gledano so torej hlače homeomorfne ploskvi $\Sigma_{0,3}$ – sferi s tremi luknjami. Zato bomo v nadaljevanju vsaki ploskvi, ki je homeomorfna $\Sigma_{0,3}$, ljubkovalno rekli **hlače**.

Definicija 18. Naj bo C rezni sistem na ploskvi S . Če so vse komponente dekompozicije $\mathcal{P}$ ploskve S glede na rezni sistem C homeomorfne hlačam, pravimo, da je dekompozicija $\mathcal{P}$ **hlačna dekompozicija**.

Opomba 19. V trditvi 22 bomo videli, da vse orientabilne ploskve, razen $\Sigma_{0,0}$, $\Sigma_{0,1}$, $\Sigma_{0,2}$, $\Sigma_{1,0}$ (torej razen sfere z največ dvema luknjama in torusa) dopuščajo hlačno dekompozicijo.

Pa si oglejmo primera hlačne dekompozicije na dvojnem torusu.



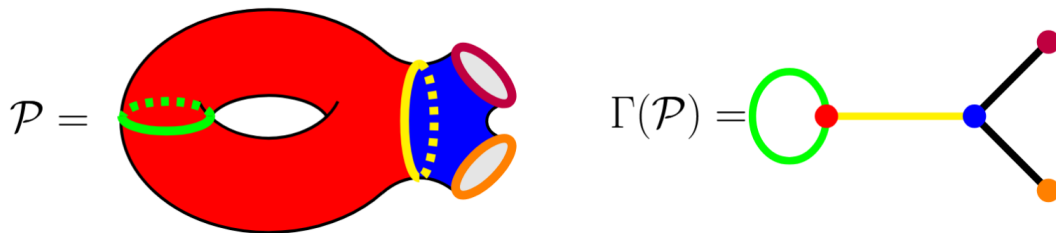
Slika 11. Primera hlačne dekompozicije na dvojnem torusu.

Definicija 20. Naj bo $\mathcal{P}$ hlačna dekompozicija ploskve S . Priredili ji bomo **multigraf** $\Gamma(\mathcal{P})$ (dovoljimo večkratne povezave in zanke) na naslednji način. Množico vozlišč multigrafa $\Gamma(\mathcal{P})$ sestavljajo

posamezne hlače iz hlačne dekompozicije in posamezne robne komponente ploskve S . Povezave multigrafa $\Gamma(\mathcal{P})$ pa ravno ustrezajo posameznim krožnicam iz reznega sistema in posameznim robnim komponentam ploskve S . V multigrafu $\Gamma(\mathcal{P})$ je dvoje hlač povezanih, če se sekajo v kakšni krožnici. Če se dvoje hlač seka v več skupnih krožnicah, dodamo večkratne povezave. Če je neka krožnica robna komponenta enim samim hlačam, kot na primer zelena krožnica na sliki 12, ustreznemu vozlišču dodamo zanko. Robna komponenta ploskve je v multigrafu povezana s hlačami, če robna komponenta seka te hlače (če je hkrati ena izmed robnih komponent teh hlač).

Vsaka povezava med vozliščema, ki pripadata hlačam, ustreza neki rezni krožnici, ki je robna komponenta obeh hlač. Tako je na primer rumena krožnica na sliki 12 hkrati robna komponenta rdečih in modrih hlač. Vsaka povezava med vozliščem, ki pripada hlačam $\mathcal{H}$, in vozliščem, ki pripada robni komponenti c ploskve S , pove, da je robna komponenta c ploskve S hkrati tudi robna komponenta hlač $\mathcal{H}$. Tako je na primer na sliki 12 oranžna robna komponenta ploskve $\Sigma_{1,2}$ hkrati tudi robna komponenta modrih hlač.

Na sliki 12 je prikazan multigraf, ki pripada narisani hlačni dekompoziciji $\mathcal{P}$ ploskve $\Sigma_{1,2}$. Barve namigujejo, katerim hlačam oziroma kateri krožnici pripada katero vozlišče oziroma povezava.



Slika 12. Hlačni dekompoziciji prirejeni multigraf $\Gamma(\mathcal{P})$.

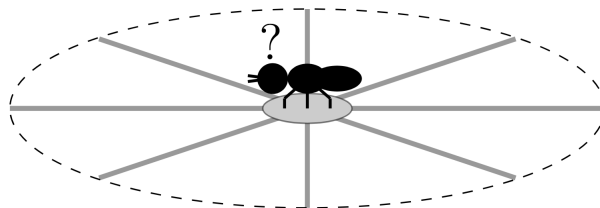
Ker zelena krožnica z obeh strani seka le rdeče hlače, ima v prirejenem multigrafu rdeče vozlišče zanko. Rdeče in modre hlače se sekajo v rumeni krožnici. Zato med rdečim in rumenim vozliščem v prirejenem multigrafu poteka natanko ena (rumena) povezava. Ploskev ima tudi dve robni komponenti (vijolično in oranžno). Obe sta robni komponenti modrih hlač, zato sta v prirejenem multigrafu vijolično in oranžno vozlišče povezani z modrim.

Definicija 21. Naj bo Γ multigraf in v njegovo vozlišče. **Stopnja** vozlišča v je število povezav, ki potekajo iz vozlišča v , pri čemer n -kratne povezave štejemo n -krat in zanke štejemo dvakrat.

Tako smo posplošili pojem „stopnja vozlišča“ za multigrafe, kjer večkratne povezave štejemo z njihovo večkratnostjo, zanke pa štejemo dvakrat, saj se dvakrat „dotaknejo“ vozlišča.

V luči definicije 21 si lahko predstavljamo slabovidno mravljico (glejte sliko 13), ki stoji na vozlišču in vidi le „lokalno dogajanje“, torej koliko „črt“ poteka iz vozlišča. Ne vidi pa, ali gre morda za zanke ali večkratne povezave.

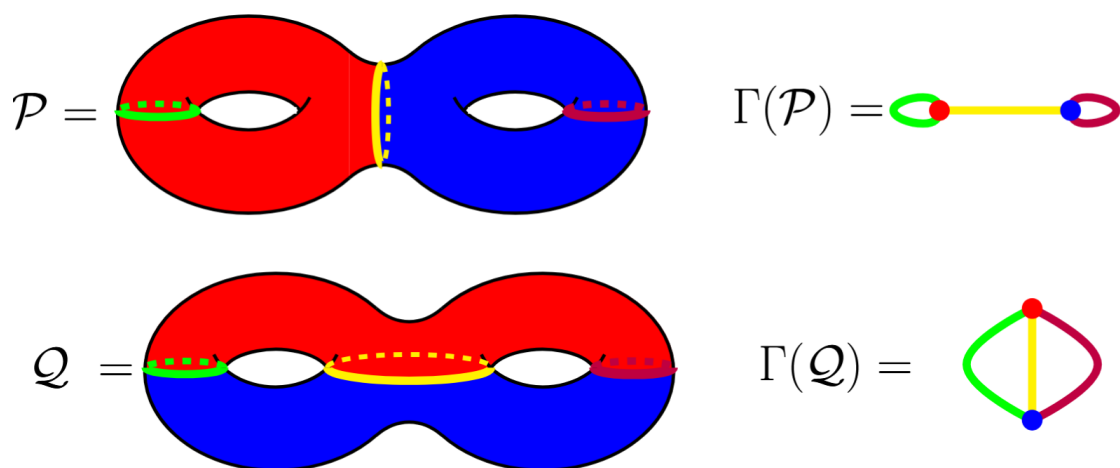
Topologija za krojače
(ali kako ploskev razrezati na hlače)



Slika 13. Število „črt“, ki jih vidi mravljica, je stopnja vozlišča.

Opazimo, da imajo vozlišča, ki ustrezajo hlačam, stopnjo 3, vozlišča, ki pripadajo robnim komponentam, pa imajo stopnjo 1.

Različne hlačne dekompozicije iste ploskve nam lahko dajo različne (celo neizomorfne!) multigrafe. Primer je podan na sliki 14.



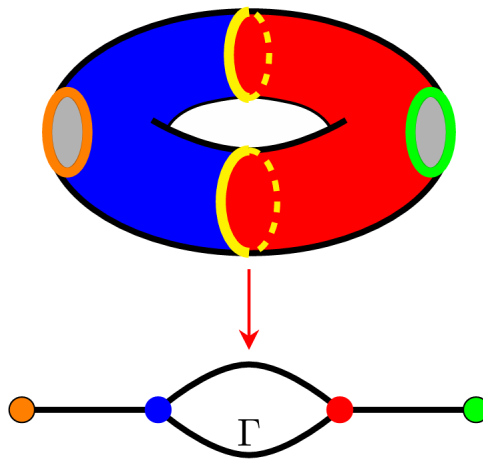
Slika 14. Različne hlačne dekompozicije nam lahko dajo različne multigrafe.

Poljuben povezan multigraf, ki vsebuje natanko vozlišča stopnje 1 in vozlišča stopnje 3, podaja navodila, kako hlače zlepit skupaj (torej, kako storiti obratno od hlačne dekompozicije). Vozlišča stopnje 1 ustrezajo robnim komponentam, vozlišča stopnje 3 pa ustrezajo hlačam. S pomočjo tovrstnih multigrafov dokažemo naslednjo trditev.

Trditev 22. Vse orientabilne ploskve, razen $\Sigma_{0,0}$, $\Sigma_{0,1}$, $\Sigma_{0,2}$, $\Sigma_{1,0}$ (torej razen sfere z največ dvema luknjama in torusa) dopuščajo hlačno dekompozicijo.

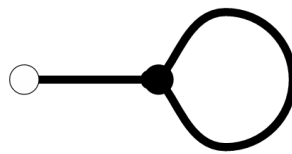
Dokaz. Da sfera z največ dvema luknjama in torus ne dopuščata hlačne dekompozicije, bomo na hitro utemeljili v razdelku 5.1, ko bomo seznanjeni s pojmom Eulerjeve karakteristike in njenimi lastnostmi.

Za začetek opazimo, da multigraf Γ na sliki 15 določa narisano hlačno dekompozicijo torusa z dvema luknjama, $\Sigma_{1,2}$.



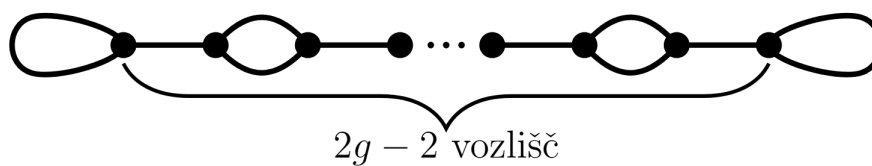
Slika 15. Hlačni dekompoziciji 1-torusa z dvema luknjama ustreza multigraf Γ .

Podobno vidimo, da multigraf na sliki 16 ustreza torusu z luknjo.



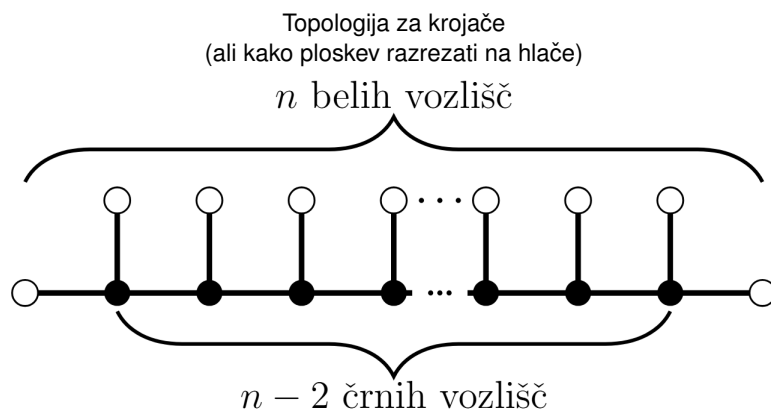
Slika 16. Multigraf na sliki ustreza torusu z luknjo $\Sigma_{1,1}$.

Naj bo $g \geq 2$. Ploskev $\Sigma_{g,0}$ lahko sestavimo iz $2g - 2$ hlač po pravilu, ki ga podaja multigraf na sliki 17. Rod je razviden iz števila vseh zank in 2-ciklov. Vsaka zanka ali 2-cikel nam rod poveča za 1. Preverjanje, da to res drži, prepuščamo bralcu v zabavo.



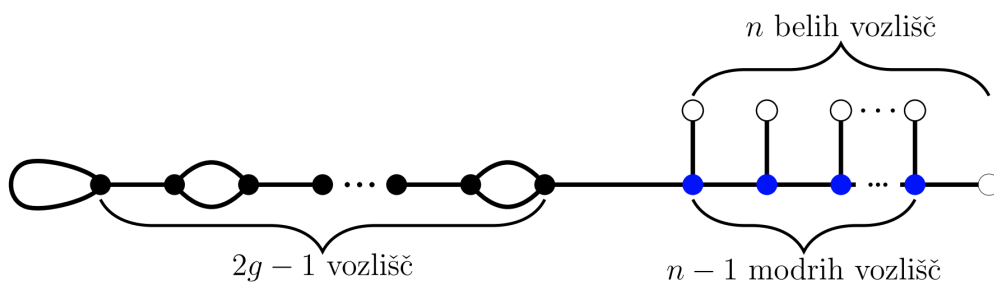
Slika 17. Multigraf hlačne dekompozicije $\Sigma_{g,0}$

Naj bo $n \geq 3$. Sfero z n luknjami lahko sestavimo po receptu, podanem z naslednjim multigrafom. Črna vozlišča predstavljajo posamezne hlače, bela vozlišča pa predstavljajo posamezne robne komponente. Ko sta na sliki 18 dve črni vozlišči povezani, to pomeni, da je ena robna komponenta prvih hlač zlepljena z eno robno komponento drugih hlač. Torej povezava med črnima vozliščema predstavlja identifikacijo dveh robnih krožnic na dvojih hlačah. Ko zlepimo dvojce hlač po eni robni komponenti, dobimo $\Sigma_{0,4}$. Vsako črno vozlišče je stopnje 3, saj imajo hlače tri robne komponente. Te povezave lahko vodijo do belega vozlišča. Tedaj je robna komponenta hlač dejanska robna komponenta ploskve. Če pa sta povezani dve črni vozlišči, je robna komponenta zlepljena z robno komponento drugih hlač.



Slika 18. Multigraf hlačne dekompozicije $\Sigma_{0,n}$

Multigraf za ploskev $\Sigma_{g,n}$ pa dobimo tako, da prejšnja grafa združimo skupaj, kot kaže slika 19. Črna vozlišča pridejo iz multigrafa za g -torus, modra in bela pa pridejo iz multigrafa za sfero z luknjami. Bela vozlišča predstavljajo robne komponente, črna in modra vozlišča pa ustrezajo hlačam. Bralcu želim obilo zabave ob igranju s temi multigrafmi.



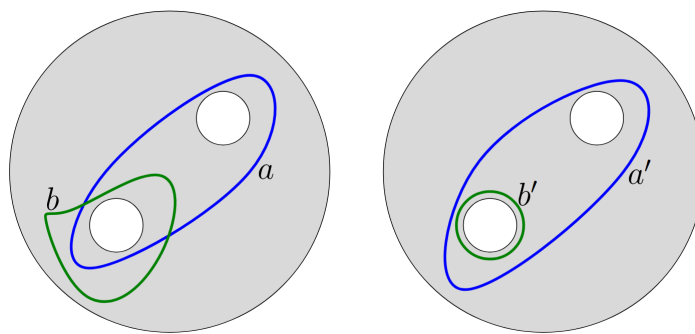
Slika 19. Multigraf hlačne dekompozicije $\Sigma_{g,n}$

■

3.2 Presečni indeks in minimalna pozicija

Za trenutek se bomo odmaknili od hlač, da uvedemo pojem, ki nam bo koristil v razdelku 3.3. Vprašali se bomo, v koliko točkah se sekata dva izotopnostna razreda krožnic na ploskvi. To vprašanje ni dobro zastavljeno, saj je odvisno od izbora predstavnikov izotopnostnih razredov na ploskvi, kot nakazuje naslednji primer.

Primer 23. Oglejmo si primer krožnic na disku z dvema luknjama. Mislimo si, da je disk z dvema luknjama en sam. Dva smo narisali zaradi večje preglednosti. Krožnici a in a' (v modrem) sta izotopni. Prav tako sta izotopni krožnici b in b' (v zelenem). Pa vendar se krožnici a in b sekata v dveh točkah, medtem ko sta krožnici a' in b' disjunktni.



Slika 20. Število presečišč je odvisno od predstavnikov izotopnostnih razredov.

Naslednja definicija bo neodvisna od izbora predstavnikov izotopnostnih razredov krožnic. V njej krožnice razumemo kot podmnožice ploskve S .

Definicija 24. Naj bosta α in β izotopnostna razreda krožnic na ploskvi S . **Presečni indeks** razredov α in β definiramo kot $i(\alpha, \beta) = \min\{|a \cap b| : a \in \alpha, b \in \beta\}$.

Torej je presečni indeks izotopnostnih razredov α in β minimalno število točk, v katerem se lahko sekata nek predstavnik razreda α in nek predstavnik razreda β .

Naslednja definicija bo ključna v naslednjem razdelku.

Definicija 25. Naj bosta a in b krožnici na ploskvi S . Naj bosta $\alpha = [a]$ in $\beta = [b]$ pripadajoča izotopnostna razreda. Krožnici a in b sta v **minimalni poziciji**, če je $|a \cap b| = i(\alpha, \beta)$.

Opomba 26. Ekvivalentno bi lahko rekli, da sta krožnici a in b v minimalni poziciji, če za poljubno krožnico a' , izotopno a in za poljubno krožnico b' , izotopno b velja: $|a \cap b| \leq |a' \cap b'|$.

Po domače, krožnici a in b sta v minimalni poziciji, če se med vsemi izotopnimi krožnicami sekata v najmanjšem možnem številu točk.

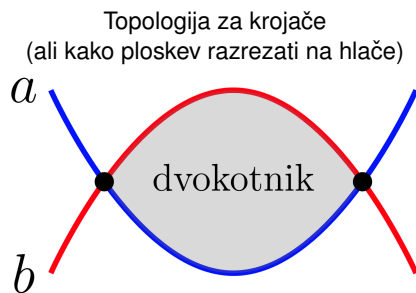
Opomba 27. Krožnici a in b iz primera 23 nista v minimalni poziciji, medtem ko krožnici a' in b' (iz istega primera) sta v minimalni poziciji.

Brez dokaza omenimo priročen kriterij, ki pove, kdaj sta krožnici na ploskvi S v minimalni poziciji. Dokaz najdemo v [4] na straneh 31–34.

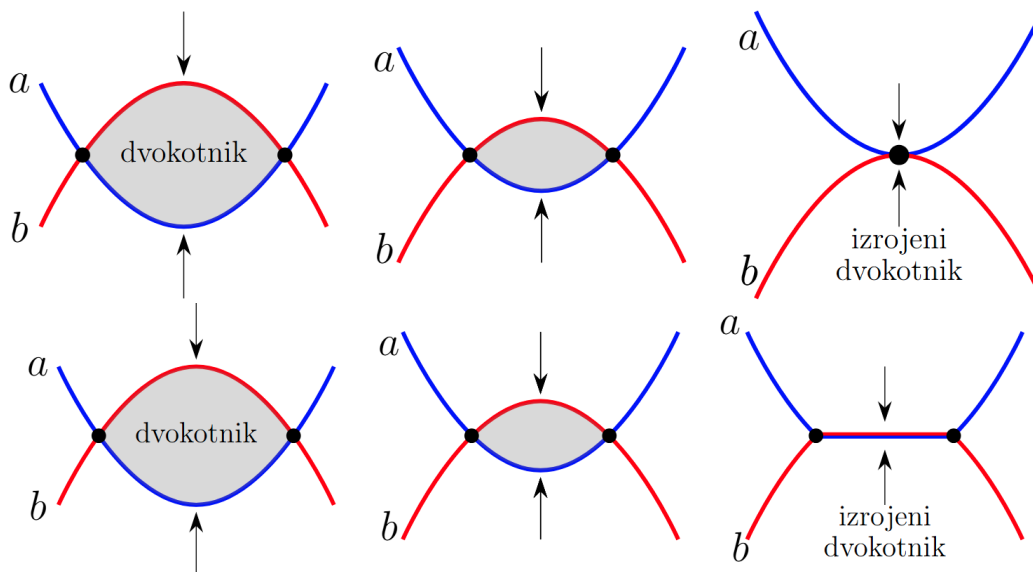
Izrek 28. (Dvokotniški kriterij)

Krožnici a in b na ploskvi S sta v minimalni poziciji natanko tedaj, ko ne omejujeta dvokotnikov ali izrojnih dvokotnikov (glejte slike 21 in 22).

Slike 21 in 22 prikazujeta dva loka a in b , ki omejujeta dvokotnik oziroma izrojni dvokotnik.



Slika 21. Dvokotnik, ki ga omeujeta ločna odseka krožnic a in b .



Slika 22. Zadnji dve sliki prikazujeta dve možnosti za izrojeni dvokotnik.

Po izreku 28 torej zadošča preveriti, če krožnici a in b omeujeta kak dvokotnik ali izrojeni dvokotnik. Če je odgovor *ne*, vemo, da sta krožnici v minimalni poziciji.

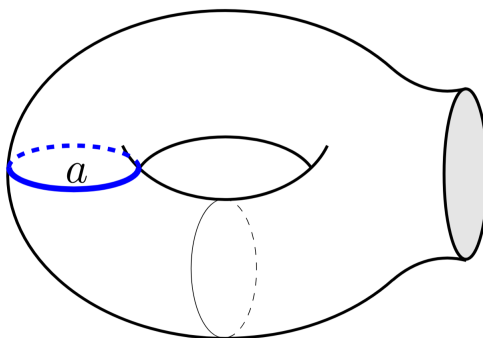
3.3 Premiki

Videli smo, da imamo na dani ploskvi možne različne hlačne dekompozicije. Spoznali bomo dva načina za prehod med različnimi dekompozicijama. Za več podrobnosti glejte [5].

Naj bo $\mathcal{P}$ hlačna dekompozicija na ploskvi S , ki jo določa rezni sistem C . Denimo, da reznemu sistemu C odvzamemo eno krožnico a . Oglejmo si dekompozicijo, ki jo določa rezni sistem $C - \{a\}$. Ločimo dva primera.

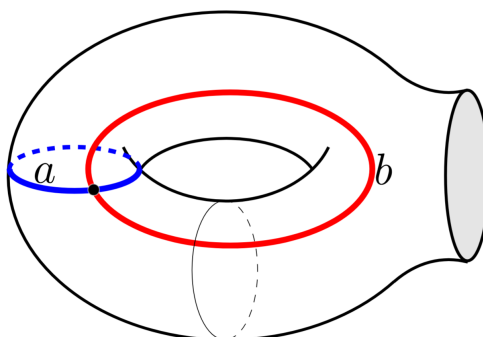
Prvi primer: Krožnica a z obeh strani seka iste hlače.

Potem smo v situaciji, ki je prikazana na sliki 23.



Slika 23. Krožnica a z obeh strani seka iste hlače.

Tedaj obstaja krožnica b (glejte sliko 24), ki seka krožnico a v natanko eni točki, ki je s krožnico a v minimalni poziciji (glejte prejšnji razdelek) in ki ne seka drugih krožnic iz reznega sistema ter ki ploskev $\Sigma_{1,1}$ prav tako razreže na kose, ki so hlače.



Slika 24. Najdemo krožnico b , ki je v ustreznem razmerju s krožnico a .

Definicija 29. Naj se krožnici $a, b : S^1 \rightarrow \text{int } S$ sekata v točki $p \in S$, tj. obstajata $p_1, p_2 \in S^1$, da je $a(p_1) = b(p_2) = p$. Krožnici a in b se v točki p sekata **transverzalno**, če obstaja odprta okolica U točke p na ploskvi S in če obstaja homeomorfizem $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, da velja:

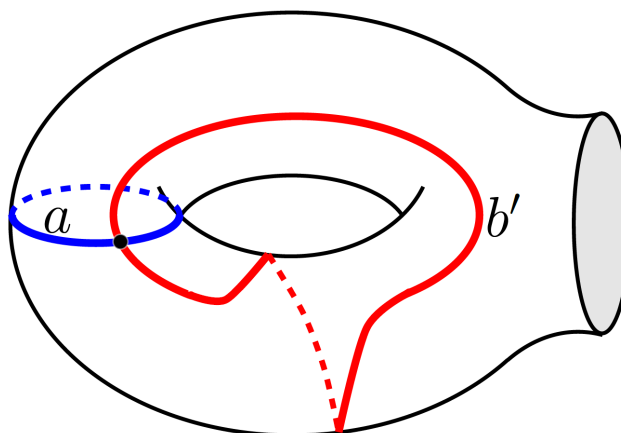
- $\varphi(p) = (0, 0)$,
- $\varphi(a(S^1) \cap U) = \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$,
- $\varphi(b(S^1) \cap U) = \{0\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$.

Opomba 30. Intuitivno to pomeni, da se krožnici a in b v točki p sekata transverzalno, če v okolici točke p lokalno izgledata kot koordinatni osi.

Krožnici a in b sta v minimalni poziciji, saj se sekata transverzalno in ne omejujeta dvokotnika ali izrojenega dvokotnika. Minimalna pozicija krožnic a in b sledi iz dvokotniškega kriterija (izrek 28).

Opomba 31. S krožnico a izotopnostni razred krožnice b ni enolično določen. Namesto krožnice b bi lahko namreč izbrali krožnico b' (na sliki 25), ki krožnici b ni izotopna. Razlog za to je podoben kot v primeru 10.

Topologija za krojače
(ali kako ploskev razrezati na hlače)



Slika 25. Namesto krožnice b bi lahko izbrali krožnico b' , ki krožnici b ni izotopna.

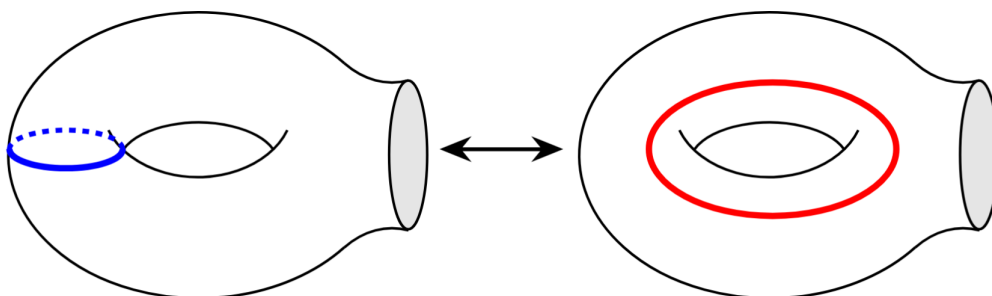
Opazimo, da če ploskev zlepimo vzdolž a in zarežemo vzdolž b , dobimo ploskev, homeomorfno $\Sigma_{0,3}$ – torej hlače. To bo natančneje utemeljeno v razdelku 4.

Krožnico a v reznem sistemu C lahko zato nadomestimo s krožnico b . Rezni sistem $(C - \{a\}) \cup \{b\}$ bo tako še zmeraj določal hlačno dekompozicijo.

Zgornji primer motivira sledečo definicijo.

Definicija 32. Naj bo C rezni sistem na ploskvi S , ki določa hlačno dekompozicijo $\mathcal{P}$ ploskve S . Naj bo $a \in C$ krožnica iz reznega sistema. Denimo, da je ena komponenta dekompozicije glede na rezni sistem $C - \{a\}$, ploskev $\Sigma_{1,1}$ (torus z eno luknjo). Naj bo b krožnica na tej ploskvi $\Sigma_{1,1}$, ki je s krožnico a v minimalni poziciji in ki seka krožnico a v natanko eni točki. Izkaže se⁴, da tudi rezni sistem $(C - \{a\}) \cup \{b\}$ določa hlačno dekompozicijo ploskve S . Prehod iz reznega sistema C na rezni sistem $(C - \{a\}) \cup \{b\}$ imenujemo **enostavni premik** ali **S-premik**.

Definicijo 32 lahko mirne duše pozabimo. Njeno bistvo namreč izvrstno ponazori slika 26.

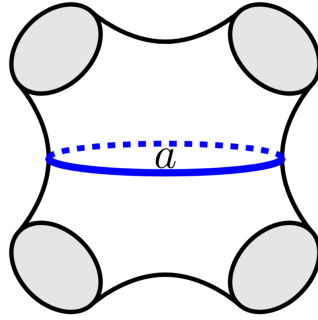


Slika 26. Enostavni ali S-premik.

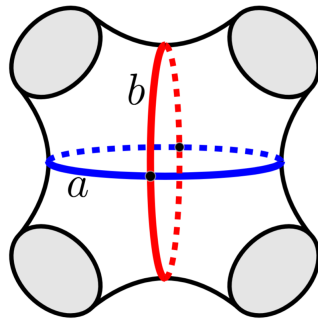
Drugi primer: Krožnica a z vsake strani seka druge hlače.

Potem smo v situaciji, ki je prikazana na sliki 27.

⁴Glejte 4. poglavje, izrek 39.

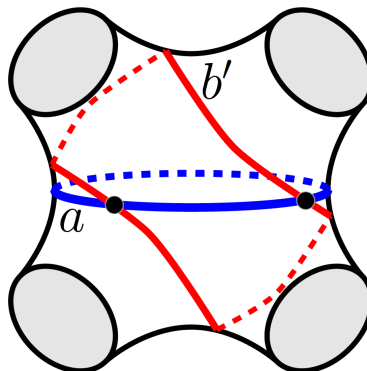
Slika 27. Krožnica a z vsake strani seka druge hlače.

Tedaj obstaja krožnica b (glejte sliko 28), ki je s krožnico a v minimalni poziciji, ki seka krožnico a v natanko dveh točkah in ki ne seka drugih krožnic iz reznega sistema ter $\Sigma_{0,4}$ prav tako razdeli na dvoje hlač.

Slika 28. Najdemo krožnico b , ki je v ustreznem razmerju s krožnico a .

Krožnici a in b sta v minimalni poziciji, saj se v obeh presečiščih sekata transversalno in ne omejujeta dvokotnika ali izrojenega dvokotnika. Minimalna pozicija krožnic a in b sledi iz dvokotniškega kriterija (izrek 28).

Opomba 33. S krožnico a izotopnostni razred krožnice b ni enolično določen. Namesto krožnice b bi lahko namreč izbrali krožnico b' (na sliki 29), ki krožnici b ni izotopna. Razlog za to je podoben kot v primeru 10.

Slika 29. Namesto krožnice b bi lahko izbrali krožnico b' , ki krožnici b ni izotopna.

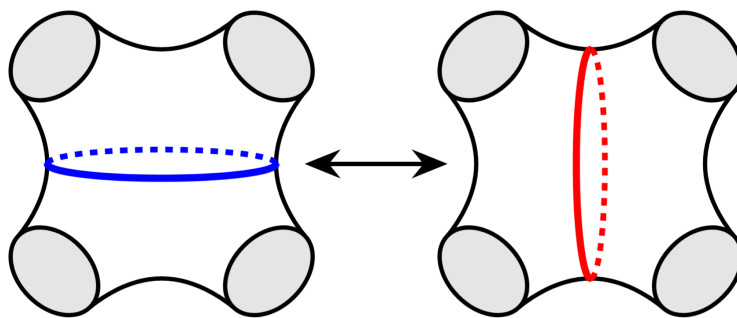
Opazimo, da če ploskev zlepimo vzdolž a in zarežemo vzdolž b , dobimo dve ploskvi, ki sta obe homeomorfni ploskvi $\Sigma_{0,3}$. Dobimo torej dvoje hlač. To bo natančneje utemeljeno v razdelku 5.

Krožnico a v reznem sistemu C lahko zato nadomestimo s krožnico b . Rezni sistem $(C - \{a\}) \cup \{b\}$ bo tako še zmeraj določal hlačno dekompozicijo.

Zgornji primer motivira naslednjo definicijo.

Definicija 34. Naj bo C rezni sistem na ploskvi S , ki določa hlačno dekompozicijo $\mathcal{P}$ ploskve S . Naj bo $a \in C$ krožnica iz reznega sistema. Denimo, da je ena komponenta dekompozicije glede na rezni sistem $C - \{a\}$, ploskev $\Sigma_{0,4}$ (sfera s štirimi luknjami). Naj bo b krožnica na tej ploskvi $\Sigma_{0,4}$, ki je s krožnico a v minimalni poziciji in ki seka krožnico a v natanko dveh točkah. Izkaže se⁵, da tudi rezni sistem $(C - \{a\}) \cup \{b\}$ določa hlačno dekompozicijo ploskve S . Prehod iz reznega sistema C na rezni sistem $(C - \{a\}) \cup \{b\}$ imenujemo **asociativnostni premik** ali **A-premik**.

Sedaj definicijo 34 veselo pozabimo in si namesto tega zgolj zapomnimo sliko 30.



Slika 30. Asociativnostni ali A-premik.

S-premik in A-premik sta tako imenovana **elementarna premika**.

Opomba 35. „Inverz“ S-premika je S-premik, „inverz“ A-premika je A-premik.

4. Rezanje $\Sigma_{1,1}$

Pri definiciji S-premikov moramo razmisliti, da krožnica b , ki izpolni pogoje iz definicije 32, prav tako razreže ploskev $\Sigma_{1,1}$ na hlače. Predstavimo idejo dokaza. Na pomoč nam priskoči Eulerjeva karakteristika χ , ki je enaka za homeomorfne ploskve. Natančna definicija se nahaja v [6] na strani 7. Za orientabilno ploskev roda g z n robnimi komponentami $(\Sigma_{g,n})$ je Eulerjeva karakteristika enaka $2 - 2g - n$. Vidimo torej, da je Eulerjeva karakteristika orientabilne ploskve navzgor omejena z 2.

Obratno, iz formule za Eulerjevo karakteristiko vidimo, da če sta ploskvi orientabilni ter imata enako Eulerjevo karakteristiko in enako število robnih komponent, potem sta homeomorfni.

Definicija 36. Naj bo C krožnica na orientabilni ploskvi S . Pravimo, da je C **delilna**, če je $S - C$ nepovezana in je **nedelilna** sicer.

Za začetek razmislimo, da je krožnica b iz definicije 32 nedelilna. Pa denimo obratno. Če bi bila b delilna, označimo s S'_1 in S'_2 komponenti $\Sigma_{1,1} - b$. Naj bosta $S_1 = S'_1 \cup b$ in $S_2 = S'_2 \cup b$ ⁶. Potem po lemi 4.8 v [6] za Eulerjevo karakteristiko velja: $\chi(\Sigma_{1,1}) = \chi(S_1) + \chi(S_2)$, oziroma $-1 = \chi(S_1) + \chi(S_2)$.

⁵Glejte 5. poglavje, izrek 42.

⁶Rob b smo dodali zato, da sta S_1 in S_2 kompaktni ploskvi, saj je za take Eulerjeva karakteristika definirana.

Ker je poleg tega Eulerjeva karakteristika vsake ploskve navzgor omejena z 2, imamo tako le nekaj možnosti (glejte tabelo 1):

1) $\chi(S_1)$	=	2	$\chi(S_2)$	=	-3
2) $\chi(S_1)$	=	1	$\chi(S_2)$	=	-2
3) $\chi(S_1)$	=	0	$\chi(S_2)$	=	-1
4) $\chi(S_1)$	=	-1	$\chi(S_2)$	=	0
5) $\chi(S_1)$	=	-2	$\chi(S_2)$	=	1
6) $\chi(S_1)$	=	-3	$\chi(S_2)$	=	2

Tabela 1. Vsi pari Eulerjevih karakteristik $\chi(S_1)$ in $\chi(S_2)$ z vsoto -1 .

Zaradi simetrije zadošča obravnavati le prve tri možnosti v tabeli 1. Pri tem nam bo koristila naslednja lema, ki je v večji splošnosti dokazana v [3] pod posledico 2B.4.

Lema 37. Naj bosta A sklenjena ploskev in S kompaktna ploskev. Denimo, da obstaja vložitev $i : A \hookrightarrow S$. Potem je $i : A \hookrightarrow S$ homeomorfizem.

Lema 37 pove, da S_1 in S_2 ne moreta biti sklenjeni, saj bi sicer bila $S_1 = S$ ali $S_2 = S$ (v lemi 37 za i vzamemo naravno vložitev). Sedaj si oglejmo tabelo 1 na prejšnji strani.

Primer 1) ni možen, saj je edina ploskev z Eulerjevo karakteristiko 2 sfera S^2 , ki je sklenjena.

V primeru 2) bomo potrebovali naslednjo lemo:

Lema 38. Naj bo S ploskev in $f : S^1 \rightarrow S$ zvezna in injektivna preslikava. Potem ima $f(S^1)$ prazno notranjost v S .

Dokaz. Naj bo $f : S^1 \rightarrow S$ zvezna in injektivna preslikava. Preslikava f je zaprta vložitev, saj slika iz kompakta v Hausdorffov prostor. Sledi, da sta S^1 in $f(S^1)$ homeomorfni. Če bi imela $f(S^1)$ neprazno notranjost, bi vsebovala odprti disk D ($D \subset f(S^1)$ in $D \approx \text{Int } \mathbb{B}^2$). Naj bosta $a, b \in D$ različni točki. Prostor $f(S^1) - \{a, b\}$ je povezan, medtem ko $S^1 - \{f^{-1}(a), f^{-1}(b)\}$ razpade na dva dela. Toda f je homeomorfizem, homeomorfizmi pa ohranjajo povezanost množic. Torej bi morala biti tudi $S^1 - \{f^{-1}(a), f^{-1}(b)\}$ povezana. To je protislovje. ■

Primer 2) prav tako ni možen. Edina orientabilna ploskev z Eulerjevo karakteristiko 1 je namreč disk. Pa denimo, da je S_1 disk. Po lemi 38 ima krožnica a prazno notranjost v $\Sigma_{1,1}$. Posledično ima $a(S^1) \cap S_1$ prazno notranjost v S_1 . Zato znotraj S_1 obstaja odprti disk D , ki ga krožnica a ne seka. Znotraj diska D pa lahko najdemo krožnico $\tilde{b}$, na katero lahko z izotopijo deformiramo krožnico b . Torej je b izotopna krožnici $\tilde{b}$, ki je disjunktna krožnici a . To pa je v protislovju s predpostavko, da se a in b sekata v eni točki in sta v minimalni poziciji. Tedaj bi se namreč krožnici ne glede na uporabljene izotopije morali sekati v vsaj eni točki.

V primeru 3) je S_1 lahko le torus ali sfera z dvema luknjama (kolobar), saj sta to edini orientabilni ploskvi z Eulerjevo karakteristiko 0. Ploskev S_1 ni sklenjena, zato ne more biti torus. Torej je S_1 kolobar. Tedaj je ena izmed robnih komponent S_1 ravno robna komponenta c ploskve $\Sigma_{1,1}$, saj je $\Sigma_{1,1} = S_1 \cup_{id_b} S_2$. Edine točke na $\Sigma_{1,1}$, ki nimajo okolic, homeomorfnih $\mathbb{R}^2$, so točke na c . Ker je a krožnica (kompakt), vložena v notranjost ploskve $\Sigma_{1,1}$, obstaja $\varepsilon > 0$, da je vsaka točka na krožnici a vsaj za ε oddaljena od robne komponente $\Sigma_{1,1}$. Krožnico b pa lahko z izotopijo deformiramo v

krožnico b' , ki je za največ $\frac{\varepsilon}{2}$ oddaljena od roba $\Sigma_{1,1}$. Krožnici a in b' imata prazen presek. Zato b ne more biti v minimalni poziciji z a in se hkrati z a sekati v natanko eni točki. Torej tudi primer 3) ni možen.

Torej mora biti krožnica b nedelilna. Naj S označuje ploskev, ki jo dobimo, ko $\Sigma_{1,1}$ zarežemo vzdolž krožnice b ter ji dodamo robne komponente vzdolž razreza. Po lemi 4.8 v [6] za Eulerjevo karakteristiko tedaj velja $\chi(\Sigma_{1,1}) = \chi(S)$, oziroma $-1 = \chi(S)$. Orientabilni ploskvi z Eulerjevo karakteristiko -1 sta dve, $\Sigma_{1,1}$ (torus z luknjo) in $\Sigma_{0,3}$ (hlače). Ampak mi smo začeli s $\Sigma_{1,1}$ in ga nato zarežali vzdolž neke krožnice. S tem smo dodali vsaj še eno robno komponento. Torej je dobljena ploskev lahko le $\Sigma_{0,3}$ oziroma hlače.

Tako smo pokazali, da krožnica b , ki izpolni pogoje iz definicije 32, razreže ploskev $\Sigma_{1,1}$ na hlače. To lahko sedaj formuliramo kot izrek:

Izrek 39. Denimo, da krožnica a na $\Sigma_{1,1}$ ploskev $\Sigma_{1,1}$ razreže na hlače. Naj bo b krožnica na ploskvi $\Sigma_{1,1}$, ki je s krožnico a v minimalni poziciji in ki seka krožnico a v natanko eni točki. Potem tudi krožnica b razreže $\Sigma_{1,1}$ na hlače.

5. Rezanje $\Sigma_{0,4}$

Pri definiciji A-premikov moramo razmisliti, da krožnica b , ki izpolni pogoje iz definicije 34, prav tako razreže ploskev $\Sigma_{0,4}$ na hlače. Razmislek bo podoben kot v prejšnjem razdelku.

Za začetek razmislimo, da je vsaka krožnica na $\Sigma_{0,4}$ delilna. V bistvu bomo naredili še splošnejši razmislek, da je vsaka krožnica na orientabilni ploskvi roda 0 delilna. Pri tem si bomo pomagali z Jordanovim delilnim izrekom za sfero, glejte [3] na strani 169.

Izrek 40. (Jordanov delilni izrek za sfero)

Vsaka krožnica na sferi S^2 je delilna, saj sfero razdeli na natanko dva dela.

Imejmo sedaj krožnico na orientabilni ploskvi roda 0. Ploskev S roda 0 je „sfera s končno mnogo luknjami“. Vsako robno komponento take ploskve zapolnimo z diskom in tako dobimo sfero. Krožnica na sferi po izreku 40 deli sfero na dva dela. Nato dobljenima kosoma odstranimo diske, s katerimi smo zapolnili robne komponente S , in dobimo dva kosa, na katera krožnica razdeli ploskev S .

Od tod sledi, da je vsaka krožnica na ploskvi $\Sigma_{0,4}$ delilna. Torej je tudi krožnica b iz definicije 34 delilna. Označimo s S'_1 in S'_2 komponenti $\Sigma_{0,4} - b$. Naj bosta $S_1 = S'_1 \cup b$ in $S_2 = S'_2 \cup b$ ⁷. Podobno kot v prejšnjem razdelku, zdaj velja $\chi(\Sigma_{0,4}) = \chi(S_1) + \chi(S_2)$ oziroma $-2 = \chi(S_1) + \chi(S_2)$. Ker je Eulerjeva karakteristika vsake ploskve navzgor omejena z 2, imamo le končno mnogo možnosti (glejte tabelo 2).

⁷Rob b smo dodali zato, da sta S_1 in S_2 kompaktni ploskvi, saj je za take Eulerjeva karakteristika definirana.

1) $\chi(S_1)$	=	2	$\chi(S_2)$	=	-4
2) $\chi(S_1)$	=	1	$\chi(S_2)$	=	-3
3) $\chi(S_1)$	=	0	$\chi(S_2)$	=	-2
4) $\chi(S_1)$	=	-1	$\chi(S_2)$	=	-1
5) $\chi(S_1)$	=	-2	$\chi(S_2)$	=	0
6) $\chi(S_1)$	=	-3	$\chi(S_2)$	=	1
7) $\chi(S_1)$	=	-4	$\chi(S_2)$	=	2

Tabela 2. Vsi pari Eulerjevih karakteristik $\chi(S_1)$ in $\chi(S_2)$ z vsoto -2 .

Zaradi simetrije zadošča obravnavati le prve štiri možnosti v tabeli 2.

Primer 1) ni možen, saj je edina ploskev z Eulerjevo karakteristiko 2 sfera S^2 , ki je sklenjena.

Primer 2) prav tako ni možen. Edina orientabilna ploskev z Eulerjevo karakteristiko 1 je namreč disk, znotraj katerega lahko krožnico b z izotopijo deformiramo v poljubno majhno krožnico $\tilde{b}$, ki ne seka a . Takšna krožnica $\tilde{b}$ obstaja po lemi 38. Ampak po predpostavki iz definicije 34 je krožnica b v minimalni poziciji s krožnico a in jo seka v natanko dveh točkah. Primer 2) torej ni možen.

V primeru 3) je S_1 lahko le torus ali sfera z dvema luknjama (kolobar), saj sta to edini orientabilni ploskvi z Eulerjevo karakteristiko 0. Ploskev S_1 ni sklenjena, zato ne more biti torus. Torej je S_1 kolobar. Tedaj je ena izmed robnih komponent S_1 ravno robna komponenta c ploskve $\Sigma_{0,4}$. Ker je a krožnica (kompakt), vložena v notranjost ploskve $\Sigma_{0,4}$, obstaja $\varepsilon > 0$, da je vsaka točka na krožnici a vsaj za ε oddaljena od robne komponente c ploskve $\Sigma_{0,4}$. Krožnico b pa lahko z izotopijo deformiramo v krožnico b' , ki je za največ $\frac{\varepsilon}{2}$ oddaljena od c . Krožnici a in b' imata prazen presek. Zato b ne more biti v minimalni poziciji z a in se hkrati z a sekati v natanko dveh točkah. Torej tudi primer 3) ni možen.

V primeru 4) imata ploskvi S_1 in S_2 obe Eulerjevo karakteristiko -1 . Torej sta lahko le $\Sigma_{1,1}$ (torus z luknjo) ali $\Sigma_{0,3}$ (hlače). Skličemo se na trditev v [4] na strani 40, ki pove, da rod S_1 in S_2 ne more biti večji od roda $\Sigma_{0,4}$ (ploskve, vzdolž katere režemo). Torej sta S_1 in S_2 ploskvi roda 0, od koder sledi, da sta S_1 in S_2 hlače.

Opomba 41. Izločitev $\Sigma_{1,1}$ v primeru 4) lahko utemeljimo tudi drugače. Za izločitev $\Sigma_{1,1}$ je dovolj opaziti, da ima naša ploskev preveč robnih komponent – začeli smo s štirimi, po rezanju vzdolž b pa dobili še dve.

Tako vidimo, da krožnica b , ki izpolni pogoje iz definicije 34, razreže ploskev $\Sigma_{0,4}$ na hlače. Sedaj lahko zapišemo izrek:

Izrek 42. Denimo, da krožnica a na $\Sigma_{0,4}$ ploskev $\Sigma_{0,4}$ razreže na hlače. Naj bo b krožnica na ploskvi $\Sigma_{0,4}$, ki je s krožnico a v minimalni poziciji in ki seka krožnico a v natanko dveh točkah. Potem tudi krožnica b razreže $\Sigma_{0,4}$ na dvojne hlače.

5.1 Zaključni razmisleki

Za konec lahko s pomočjo Eulerjeve karakteristike zaključimo dokaz trditve 22. Razmisliti moramo še, da $\Sigma_{0,0}$, $\Sigma_{0,1}$, $\Sigma_{0,2}$, $\Sigma_{1,0}$ ne dopuščajo hlačne dekompozicije. Pa denimo, da bi kakšna izmed teh ploskev dopuščala hlačno dekompozicijo z m hlačami za nek $m \in \mathbb{N}$. Ker je Eulerjeva karakteristika

hlač -1 in je končno aditivna⁸, bi od tod sledilo, da ima ploskev Eulerjevo karakteristiko $-m$. Ampak $\Sigma_{0,0}$, $\Sigma_{0,1}$, $\Sigma_{0,2}$, $\Sigma_{1,0}$ imajo nenegativno Eulerjevo karakteristiko.

Opomba 43. Trditev 22 torej v bistvu pove, da vsaka kompaktna orientabilna ploskev S z negativno Eulerjevo karakteristiko dopušča hlačno dekompozicijo. Še več, iz zgornjega razmisleka sledi, da bo poljubna hlačna dekompozicija ploskve S sestavljena iz natanko $-\chi(S)$ hlač.

LITERATURA

- [1] <https://github.com/JakobSega/M-biusov-Trak/blob/main/MöbiusovTrak.png>. Naloženo dne: 12. 3. 2026. Licenca MIT.
- [2] Gallier, Jean in Xu, Dianna. *A Guide to the Classification Theorem for Compact Surfaces*. 2025. Springer.
- [3] Hatcher, Allen. *Algebraic topology*. 2001.
- [4] Farb, Benson in Margalit, Dan. *A primer on mapping class groups, Version 5.0*, Princeton University Press. 2012.
- [5] Wolf, Ute. *Die Aktion der Abbildungsklassengruppe auf dem Hosenkomplex*. 2009.
- [6] Putman, Andrew. The Classification of Surfaces (long version). Department of Mathematics, University of Notre Dame. <https://academicweb.nd.edu/~andyp/notes/ClassificationSurfacesLong.pdf>. Naloženo dne: 25. 8. 2026.

⁸Če je $\{S_1, \dots, S_n\}$ dekompozicija ploskve S , potem je po lemi 4.8 v [6]: $\chi(S) = \sum_{i=1}^n \chi(S_i)$.