

KAKO TEŽKO JE RAZVOZLATI NEVOZEL?

JURE KREŽE

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

V tem članku je obravnavan eden od elementarnejših problemov iz teorije vozlov: če vozni diagram predstavlja nevozel, kako težko je to pokazati z osnovnimi potezami vozlov – Reidemeistrovimi pomiki? Podani sta dve različni interpretaciji tega vprašanja: koliko „zapleten“ postane diagram med razvozlanjem in koliko Reidemeistrovih pomikov je potrebnih za razvozlanje. Poleg nekaterih osnovnih definicij teorije vozlov sta podani definiciji Morsejeve oblike in obločne predstavitev, ki omogočata kombinatorično obravnavo problema. Z uporabo izrekov Dynnikova [1] in kombinatoričnih metod se izpelje zgornja meja za obe vprašanji.

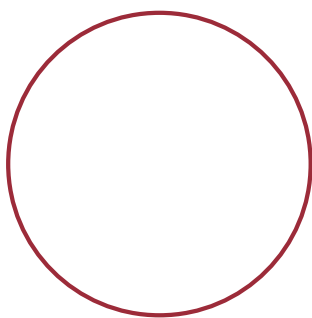
HOW DIFFICULT IS IT TO UNKNOT AN UNKNOT?

This paper discusses one of the more elementary problems from knot theory: if a knot diagram represents the unknot, how difficult is it to show that via the elementary moves of knots – Reidemeister moves? Two different interpretations of this question are given: how „complicated“ does a diagram become while unknotting, and how many Reidemeister moves are needed to unknot it? Along with some basic definitions of knot theory, the definitions of Morse form and arc-presentations are given, which allow for a combinatorial handling of the question. Using theorems of Dynnikov [1] and combinatorial methods, upper bounds are derived for both questions.

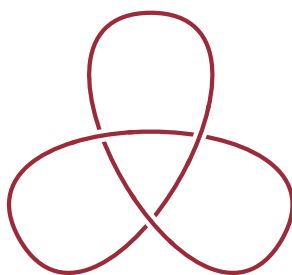
1. Uvod

Vozel je vložitev krožnice v trirazsežni evklidski prostor. Ukvarjamo se z diagrami vozlov, ki so projekcije vozla na ravnino. Primeri diagramov so prikazani na slikah 1, 2 in 3. Poleg same projekcije ohranimo še podatke o relativnih položajih pramenov, torej kateri pramen poteka nad drugim glede na tretjo prostorsko koordinato (pred projekcijo). Pramenu, ki poteka višje, pravimo nadvoz, drugemu pa pravimo podvoz. Eden od glavnih ciljev teorije vozlov je razlikovati med vozli na čim manj zahteven način. Eden od izzivov pri tem je, da sta lahko dva vozla ekvivalentna, vendar si nista videti podobno. V splošnem je vprašanje, ali dva vozlna diagrama predstavljata enak voz, zelo težko.

Več o teoriji vozlov, vključno z njeno bogato zgodovino, lahko bralec najde v [2].



Slika 1. Nevozel



Slika 2. Deteljica



Slika 3. Petlistna deteljica

V sklopu tega članka se ukvarjamo z nepatološkimi vozli (t. i. krotkimi vozli) in nepatološkimi diagrami. Zato se bomo omejili na diagrame, ki imajo končno mnogo samopresečišč. Takšna samopresečišča imenujemo križanja.

Definicija 1. Naj bo K diagram vozla. Število križanj diagrama označimo s $cr(K)$.

Opomba 2. Teorija vozlov se pogosto ukvarja s številom križanj *vozla*, kar je najmanjše število križanj vseh diagramov tega vozla. Mi se ukvarjamo s številom križanj diagrama, kar se lahko spremeni z različnimi prikazi. Na primer, število križanj deteljice (slika 2) je tri, število križanj petlistne deteljice (slika 3) je pet. Z izbranimi diagrami se obe definiciji ujemata, lahko bi pa dodali križanja, ne da bi spremenili vozla.

2. Osnovne definicije

Diagrame vozlov lahko deformiramo na dva načina. Prvi način so znameniti Reidemeistrovi pomiki. Te poteze se izpeljejo iz bolj osnovne definicije enakosti vozlov v trirazsežnem prostoru, mi pa jih bomo uporabljali za definicijo, kdaj sta dva vozla ekvivalentna.

Definicija 3. Reidemeistrovi pomiki zajemajo tri vrste sprememb diagrama. Reidemeistrov pomik prvega tipa označuje nastanek ali izginotje majhne zanke. Reidemeistrov pomik drugega tipa je nastanek ali izginotje para križanj-dvojčkov. Reidemeistrov pomik tretjega tipa pa je prehod tretjega loka čez križanje (oziroma pod križanje) dveh lokov. Na sliki 4 so prikazani primeri vseh treh Reidemeistrovih pomikov¹.

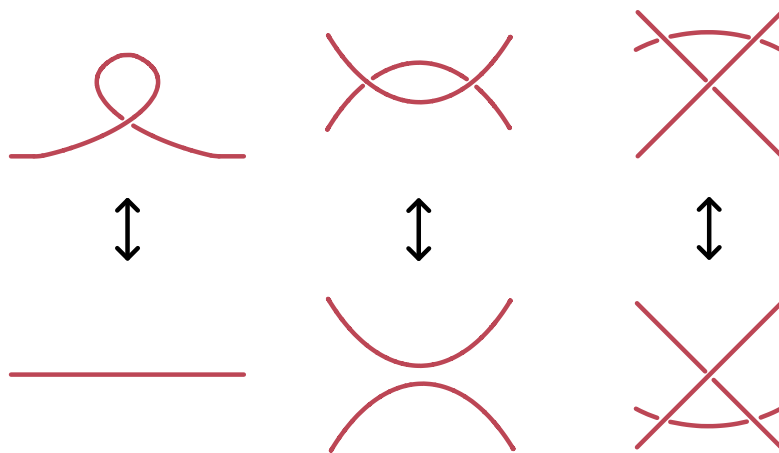
Poleg Reidemeistrovih pomikov uporabljamo še ambientne izotopije ravnine. To so zvezne deformacije ravnine

$$F : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

za katere velja, da so vse preslikave, ki jih dobimo iz F tako, da fiksiramo drugo komponento, homeomorfizmi ravnine. Bolj natančno, vsaka preslikava

$$\begin{aligned} F_t : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ F_t(\cdot) &= F(\cdot, t) \end{aligned}$$

je homeomorfizem iz ravnine vase. Še več, mora veljati $F_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$.



Slika 4. Reidemeistrovi pomiki prvega, drugega in tretjega tipa po vrsti

V kontekstu vozlov pravimo, da sta diagrama vozlov $K \subset \mathbb{R}^2$ in $H \subset \mathbb{R}^2$ ambientno izotopna, če obstaja ambientna izotopija ravnine $F : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, da velja

$$F_1(K) = H.$$

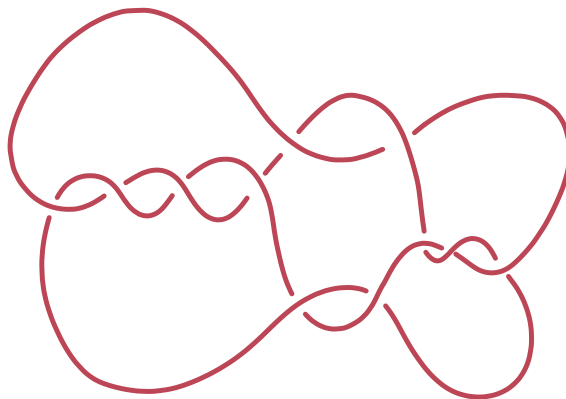
¹V resnici je več osnovnih pomikov, saj smo na primer na sliki Reidemeistrovega pomika drugega tipa označili le primer, ko gre spodnji pramen nad zgornjim. Kljub temu da so teoretično drugačni, jih štejemo pod isti tip, kar je tudi razumljivo, saj so si res podobni.

Torej sta dva vozla ekvivalentna, če lahko diagram enega prevedemo na diagram drugega z zaporedjem Reidemeistrovih pomikov in ambientnih izotopij ravnine.

Definicija 4 (nevozel). Nevozel je vozle, katerega diagram je ekvivalenten diagramu vozla brez križanj.

Zanima nas, kako težko je razvozlati nevozel. Za nekatere diagrame nevozla je človeku očitno, kako bi ga razvozlal in koliko pomikov bi pri tem potreboval. Vendar obstajajo tudi t. i. *težki nevozli*, ki so na določen način težji za razvozlati kot drugi nevozli. Za razvozlanje težkega nevozla najprej moramo povečati število križanj, preden ga lahko zmanjšamo. Primer težkega nevozla je znan t. i. *Goeritzov nevozel*, prikazan na sliki 5.

Izpeljali bomo zgornjo mejo za število Reidemeistrovih pomikov, ki jih potrebujemo, da diagram nevozla pretvorimo v diagram brez križanj. Nekoliko manj zahteven rezultat omeji število križanj med razvozlanjem. Prvi izrek bomo izpeljali v 4.razdelku, drugi izrek pa v 5.razdelku. Te zgornje meje so v angleščini tudi izpeljane v [3].



Slika 5. Goeritzov nevozel

3. Predstavitve vozelnih diagramov

3.1 Obločne predstavitve

Pri vprašanjih o diagramih nevozla je pogosto uporabno standardizirati diagrame z različnimi pravili. Uporabili bomo dve različni predstavitvi vozelnih diagramov. Pri tem se bo obločna predstavitev izkazala za uporabno pri preštevanju, Morsejeva predstavitev pa uporabna, ker lahko iz nje razberemo podatke o obločni predstavitvi. Torej, pretvarjali bomo diagrame iz Morsejeve oblike v obločno predstavitev, o končnem rezultatu bomo pa že veliko vedeli od lastnosti Morsejeve oblike. Brez dokaza bomo uporabili dejstvo, da ima vsak vozel diagram v Morsejevi obliki in diagram v obločni predstavitvi.

Najprej si oglejmo najbolj enostavno predstavitev vozla. Zelo naravna ideja je izravnati vse loke v diagramu. Res, daljice so običajno bolj obvladljive kot poljubne krivulje. Takšno predstavitev imenujemo pravokotniško predstavitev.

Definicija 5. Diagram vozla K je v *pravokotniški predstavitvi*, če je sestavljen samo iz navpičnih in vodoravnih daljic².

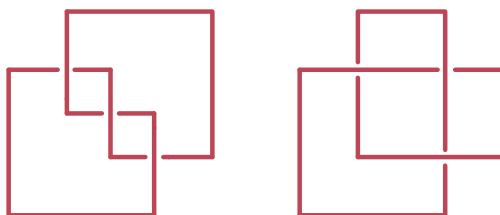
²Tukaj predpostavljamo, da je intuitivno, kaj pomenijo navpične in vodoravne daljice. V resnici bi lahko bolje definirali tako, da bi izbrali vektor in zahtevali, da so vse daljice bodisi pravokotne na ta vektor bodisi vzporedne z njim.

Ta definicija sama od sebe ni dovolj močna, da bi nam veliko povedala, je pa podlaga za močnejšo obločno predstavitev, pri kateri zahtevamo še, da se voz el ravna predvidljivo v vseh križanjih. Bolj natančno, pri vsakem križanju zahtevamo, da je nadvoz navpična daljica, podvoz pa vodoravna daljica.

Definicija 6. Diagram vozla K je v *obločni predstavitvi*, če je v pravokotniški predstavitvi, v kateri je pri vsakem križanju navpična daljica nad vodoravno. Dalje zahtevamo, da nobeni dve daljici nista kolinearni.

Število navpičnih daljic v K imenujemo kompleksnost K in jo označimo s $c(K)$.

Na sliki 6 je primer obločne in pravokotniške predstavitve deteljice.



Slika 6. Primer vozla v obločni predstavitvi na levi in v pravokotniški predstavitvi na desni

Zadnji pogoj, da so daljice nekolinearne, je postavljen zato, da bomo lahko normalizirali dolžine daljic in tako šteli različne obločne predstavitve.

Opomba 7. V obločnih predstavitvah očitno velja:

1. Navpičnih daljic je toliko, kot je vodoravnih daljic.
2. Oglišč je dvakrat toliko, kot je navpičnih (oz. vodoravnih) daljic.

Očitno je več različnih obločnih predstavitev za isti voz el. Poleg enakosti vozlov se splača opredeliti tudi, kdaj sta dve obločni predstavitvi ekvivalentni. Izkaže se, da je pravilna definicija podana s posebnim primerom ambientne izotopije, pri kateri je vsak homeomorfizem ravnine oblike $h(x, y) = (f(x), g(y))$. V tem primeru rečemo, da sta obločni predstavitvi *kombinatorično ekvivalentni*.

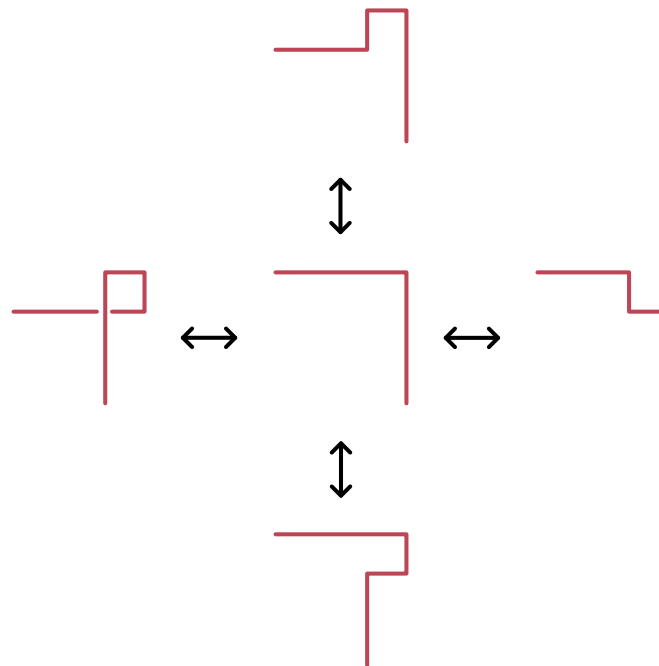
Obločne predstavitve imajo svoje pomike, ki določajo ekvivalenco (v smislu ekvivalence vozlov). Poznamo tri vrste osnovnih potez za obločne predstavitve: stabilizacije, destabilizacije in izmenjave. Destabilizacije in stabilizacije so predstavljene na sliki 7, nekaj izmenjav pa je predstavljenih na sliki 8. Stabilizacije so tiste poteze, ki povečajo kompleksnost predstavitve, destabilizacije pa so tiste poteze, ki zmanjšajo kompleksnost predstavitve. Opazimo, da le ena stabilizacija in ena destabilizacija ustrezata Reidemeistrovemu pomiku, vse ostale stabilizacije in destabilizacije pa so le ambientne izotopije ravnine.

Opis izmenjav zahteva več pomožnih definicij, slikovno pa so precej intuitivne. Rečemo, da sta dve vodoravni (oz. navpični) daljici *sosednji*, če ni nobene vodoravne (oz. navpične) daljice med njima. Brez škode za splošnost glejmo izmenjavo dveh vodoravnih daljic p in q . S π_1 označimo projekcijo na prvo koordinato $(x, y) \mapsto x$. Rečemo, da se krajišči teh dveh daljic ne prepletata, če je

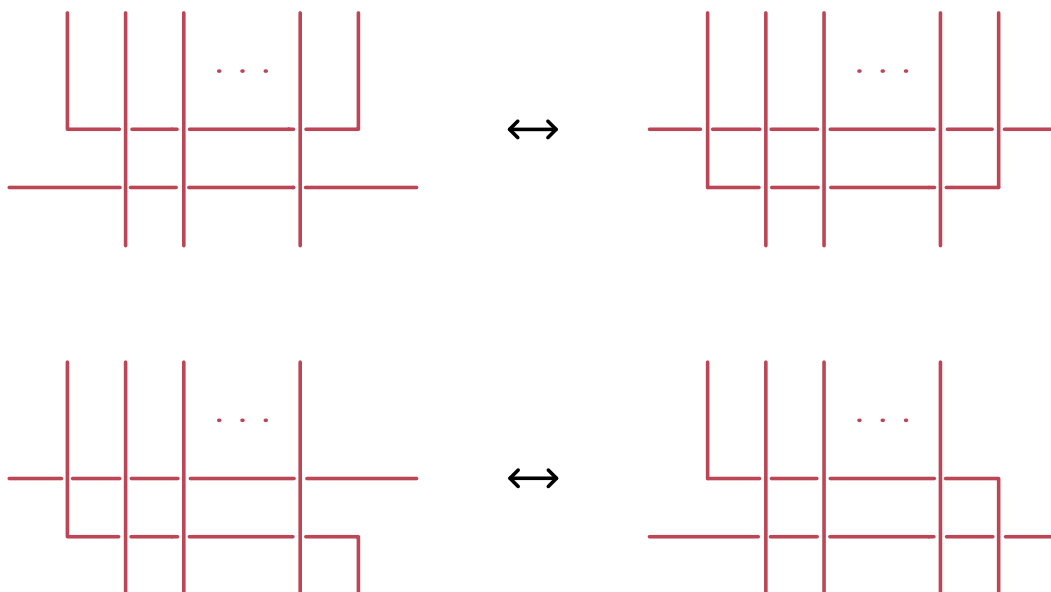
$$\pi_1(p) \cap \pi_1(q) \in \{\pi_1(p), \pi_1(q), \emptyset\}.$$

Če sta dve sosednji daljici takšni, da se njuni krajišči ne prepletata, je torej izmenjava poteza, ki ju zamenja.

Kako težko je razvozlati nevozel?



Slika 7. Destabilizacije in stabilizacije



Slika 8. Dva primera izmenjav, pri katerih leži projekcija ene daljice znotraj projekcije druge

S pomočjo izrekov Dynnikova bomo v naslednjem razdelku uporabili obločne predstavitev, da ugotovimo zgornje meje za število križanj in osnovnih potez v obločnih predstavitvah, na koncu pa bomo še premislili pretvorbo teh rezultatov na Reidemeistrove pomike.

Izpustimo dokaz naslednje trditve. Več o njej lahko bralec najde v Dynnikovem članku [1].

Trditev 8 (Dynnikov). Vsak vozel ima obločno predstavitev. Med vsakima dvema obločnima predstavitvama istega vozla lahko pretvarjamo s končnim zaporedjem osnovnih potez za obločne predstavitve.

3.2 Morsejeva oblika

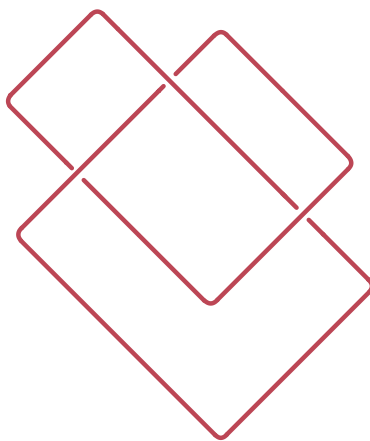
Morsejeva oblika za vozalne diagrame izhaja iz potrebe, da računalniku predstavimo vozni brez grafičnega prikaza. Ideja je, da na diagramu v ravnini definiramo funkcijo, ki vsaki točki priredi njeno višino, najbolj standardno bi to storili s preslikavo $(x, y) \mapsto y$, v splošnem pa je to razdalja do premice, vzporedne vektorju $\vec{v}$. Diagram v Morsejevi obliki lahko predstavimo kot neko zaporedje „dogodkov“, s čimer razmišljamo o lokalnih maksimumih in minimumih višinske funkcije ter križanjih. Te tri pojave imenujemo singularnosti. Še en nov pojav v definiciji Morsejeve oblike je prevoj vozelnega diagrama, ki je točka na diagramu, v kateri krivulja preide iz konveksne v konkavno ali obratno. Prevoj je videti podobno kot pri grafu funkcije in ga lahko iščemo na podoben način (na primer z opazovanjem tangent na krivuljo).

Definicija 9. Vozelni diagram K je v Morsejevi obliki glede na vektor $\vec{v}$, če:

1. K ne vsebuje daljic, vzporednih z vektorjem $\vec{v}$,
2. diagram nima nobenih prevojev,
3. na vsaki višini je največ ena singularnost in
4. vsako križanje se zgodi pod kotom 45° z vektorjem $\vec{v}$.

Opomba 10. Definicija vozelnega diagrama v Morsejevi obliki ni usklajena po literaturi. Nekje je pogoj o prevojih izpuščen, ampak za naše namene bo ta pogoj ključen. Opazimo, da se zaradi tega pogoja ne more zgoditi, da bi bilo več zaporednih levih oz. desnih krajišč na poti med minimumom in maksimumom.

Na sliki 9 je primer vozelnega diagrama v Morsejevi obliki. Za lemo 11 je na sliki 10 primer vozelnega diagrama s prevojem, ki je obkrožen.



Slika 9. Deteljica v Morsejevi obliki

Naša prva netrivialna lema nam bo povedala, da je možno prevesti med Morsejevo obliko in obločno predstavitev tako, da imamo na koncu predvidljivo kompleksnost. To bo zadoščalo za izpeljavo naših mej³.

Lema 11. Naj bo K diagram vozla v Morsejevi obliki s $\text{cr}(K)$ križanji in $\text{b}(K)$ maksimumi. Obstaja obločna predstavitev L_K vozla K s kompleksnostjo največ $2\text{b}(K) + \text{cr}(K)$. Pretvorba med tema

³Tu je možna pripomba, da vseeno zahtevamo Morsejevo obliko za mejo. Torej si nismo zares prihranili dela, ker bi lahko že od začetka pretvorili v obločno predstavitev. V praksi pa velja, da je Morsejeva oblika nerestriktivna. Lažje je ugotoviti, koliko lokalnih maksimumov bi imel diagram v Morsejevi obliki, kot je ugotoviti pripadajočo kompleksnost.

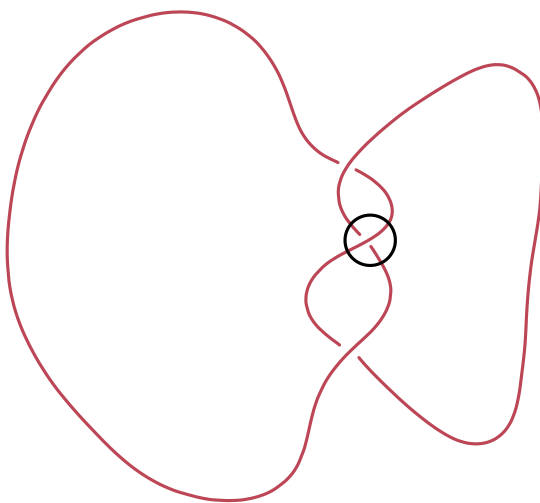
dvema predstavitevama zahteva le uporabo ambientnih izotopij ravnine. V posebnem to pomeni, da se oba diagrama ujemata v številu križanj.

Dokaz. Naj bo K diagram vozla v Morsejevi obliki. Najprej pretvorimo vse loke v daljice z naklonom ± 1 . Opazimo, da je število oglišč enako vsoti števila maksimumov, števila minimumov, števila levih krajišč ter števila desnih krajišč. To število lahko omejimo na $4b(K)$, saj pogoj, da ni prevojev, zagotavlja, da je na poti med minimumom in maksimumom (oz. obratno) natanko ena sprememba smeri. Ta diagram zavrtimo za kot 45° in dobimo pravokotniško predstavitev. V splošnem ta diagram še ni v obločni predstavitvi, saj so lahko nadvozi in podvozi v napačnih relacijah.

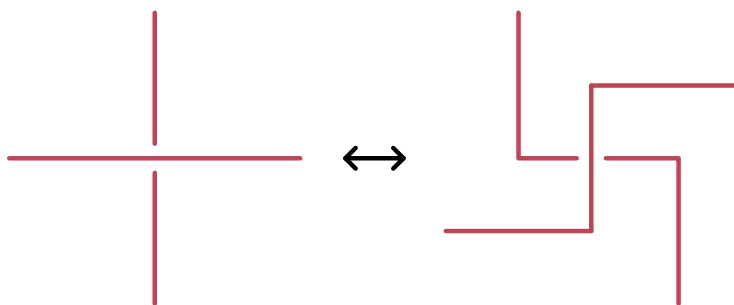
Opazimo, da lahko dosežemo, da je vsaj na polovici križanj pravilna postavitve nadvozov in podvozov. Če to sprva ni res, lahko diagram enostavno zavrtimo za kot 90° in postanejo vodoravne daljice navpične in obratno. Sklepamo, da ima zdaj diagram največ $2b(K)$ navpičnih daljic. Za vsako križanje, ki je še vedno napačno postavljeno, izvedemo ambientno izotopijo, predstavljeno na sliki 11. Pri tem dodamo za vsako napačno postavljeno križanje dve navpični daljici. Pri tem pretvarjanju torej dodamo dve navpični daljici za največ polovico vseh križanj, torej $2\left(\frac{1}{2}cr(K)\right) = cr(K)$. Od tod dobimo neenakost za kompleksnost obločne predstavitve

$$c(L_K) \leq 2b(K) + cr(K).$$

■



Slika 10. Deteljica z obkroženim prevojem



Slika 11. Pretvorba napačno postavljenega križanja z dvema dodatnima navpičnima daljicama

4. Meje za razvozlanje obločnih predstavitev

Ta razdelek se naslanja na delo Dynnikova [1], ki je dokazal, da v določenem smislu obločne predstavitve nevozla nimajo istega problema kot splošne predstavitve. Koncept težkega nevozla namreč ne obstaja za obločne predstavitve – vsako obločno predstavitev nevozla lahko razvozlamo tako, da kompleksnost diagrama med razvozlanjem pada.

Izrek 12 (Dynnikov). Naj bo L obločna predstavitev nevozla. Obstaja zaporedje diagramov

$$L = L_0 \rightarrow L_1 \rightarrow \cdots \rightarrow L_m, \quad (1)$$

ki zadošča naslednjim pogojem:

1. L_m je diagram brez križanj,
2. vsak člen L_i zaporedja za $i \in \{1, \dots, m\}$ dobimo iz prejšnjega člena z **destabilizacijo** ali izmenjavo.

Izmenjave ne spremenijo kompleksnosti diagrama, medtem ko destabilizacije znižajo kompleksnost diagrama. Naslednji koraki bodo temeljili na tem, da ugotovimo, kaj lahko izpeljemo iz kompleksnosti obločne predstavitve nevozla. Ugotovili bomo, kakšno korespondenco imajo destabilizacije in izmenjave z Reidemeistrovimi pomiki in ambientnimi izotopijami. Ta premislek bomo združili z zgornjo mejo za število križanj v obločni predstavitvi, da ugotovimo zgornjo mejo za število križanj med razvozlanjem z Reidemeistrovimi pomiki.

Že vnaprej vemo, da ena izmed destabilizacij ustreza Reidemeistrovemu pomiku prvega tipa, ki zniža število križanj. Ostale destabilizacije so ambientne izotopije ravnine in zato ne spremenijo števila križanj. Izmenjave lahko povečajo število križanj, vendar zaradi naše definicije obločne predstavitve to ne predstavlja večjega problema. Nekolinearnost daljic zagotavlja, da elementarne izmenjave ne povečajo števila križanj za več kot dve. Če pretvorimo izmenjavo v Reidemeistrove pomike, ugotovimo naslednjo lemo:

Lema 13. Naj bo L obločna predstavitev vozelnega diagrama. Za izvedbo izmenjave potrebujemo kvečjemu en Reidemeistrov pomik drugega tipa in nekaj Reidemeistrovih pomikov tretjega tipa. Vsega skupaj potrebujemo kvečjemu $c(L) - 2$ Reidemeistrovih pomikov.

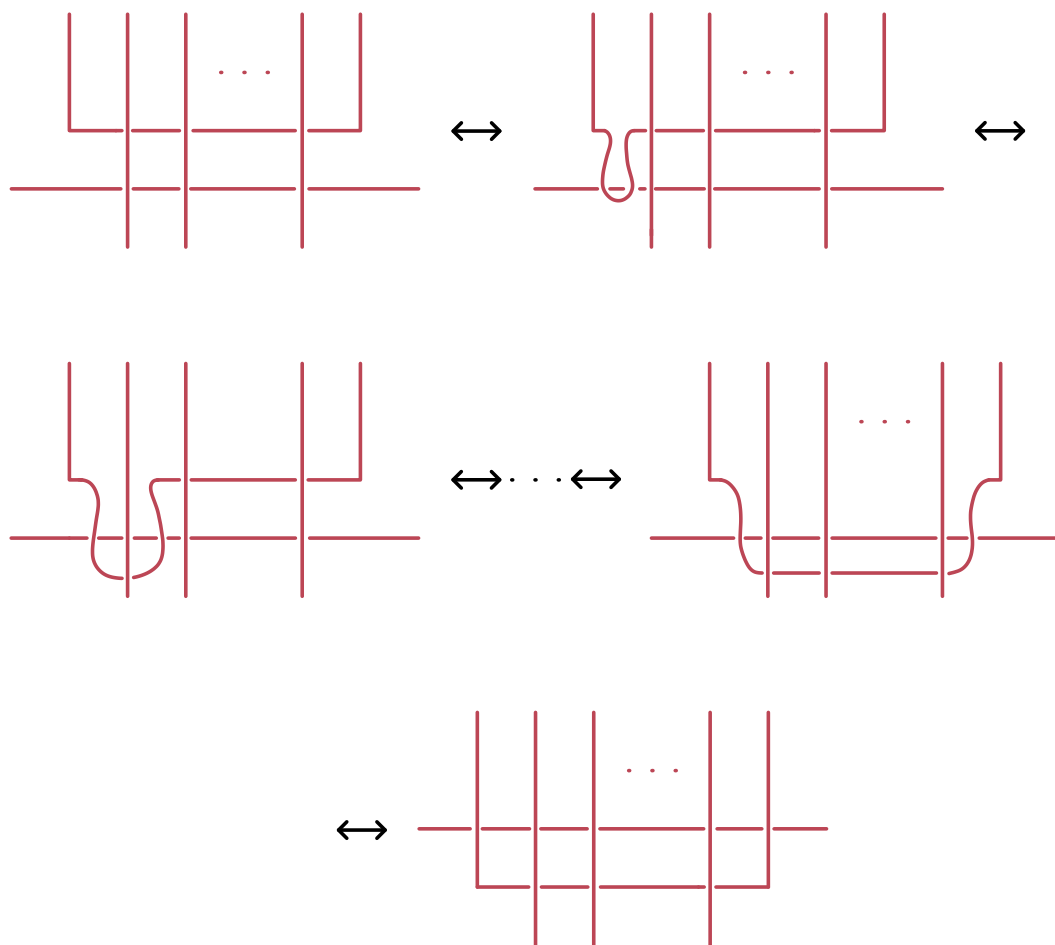
Skica. Brez škode za splošnost izvajamo izmenjavo na dveh vodoravnih daljicah. Naj bo d število navpičnih daljic, ki sekajo obe daljici, ki ju menjamo⁴. Dokaz opravimo za primer, ki je prikazan na sliki 12. Ostali primeri so podobni, morda pa ne potrebujejo Reidemeistrovih pomikov drugega tipa ali pa celo nobenih Reidemeistrovih pomikov. V tem primeru izvedemo en pomik drugega tipa na skrajnem (na sliki levem) odseku daljice in potem zaporedno uporabimo Reidemeistrove pomike tretjega tipa. Izvedemo največ en pomik drugega tipa in d pomikov tretjega tipa. Vendar ti dve daljici seka strogo manj kot $c(L) - 2$ navpičnih daljic, ker ju daljici v njunih krajiščih ne moreta sekati v notranjosti. Torej izvedemo največ $d + 1 \leq c(L) - 2$ potez. ■

Ker Reidemeistrovi pomiki tretjega tipa ne povečajo števila križanj, se število križanj v pretvorbi ne poveča za več, kot se poveča v zaporedju destabilizacij in izmenjav. Sklepamo, da lahko zaporedje iz izreka 12 pretvorimo v tako zaporedje, v katerem izvajamo Reidemeistrove pomike

$$L = K_0 \rightarrow K_1 \rightarrow \cdots \rightarrow K_n = L_m,$$

da število križanj nikoli ne preseže največjega števila križanj v (1).

⁴Če nobena navpična daljica ne seka obeh vodoravnih daljic, potem bodisi izvajamo pomik drugega tipa bodisi potrebujemo le ambientno izotopijo ravnine.



Slika 12. Primer pretvarjanja izmenjave v Reidemeistrove pomike

Lema 14. Naj bo K vozlni diagram v obločni predstavitvi s kompleksnostjo $c(K) \leq M$. Potem je $cr(K) \leq (M - 2)^2$.

Dokaz. Opazimo, da križanje lahko leži na daljici le, če ta daljica ni maksimalna ali minimalna v smislu koordinate x oz. y . Obstaja $M - 2$ takih navpičnih daljic in $M - 2$ takih vodoravnih daljic. Nobeni dve isto usmerjeni daljici se ne sekata, zato se kvečjemu vse vodoravne daljice sekajo z vsemi navpičnimi daljicami. Sledi, da je $cr(K) \leq (M - 2)(M - 2) = (M - 2)^2$. ■

Iz teh premislekov hitro sledi naslednji izrek:

Izrek 15. Naj bo K diagram nevozla v Morsejevi obliki. Označimo $M = cr(K) + 2b(K)$. Obstaja zaporedje diagramov

$$K = K_0 \rightarrow K_1 \rightarrow \cdots \rightarrow K_n,$$

ki zadošča naslednjim pogojem:

1. K_n je diagram brez križanj,
2. za $i \in \{1, \dots, n\}$ dobimo K_i iz K_{i-1} z enim Reidemeistrovim pomikom,
3. za $i \in \{0, \dots, n\}$ je $cr(K_i) \leq (M - 2)^2$.

5. Meja za število Reidemeistrovih pomikov za razvozlanje

V tem razdelku se bomo ukvarjali z drugim krovnim vprašanjem: koliko Reidemeistrovih potez potrebujemo, da razvozlamo diagram nevozla? Uporabili bomo podobne metode kot v prejšnjem razdelku. Najprej bomo ugotovili, koliko je maksimalno število destabilizacij in izmenjav m v (1). Potem bomo bolj podrobno premislili prej omenjeno pretvorbo med izmenjavami in Reidemeistrovimi pomiki.

Trditev 16 (Dynnikov). Označimo z $N(n)$ število kombinatorično neekvivalentnih obločnih predstavitev kompleksnosti n . Velja neenakost $N(n) \leq \frac{1}{2}n[(n-1)!]^2$.

Dokaz. Štejemo obločne predstavitve vozlov na $n \times n$ mreži. Tako bomo do kombinatorične ekvivalence dobili vse možne obločne predstavitve kompleksnosti n , saj lahko vsako tako predstavitev normaliziramo, da ima točke na tej mreži.

Najprej pomislimo, kaj lahko povemo o končni predstavitvi že pred začetkom. Ugotovimo, da bomo imeli n navpičnih in n vodoravnih daljic, posledično bomo imeli ravno $2n$ oglišč. Začeli bomo tako, da se odločimo za začetno točko. To lahko storimo na n^2 načinov, ampak ne dobimo v vsakem primeru različne predstavitve. Res, na koncu postopka imamo obločno predstavitev z $2n$ oglišči. Lahko bi začeli s katerim koli od teh oglišč in bi prišli do istega vozla. Torej v resnici imamo zgolj $\frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}$ možnih izborov⁵. Izberemo recimo točko (a, b) .

Brez škode za splošnost se odločimo zdaj postaviti navpično daljico. Izbiramo torej končno oglišče te navpične daljice izmed $n - 1$ neuporabljenih oglišč z x -koordinato a . Potem iz tistega oglišča postavljamo vodoravno daljico, za katero imamo ponovno $n - 1$ izbir. V naslednjem koraku postavljamo še enkrat navpično daljico, vendar tokrat nimamo $n - 1$ izbir, kot bi se zdelo na prvi pogled. Upoštevati moramo namreč, da so točke z y -koordinato b na neki način rezervirane za zadnjo daljico, saj moramo zaradi nekolinearnosti potem skleniti diagram. Sledi, da imamo na i -tem koraku $n - i$ izbir za navpično daljico in $n - i$ izbir za vodoravno daljico. Sklepamo, da vse skupaj lahko s tem postopkom ustvarimo največ $\frac{n}{2}[(n-1)!]^2$ različnih obločnih predstavitev. ■

Posledica 17. Naj bo L obločna predstavitev nevozla s kompleksnostjo M . Obstaja zaporedje diagramov

$$L = L_0 \rightarrow L_1 \rightarrow \cdots \rightarrow L_m,$$

pri katerem je $m \leq \sum_{i=2}^M \frac{i}{2} [(i-1)!]^2$ in ki zadošča pogoju izreka 12.

Dokaz. V zaporedju so vsi diagrami paroma kombinatorično neekvivalentni. Recimo, da ima začetni diagram L kompleksnost M . V najslabšem primeru gremo v zaporedju skozi vse diagrame kompleksnosti M , preden pridemo do kompleksnosti $M - 1$. Ta postopek ponavljamo, in ko se postopek konča (ko kompleksnost pade na dve), smo opravili največ

$$\sum_{i=2}^M \frac{i}{2} [(i-1)!]^2$$

destabilizacij in izmenjav. ■

Za zaključek združimo posledico 17 in lemo 13.

⁵Opazimo, da $\frac{n}{2}$ ni nujno celo število. V nekem smislu bi to deljenje z $2n$ moralo priti na koncu, da bi se temu izognili. Ta delitelj $2n$ se v nadaljevanju izpeljave pokrajša.

Izrek 18. Naj bo K diagram nevozla v Morsejevi obliki. Označimo $M = 2b(K) + cr(K)$. Potem obstaja zaporedje Reidemeistrovih pomikov, ki razvozla ta diagram v največ

$$\sum_{i=2}^M \frac{1}{2} i [(i-1)!]^2 (M-2)$$

korakih.

Dokaz. Diagram K pretvorimo v obločno predstavitev L . Velja, da je $c(L) \leq M$. Prevedemo L v trivialen diagram z zaporedjem destabilizacij in izmenjav. Po posledici 17 je dolžina tega zaporedja kvečjemu $\sum_{i=2}^M \frac{1}{2} i [(i-1)!]^2$. Vsako destabilizacijo in izmenjavo pretvorimo v največ $M-2$ Reidemeistrovih pomikov (po lemi 13) in dobimo zgornjo mejo za dolžino zaporedja Reidemeistrovih pomikov, ki je ravno

$$\sum_{i=2}^M \frac{1}{2} i [(i-1)!]^2 (M-2). \quad \blacksquare$$

Zahvala avtorici slik

Zahvalil bi se Kanisaji Niki Kovačič za ustvarjanje vseh slik od 4 do 12.

Angleško-slovenski slovar strokovnih izrazov

knot	vozel
tame knot	krotek vozel
crossing	križanje
crossing number	število križanj
Reidemeister move	Reidemeistrov pomik
ambient isotopy (of the plane)	ambientna izotopija (ravnine)
unknot	nevozel
Morse form	Morsejeva oblika
arc-presentation	obločna predstavitev
rectangular diagram	pravokotniška predstavitev
complexity	kompleksnost
stabilization move	stabilizacija
destabilization move	destabilizacija
exchange move	izmenjava

LITERATURA

- [1] I. A. Dynnikov, *Arc-presentations of links: Monotonic simplification*, Fundamenta Mathematicae **190** (2006), 29–76.
- [2] A. B. Sosinskij, *Vozli: razvoj neke matematične teorije*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2011.
- [3] A. Henrich in L. H. Kauffman, *Unknotting unknots*, Am. Math. Mon. **121** (2014), 379–390.