

AKUSTIKA ANTIČNIH GLEDALIŠČ

GABRIJEL PFLAUM

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Predstavljen je fizikalni vidik akustičnih lastnosti antičnih gledališč, ki so jih po širšem Sredozemlju gradili stari Grki in Rimljani. Povzeti so različni pristopi k teoretični oceni zvočnega polja na mestu poslušalca, izsledki meritev in računalniških simulacij ter vpogledi v vprašanje, zakaj je razumljivost govora v antičnih gledališčih tako dobra. Jedro je posvečeno predstavitvi valovnih pojavov, predvsem sipanja na periodični površini in uklona na robu, ki skupaj z navadnim odbojem izoblikujejo zvočno podobo gledališča. Očrtan je opis teh pojavov v jeziku parcialnih diferencialnih enačb, čeprav so matematične in tehnične podrobnosti v večji meri izpuščene, zato naj sestavek bralcu služi kot uvod v obravnavano tematiko.

THE ACOUSTICS OF ANCIENT THEATRES

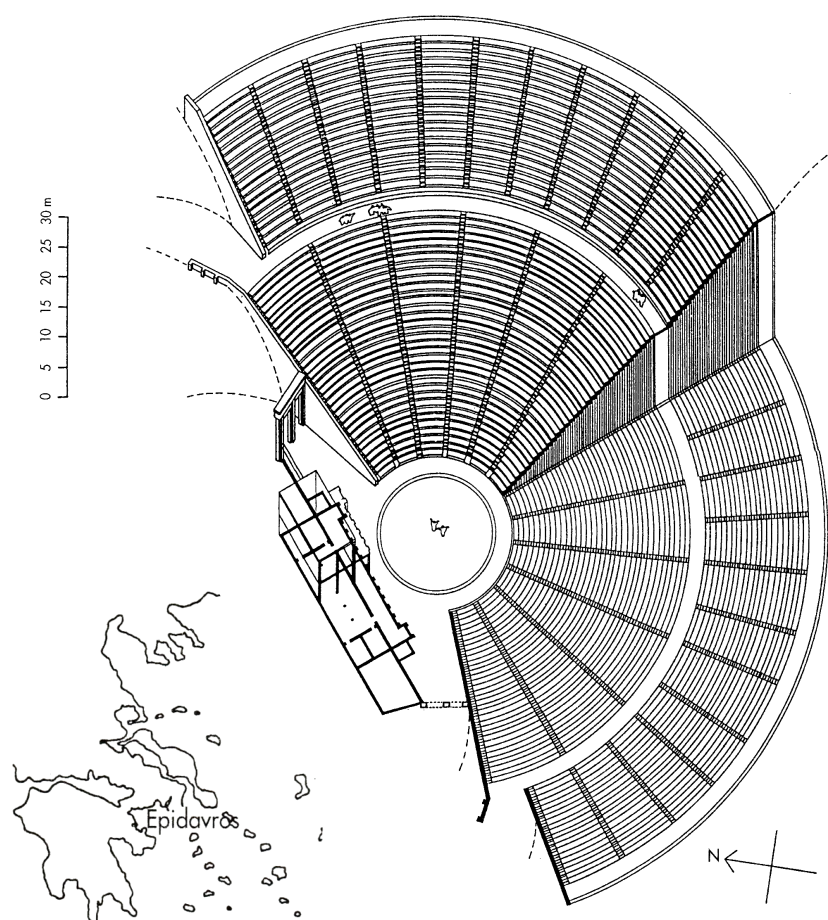
This paper presents the physical aspects of the acoustic properties of ancient theatres built by the ancient Greeks and Romans across the Mediterranean. Different theoretical approaches to assessing the sound field at the listener's position are summarised, alongside experimental and numerical results. The aim is to develop insight into why speech is remarkably intelligible in ancient theatres. The focus is on wave phenomena, particularly the scattering of sound by periodic surfaces and wedge diffraction. These phenomena, together with ordinary reflection, shape the sound in the theatre. A brief description in the language of partial differential equations is outlined, albeit without extensive technical and mathematical details. This article should therefore serve as an introduction to the subject.

1. Uvod

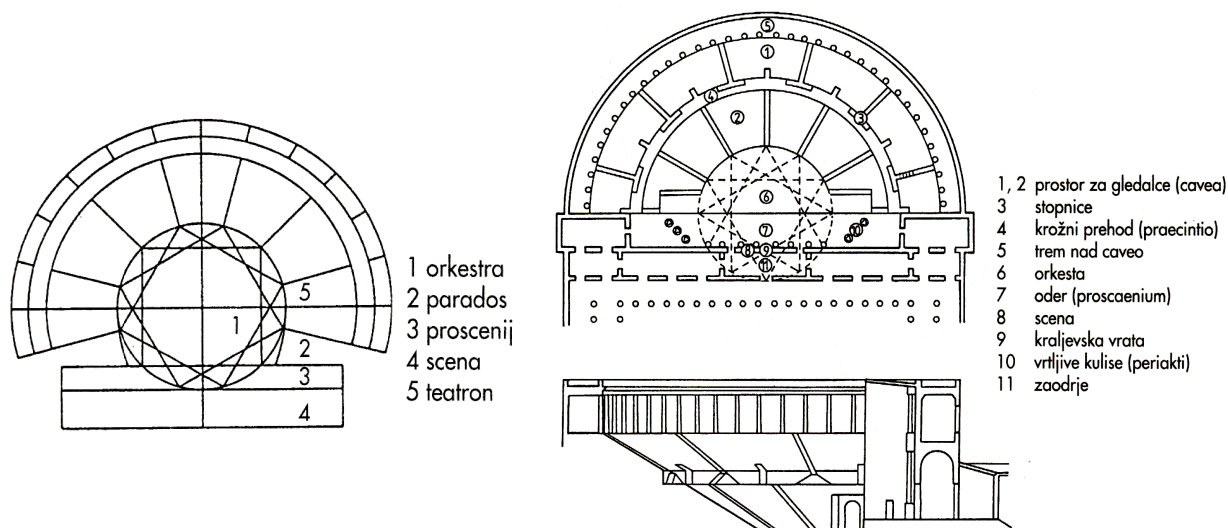
V antiki se je v gledališčih odvijal pomemben del javnega življenja. Sprva so imela grška gledališča obredno vlogo, kasneje pa so se v gledališčih odvijale umetniške uprizoritve in politični shodi. Največja grška gledališča so v razponu merila okoli 150 m in sprejela 30 000 gledalcev [1, 2]. Tudi iz zadnjih vrst so lahko obiskovalci jasno videli dogajanje na odru in razločno slišali glasove govornikov ali igralcev. To je danes morda še bolj presenetljivo, saj si že prireditev z bistveno manjšim številom poslušalcev ne moremo predstavljati brez električnega ozvočenja.

V klasični dobi se je v Grčiji uveljavilo polkrožno gledališče, vklesano v skalo na pobočju hriba. Krožni prostor na dnu gledališča se imenuje *orkestra*, kasneje so dodali še dvignjen oder, imenovan *proscenij*, za njim pa zidano ozadje, imenovano *scena*. Po polkrožni brežini, kjer je prostor za gledalce, *teatron*, so razporejeni kamniti sedeži. Rimska gledališča se po obliki in zgradbi nekoliko razlikujejo od grških. Niso jih vklesali v pobočje, ampak so jih postavili kot samostojne zgradbe. Tudi rimska gledališča so bila brez strehe, imela pa so višjo sceno, povezano z robom gledališča, da je bilo gledališče navzven okoli in okoli zaprto. Orkestra je bila manjša in polkrožna, medtem ko je bila pri grških gledališčih povsem okrogla ali vsaj podkvaste oblike [3, 1]. Za primerjavo gl. sliko 2.

Obravnavali bomo akustiko antičnih gledališč, torej njihove zvočne značilnosti. Akustika na splošno proučuje naravo zvočnega valovanja, načine vzbujanja in tehnologije sprejemanja zvoka ter vplive različnih struktur in prostorov na širjenje valovanja. Beseda izvira iz starogrške ἀκούω, *slišim*, kar nakazuje na še en enakovreden vidik akustike: človeški sluh in dojemanje zvoka. Že v svojem bistvu je torej akustika razdeljena med več vej sodobne znanosti. Z njo se med drugim ukvarjajo inženirji, arhitekti, biologi, psihologi in muzikologi. Čeprav se bomo osredotočili na fizikalni vidik akustike, konkretnije na obravnavo zvočnega valovanja v antičnih gledališčih, se moramo za celovito sliko neizogibno dotakniti tudi nekaterih drugih vidikov akustike. Predvsem bomo poskusili opredeliti povezavo med neoprijemljivo izjavo, da je akustika nekega prostora „dobra“, in fizikalnimi značilnostmi zvoka, ki k temu prispevajo.



Slika 1. Risba gledališča v Epidavru (4. st. pr. Kr.). Vir: [1, 214], © Založba Družina



Slika 2. Shema grškega gledališča (levo) in rimskega gledališča (desno), kot ju je opisal rimski arhitekt Vitruvij [3]. Rimsko gledališče se od grškega loči predvsem po čisti polkrožni obliki in višji scenski zgradbi. Vir: [1, 214, 290], © Založba Družina

Namen sledečega besedila je osvetliti dejstvo, da lahko poslušalci iz zadnjih vrst razločno slišijo govor z odra. V preteklosti je bilo temu vprašanju posvečenih kar nekaj raziskav in marsikatera ponuja tudi jasne odgovore. Žal pa se nekateri odgovori med seboj razlikujejo ali si celo nasprotujejo. Kljub predpisani obliki se geometrija med posameznimi gledališči nekoliko razlikuje in le nekaj jih je ohranjenih v celoti. Hkrati so pogoji, kdaj govor jasno razločimo, določeni s statističnimi poskusi in delno ostajajo subjektivni ter neopredeljivi. Zato ne bomo ponavljali napake in navajali enoznačnega odgovora, katera lastnost gledališč odločilno prispeva k dobri razumljivosti govora, temveč bomo le predstavili različne mehanizme širjenja zvoka v gledališču, izsledke raziskav in primerjave z meritvami ter jih navezali na spoznanja o človeškem dožemanju zvoka.

Večina meritev in teoretičnih analiz je bila opravljena na primeru gledališča v Epidavru v Grčiji, ki ga upodablja slika 1. Sodi med najbolj ohranjena grška gledališča in velja za zgleden primer gledališča tako z vidika arhitekture kot akustike. Spoznanja so dovolj splošna, da jih lahko pripišemo tudi ostalim antičnim gledališčem. Tudi za rimska gledališča, ki se sicer po obliki ločijo od grških, večina ugotovitev velja nespremenjeno. Potreben je le komentar glede vpliva višje scene.

2. Teoretična obravnava

2.1 O akustiki prostorov

Pri akustiki prostorov nas zanima, kako poslušalec sliši zvok, ki ga odda govornik ali glasbenik v drugem delu prostora. Človeško uho je sposobno zaznati zelo šibko nihanje zraka in se prilagajati jakosti zvoka, zato je od same jakosti pomembnejše razmerje med jakostjo vsebinskega zvoka in jakostjo šuma. Druga pomembna značilnost je časovni potek zamiranja zvoka po prenehanju delovanja izvora, ki ga določa odmev prostora. V zaprtih prostorih je število zvočnih odbojev od izvora do poslušalca veliko, zato se posamezni odmevi zlijejo v zvezen odzven, katerega trajanje je pogojeno z absorpcijo zvoka v stenah prostora. V glasbenih dvoranah je zaželen daljši odzven, za razločanje govora pa krajši, saj dolg odzven zamegli sklope besed. Nazadnje je pomembna še frekvenčna slika prostora, torej to, katere frekvence se v prostoru ojačajo in katere ošibijo. Za jasno razumljiv govor je pomembno ojačenje v okolici 1 kHz, ker je v tem frekvenčnem območju prisotna večina informacij, ki razločujejo med besednimi prvinami [4, 5].

Da bi jasneje opredelili pomen odmevov in časovnega poteka zvoka za razumevanje govora, so izvajali poskuse, kjer so poslušalcem predvajali dva enaka zvočna posnetka, med seboj zamaknjena za različne časovne intervale. Običajna metoda za vrednotenje razumljivosti govora, tako pri laboratorijskih poskusih kot pri dejanskih prostorih in gledališčih, je štetje pravilno razumljenih naključnih besed, ki jih predvajajo po zvočniku in jih morajo testni poslušalci prepoznati. Ugotovili so, da zamik do 35 ms pozitivno vpliva na razločanje besed, saj poslušalec oba izvira dojema kot enega samega, a višje jakosti. Zamiki, daljši od 50 ms, po drugi strani zmanjšajo razumljivost; ta se z večanjem časovnega zamika le še slabša [6, 5, 4, 7].

S fizikalnega vidika je akustika zanimiva, ker vključuje obravnavo raznolikih valovnih pojavov. Kot pri optiki ločimo valovno in geometrijsko akustiko, vendar je primerov, ko se lahko zanašamo izključno na geometrijsko akustiko, v primerjavi z optiko bistveno manj. To je posledica tega, da so značilne valovne dolžine zvoka primerljive z velikostjo objektov, ki so zoperstavljeni valovom. V velikih zaprtih prostorih lahko zaradi statističnega povprečenja mnogih prispevkov z geometrijsko akustiko dosežemo zadovoljive rezultate [4], kar ne velja za odprte prostore, kjer je število odbojev majhno. Teoretična obravnava antičnih gledališč je v primerjavi s sodobnimi gledališči posledično zahtevnejša in terja domiselno uporabo prilagojenih pristopov.

2.2 Opis zvočnega valovanja

Zvočno polje lahko enakovredno predstavimo z različnimi fizikalnimi polji: z lokalno hitrostjo nihanja zraka, spremembo gostote ali spremembo tlaka. Običajna izbira je tlačno polje, to je polje razlike med trenutnim lokalnim zračnim tlakom in med ravnovesnim tlakom. Razliko tlakov imenujemo tudi akustični tlak, za katerega velja valovna enačba [8]

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}} \approx 340 \text{ m s}^{-1}. \quad (1)$$

V enačbi je p akustični tlak, t je čas, v izrazu za hitrost zvoka c pa nastopata adiabatna stisljivost zraka χ_S in ravnovesna gostota zraka ρ_0 .

Zvok se od ovir odbija ali se v njih delno absorbira, kar opišemo z robnimi pogoji. V splošnem snovi pripišemo akustično impedanco [4], ki pove, na kakšen način se zvok od te snovi odbije in koliko zvoka se absorbira. Antična gledališča so skoraj izključno kamnita, zato lahko robne pogoje poenostavimo s predpostavko, da je kamen akustično trda snov, s čimer želimo povedati, da zrak ob kamnu ne more nihati in se v celoti odbije. Ker je hitrost nihanja zraka po Navier-Stokesovi enačbi povezana z gradientom tlaka, je tlačno polje ob akustično trdi steni podvrženo Neumannovemu robnemu pogoju

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0; \quad \mathbf{n} \dots \text{vektor normale površine med zrakom in kamnito steno.} \quad (2)$$

Za neskončno ravno površino tak robni pogoj močno poenostavi račune. Računamo lahko z žarki, ki se odbijejo od površine, kot se svetlobni žarki odbijejo od zrcala. Izvore valovanja zrcalimo čez površino in z upoštevanjem polj dejanskega in zrcaljenega izvora najdemo rešitev za skupno zvočno polje vpadnega in odbitega valovanja.

Prisotnost točkastega izvora, ki je relativno dober približek za govorčeva usta, upoštevamo v nehomogeni valovni enačbi. Rešitev v praznem prostoru je tlačno polje, ki pada obratno sorazmerno z razdaljo od izvora in se širi radialno v vse smeri [8]:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -4\pi A \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) e^{-i\omega t} \implies p = \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)}, \quad r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_o|. \quad (3)$$

Kot je v navadi, je pri tem zapisu fizikalna rešitev le realni del zapisanega tlačnega polja. Amplituda vzbujanja je označena z A , ω je krožna frekvenca vzbujanja, $k = \omega/c$ velikost valovnega vektorja, $\mathbf{r}_o$ položaj izvora in δ Diracova funkcija delta v treh dimenzijah. Po vzoru svetlobnega valovanja si lahko predstavljamo ravne žarke, ki se od izvora zvoka širijo v vse smeri in so v vsaki točki pravokotni na valovne fronte. Ta predstava nam je posebno v pomoč, kadar računamo v približku geometrijske akustike, saj z risanjem žarkov odmislimo zapleten valovni opis.

Pogosto nas bolj kot trenutni tlak zanima energija, ki jo nosi valovanje. Vpeljemo intenziteto ali jakost zvoka I , ki ustreza povprečnemu energijskemu toku, ter njeno različico v decibelih, merjeno v logaritemski skali [8]:

$$I = \frac{|p|^2}{2\rho_0 c}, \quad I_{[\text{dB}]} = 10 \log_{10} \frac{I}{I_r}. \quad (4)$$

Jakosti v decibelih vselej primerjamo z neko referenčno intenziteto I_r . Ojačenje 3 dB ustreza podvojeni jakosti, saj je $10 \log 2 \approx 3$. Ključno je, da jakost valovanja točkastega izvora v praznem prostoru pada s kvadratom razdalje, kar je v skladu z energijskim zakonom.

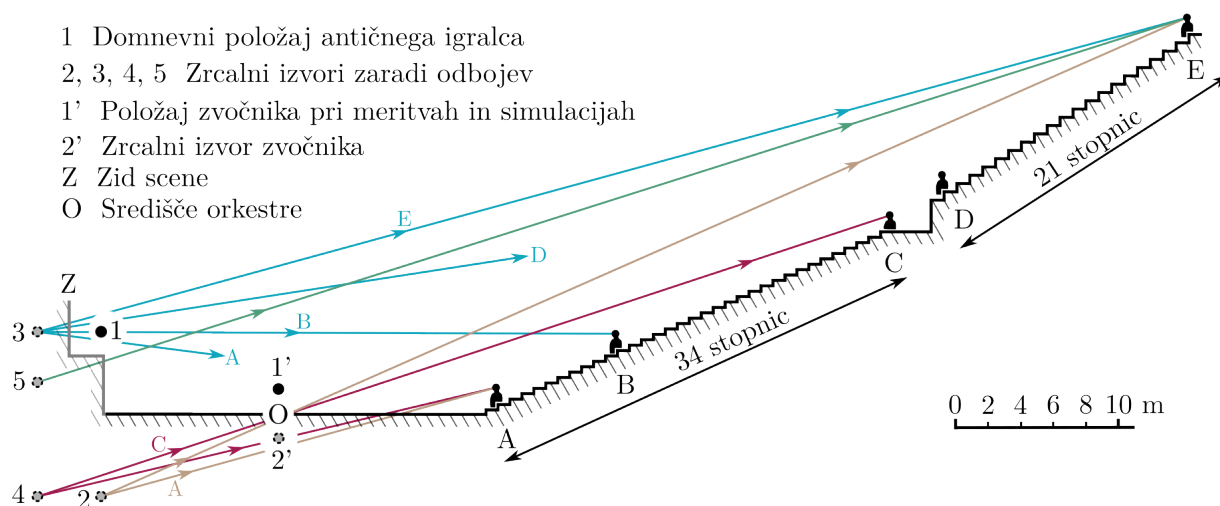
2.3 Okvirji obravnave akustike antičnih gledališč

Takoj povejmo, da ne nameravamo računati celotnega zvočnega polja. Analitično to ni izvedljivo niti v mnogo preprostejših primerih, numeričen izračun [9] pa ob mnogih težavah v najboljšem primeru pove toliko kot meritve. Z različnimi, vedno naprednejšimi metodami bomo skušali opisati, kako se zvok širi od vnaprej določenega položaja igralca na odru do nekaj značilnih položajev poslušalcev v prostoru za gledalce.

Začeli bomo s preprostimi geometrijskimi metodami [6], s katerimi lahko tudi brez računalnika pridemo do osnovnih sklepov. Za natančnejšo časovno in frekvenčno sliko bomo morali upoštevati uklonske popravke, ki jih geometrijska akustika ne zaobjame. Pogledali bomo, kako stopničasta struktura prostora za gledalce kvalitativno spremeni frekvenčno podobo zvoka na mestu poslušalca [10], in na koncu orisali obravnavo uklonskih pojavov v frekvenčni in časovni sliki z geometrijsko teorijo uklona [5], ki do zdaj ponuja najcelovitejšo obravnavo akustike antičnih gledališč in hkrati dopušča nazorno vrednotenje posameznih prispevkov.

2.4 Geometrijski pristop

Z risanjem žarkov od izvora do poslušalca lahko ocenimo jakosti in časovne zamike odbojev od različnih površin. Vzamemo, da je igralec točkast izvor valovanja, zato jakost vzdolž vsakega žarka pada s kvadratom razdalje, časovni zamik pa je sorazmeren z razdaljo. Nato seštejemo prispevke vseh tistih žarkov, ki prečkajo mesto poslušalca – v praznem prostoru je tak žarek le en, zaradi enkratnih ali večkratnih odbojev od površin pa je primernih žarkov več. Namesto da bi risali lomljene odbite žarke, izvore zrcalimo čez odbojne površine in gledamo ravne žarke zrcalnih izvorov, kot prikazuje slika 3. Tako ugotovimo, kolikšen delež jakosti prispeva odboj od tal orkestre, odboj od scene ter dvojni odboj od scene in od tal. Interferenco med žarki na tej točki zanemarimo, saj je spektralna sestava človeškega glasu dovolj raznolika, da lahko seštevamo povprečne jakosti. Odbojev od stopnic zaradi njihove neravne strukture ne moremo upoštevati. Tej težavi se bomo posvetili kasneje.



Slika 3. Poti odbitih žarkov (2-5) do nekaj položajev poslušalcev (A-E). Prikazani so na preseku gledališča v Epidavru. Zaradi polkrožne oblike gledališča v prvem približku zadostuje upoštevati žarke v ravnini, saj se prostorski žarki ne odbijejo pod primernim kotom, da bi dosegli poslušalca. Prirejeno po [6, 140].

Izračuni pokažejo [6], da se skupna jakost v primerjavi s poljem v praznem prostoru zaradi odbojev poveča za 5,3 dB v sprednjih in 6,5 dB v zadnjih vrstah. Če ne bi bilo odboja od tal, bi bili ojačeni le 2,4 dB in 2,8 dB. Odločilni so tudi kratki časovni zamiki odbojev glede na neposredni žarek, ki so zbrani v tabeli 1.

Tabela 1. Časovni zamik med neposrednim žarkom (1) in odbitim žarkom (2-5) ter razlika v jakosti. Številke so okvirne.

Δt [ms] (Δt)	1-2	1-3	1-4	1-5	1'-2'
A	2 (−0,2 dB)	12 (−1,3 dB)	14 (−1,5 dB)	11 (−1,2 dB)	1 (−0,2 dB)
B	4 (−0,4 dB)	12 (−1,0 dB)	16 (−1,4 dB)	12 (−1,1 dB)	2 (−0,3 dB)
C/D	7 (−0,4 dB)	12 (−0,7 dB)	19 (−1,0 dB)	13 (−0,8 dB)	3 (−0,2 dB)
E	10 (−0,4 dB)	11 (−0,5 dB)	21 (−0,8 dB)	14 (−0,6 dB)	4 (−0,2 dB)

Najopazneje prispeva odboj od tal, ki je po jakosti najmočnejši in poslušalca doseže najhitreje za neposrednim zvokom. Izračunali so še značilne vrednosti za rimski gledališči v Aspendu v Turčiji in v Orangeu v Franciji. Povsod je odboj od tal za neposrednim žarkom zakasnen za med 4 in 8 ms, razlika v jakosti pa je manjša od 0,4 dB [6].

2.5 Sipanje valovanja na periodični površini

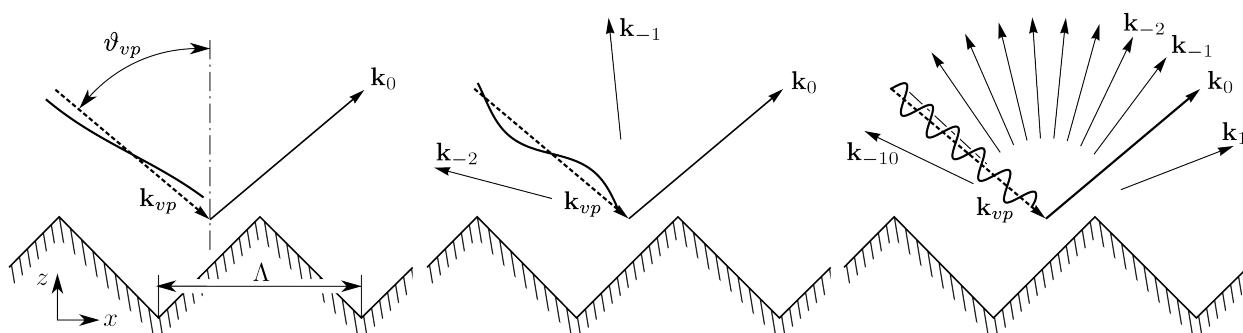
V prejšnjih izračunih smo izpustili pomemben prispevek: odboj od stopnic v prostoru za gledalce. Stopnice lahko obravnavamo kot periodično neravno površino, ki v nasprotju s popolnoma ravno površino valovanje odbije v več smereh – rečemo, da se valovanje na površini siplje. Druga pomembna razlika v primerjavi z ravno površino je, da je način sipanja močno odvisen od frekvence ali valovne dolžine vpadnega valovanja.

Popoln izračun sipanja na periodični površini je tehnično dokaj zahteven in dokončno izvedljiv le numerično [11, 12, 13, 14, 15], zato bomo predstavili le nekaj splošnih značilnosti in povzeli rezultate numerične analize [10] za primer gledališča v Epidavru.

Gledamo ravno valovanje z valovno dolžino λ , ki na površino s periodo Λ vпада pod kotom ϑ_{vp} glede na pravokotnico na povprečno ravnino površine. Pravokotnica naj kaže v smeri z , površina pa naj bo periodična v smeri x . Tlak vpadnega valovanja je potem

$$p_{vp} = p_0 e^{ik(x \sin \vartheta_{vp} - z \cos \vartheta_{vp})}, \quad (5)$$

kjer je $k = |\mathbf{k}_{vp}| = 2\pi/\lambda$ velikost valovnega vektorja vpadnega valovanja. Časovne faktorje $e^{-i\omega t}$ bomo sistematično izpuščali.



Slika 4. Sipanje ravnega vala na periodični površini, ko je valovna dolžina mnogo daljša od periode površine (levo), primerljiva periodi (na sredini) ali bistveno krajša od periode (desno).

Skupno tlačno polje sestavljata vpadno in sipano valovanje. Rayleigh je preučeval sipanje zvočnega valovanja, ki na površino vпада pravokotno [12]. Očitno je, da mora biti v tem primeru zaradi simetrije tudi skupno tlačno polje v smeri x periodično z isto periodo, kot jo ima površina. Če valovanje na površino ne vпада pravokotno, se ob premiku koordinatnega sistema za Λ v smeri x

tlačno polje spremeni za fazni faktor $e^{ik\Lambda \sin \vartheta_{vp}}$, zato lahko iščemo skupno tlačno polje z nastavkom oblike

$$p = p_{vp} + e^{ikx \sin \vartheta_{vp}} \psi, \quad (6)$$

kjer je ψ neznana funkcija, v smeri x periodična s periodo Λ .

Funkcijo ψ lahko zaradi periodičnosti razvijemo v Fourierovo vrsto po baznih funkcijah $e^{i2\pi n x/\Lambda}$, kar nas privede do končne oblike tlačnega polja vpadnega in sipanega valovanja:

$$p = p_{vp} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{ik(x \sin \vartheta_n + z \cos \vartheta_n)}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sin \vartheta_n &= \sin \vartheta_{vp} + \frac{\lambda}{\Lambda} n, \\ \cos \vartheta_n &= \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta_n}. \end{aligned} \quad (8)$$

Tu smo $\sin \vartheta_n$ razbrali iz produkta faznega predfaktorja v enačbi (6) z razvojem ψ , faktor $e^{ikz \cos \vartheta_n}$ pa smo dodali, da vsak člen v vrsti zadosti valovni enačbi. Velja pripomniti, da simbolov $\sin \vartheta_n$ in $\cos \vartheta_n$ ne gre brati nujno kot „kotne funkcije kota ϑ_n “. Ta interpretacija je smiselna le, kadar je $\sin \vartheta_n$ med -1 in 1 , sicer pa moramo nanju gledati kot na enodelna simbola. Koeficiente a_n lahko pri določenih robnih pogojih in obliki površine izračunamo numerično (Dodatek A), vendar lahko veliko povemo že iz oblike rezultata brez poznavanja točnih vrednosti koeficientov. Marsikateri zaključek je enak kot pri uklonski mrežici, ki jo poznamo iz optike.

V enačbi (8) vidimo, da za dovolj velike ali za dovolj negativne n vrednosti $\sin \vartheta_n$ po absolutni vrednosti presežejo 1. Ustrezni $\cos \vartheta_n$ so tedaj imaginarni. Te člene v razvoju imenujemo *evanescentni* valovi, za katere je značilno, da v smeri z eksponentno pojemajo z oddaljenostjo od površine. Daleč od površine je njihov prispevek zanemarljiv. V vrsti ostane le končno število členov z dovolj majhnim n , ki zares predstavljajo valovanje, ki se širi v prostor. Tem rečemo *potujoči* valovi.

Potujoči val z indeksom $n = 0$ ustreza zrcalnemu odboju, kakršnega bi dobili, če bi bila površina povsem ravna. Rečemo mu tudi 0. red uklona. Potujočim valovom z večjim indeksom n rečemo višji uklonski redi. Pozitivni uklonski redi, tisti, ki imajo n večji od 0, se odbijejo pod večjim kotom, kot bi se valovanje odbilo od ravne površine. Negativni uklonski redi z negativnimi n pa se odbijejo pod manjšim kotom. Valovanje se odbije tudi pod negativnimi koti – ta pojav imenujemo *povratno sipanje*. Različne uklonske rede vidimo na sliki 4.

Zanimivo je opazovati spreminjanje uklonskih redov, ko večamo frekvenco valovanja. Za majhne frekvence ali velike valovne dolžine so vsi členi v vrsti razen ničtega evanescentni. Gre za primer, ko so valovi veliko daljši od neravnosti površine, zato se valovanje odbije, kot da bi bila površina ravna. Edini potujoči val je ničti red uklona, ki ga vidimo na sliki 4 levo. Z večanjem frekvence ali krajšanjem valovne dolžine se ob robovih začnejo pojavljati novi uklonski redi. Ko je valovna dolžina valovanja primerljiva periodi površine, je poleg ničtega uklonskega reda prisotnih še nekaj negativnih uklonskih redov, kot prikazuje slika 4 na sredini. Pri visokih frekvencah ali kratkih valovnih dolžinah pa je število uklonskih redov veliko; prisotni so tako pozitivni kot negativni uklonski redi, kot jih vidimo na sliki 4 desno.

Povejmo sedaj, kako to vpliva na zvok, ki ga sliši poslušalec, sedeč na eni od stopnic. Če v prostoru za gledalce ne bi bilo stopnic oziroma bi bila površina ravna, bi morali resnični izvor skupaj z vsemi že omenjenimi zrcalnimi izvori še enkrat zrcaliti čez klančino prostora za gledalce in upoštevati nove prispevke. Ker poslušalec sedi blizu površine, bi bili ti novi zrcalni prispevki le malo zakasnjeni in oslabljeni glede na prejšnje, zato bi bil učinek odboja od klančine v grobem podvojena intenziteta ali dodatno ojačenje 3 dB.

Prisotnost stopnic močno spremeni odboj od klančine prostora za gledalce. Numerični izračuni [10] so ob upoštevanju prostorske geometrije gledališča pokazali, da se intenziteta v primerjavi

z ravno površino zaradi sipanja v različne smeri na splošno zmanjša, vendar učinek ni enak za vse frekvence. Pri frekvencah nad okoli 500 Hz, kar lahko po enačbi (8) tudi ocenimo iz razdalje med stopnicami, z nezanemarljivo intenziteto nastopi -2. red uklona. Na mestu poslušalca konstruktivno interferira z vpadnim valovanjem, zato se nad 500 Hz intenziteta poveča: stopnice v prvem približku delujejo kot visokoprepustni filter. Pri višjih frekvencah na mestu poslušalca izmenično interferirajo višji uklonski redi, zato v frekvenčnem spektru opazimo značilno nihanje jakosti [13]. Še natančneje bomo vlogo stopnic preučili v nadaljevanju, že ta ocena pa nam da slutiti, da lahko stopnice močno vplivajo na frekvenčno sliko sprejetega zvoka.

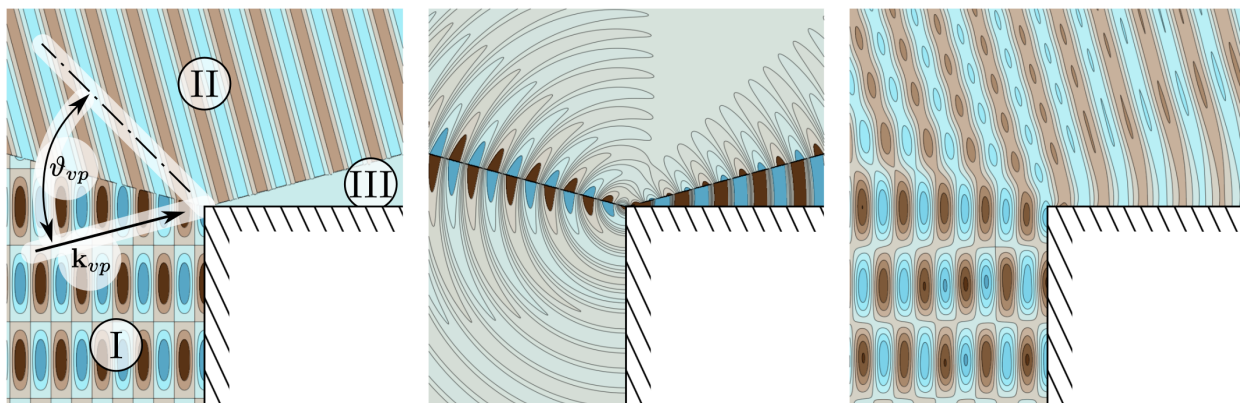
2.6 Geometrijska teorija uklona

Približek stopnic kot neskončne periodične površine je služil za kvalitativno razlago frekvenčnih pojavov, ki jih samo z ravno površino ne moremo pojasniti. Stopnice v resnici niso neskončne in vrh vsega valovanje ne vpada na vse stopnice pod enakim kotom. Metoda tudi ne ponuja nikakršnega vpogleda v časovni potek sipanja. Če želimo torej natančneje ovrednotiti vlogo stopnic, da bomo mogli rezultate hkrati primerjati z meritvami [16], moramo upoštevati vsako stopnico zase. Glede na to, da že prej nismo uspeli v celoti brez pomoči računalnika, je tukaj upanja še toliko manj. Ponovno bomo orisali le ozadje matematične teorije [17, 18, 19, 20], ki je v tem primeru še bolj zapletena, in predstavili rezultate numerične analize [5, 21].

Valovanje se na robu posamezne stopnice uklanja. Problem uklona na robu je s kompleksno analizo točno rešil Sommerfeld [19], vendar je v praksi veliko uklonskih problemov lažje obravnavati z asimptotskimi popravki geometrijske slike, kar je pod imenom *geometrijska teorija uklona* uvedel Keller [22]. Tlačno polje razdelimo na geometrijski in uklonski del

$$p = p_{geo} + p_{ukl},$$

kjer je geometrijski del tak, kot ga predvidevajo geometrijske metode zrcaljenja oziroma risanja žarkov. Kakor vidimo na sliki 5 levo, je v različnih območjih geometrijski del bodisi vsota vpadnega in odbitega valovanja, samo vpadno valovanje ali popolna odsotnost valovanja v geometrijski senci. Meje med temi tremi območji so popolnoma ostre.



Slika 5. Uklon ravnega valovanja na robu stopnice (barva ponazarja tlačno polje). Na levi sliki je podoba valovanja, kot jo predvideva geometrijska akustika: v območju I vpadni val interferira z odbitim valom, v območju II se vpadni val neovirano širi naprej, območje III je območje geometrijske sence. Na srednji sliki je prikazan uklonski del, ki se širi radialno navzven od roba stopnice, in na desni sliki vsota obeh prispevkov.

Uklonski del poskrbi, da je skupno tlačno polje zvezno in se širi tudi v področje geometrijske sence. Upodobljen je na sliki 5 na sredini. Točno uklonsko polje za ravno vpadno valovanje je mogoče izraziti s kompleksnim integralom ter poenostaviti v približen izraz za dovolj velike oddaljenosti od

roba stopnice [19]

$$p_{ukl} \approx p_0 \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} D(\vartheta, \vartheta_{vp}), \quad (9)$$

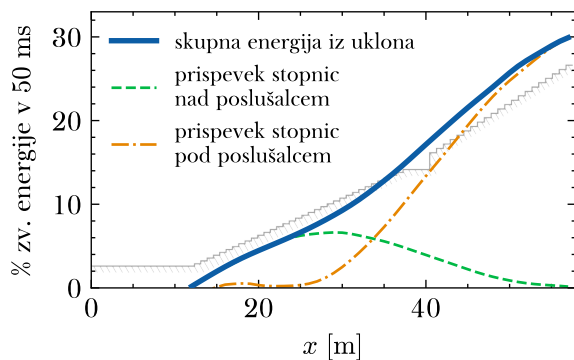
kjer je p_0 amplituda vpadnega valovanja na robu stopnice, r razdalja od roba stopnice do točke, kjer opazujemo valovanje, ϑ polarni kot točke opazovanja, merjen od zunanje simetrale kota stopnice, ϑ_{vp} kot, pod katerim valovanje vpada na stopnico, prav tako merjen od simetrale, ter k velikost valovnega vektorja vpadnega valovanja.

Funkcija D opisuje kotno odvisnost uklonskega popravka. Ekspliciten izraz zanjo (Dodatek B) razkrije, da ni odvisna od valovne dolžine vpadnega valovanja, ampak le od kota oz. ostrine stopnice, ki je v našem primeru kar $\pi/2$. Na to namiguje že simetrija problema. Uklonsko polje si torej lahko predstavljamo kot polje izvorov z neenakomerno kotno porazdelitvijo sevanja, razporejenih po robu stopnice.

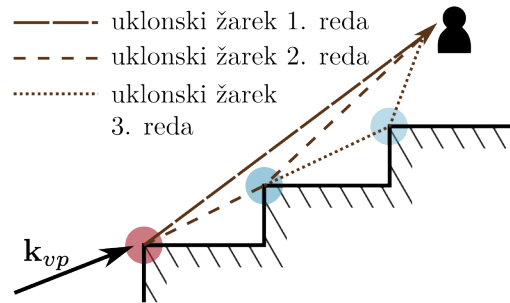
Ker je v prostoru za gledalce veliko stopnic, moramo upoštevati uklon na vsaki izmed njih. Na najnižji stopnici se uklanja valovanje, ki je vsota neposrednega valovanja in odbojev od tal ter scene. Na drugi stopnici se poleg omenjenih prispevkov uklanja še uklonski prispevek s prejšnje stopnice. Tako bi morali na vsaki naslednji stopnici rekurzivno upoštevati še uklonske prispevke vseh prejšnjih stopnic, kot nakazuje slika 6. Vendar so uklonski žarki v primerjavi z geometrijskimi žarki šibki, zato za prvo oceno zadostuje upoštevati le uklonske žarke prvega reda, torej tiste, ki na vsaki stopnici izvirajo od geometrijskih žarkov brez prejšnjih uklonskih popravkov.

Frekvenčni spekter uklonskega polja dobimo s seštevanjem uklonskih prispevkov na mestu poslušalca.

Uklonsko polje, navedeno v enačbi (9), velja za ravno vpadno valovanje; pravilneje je upoštevati uklonsko polje za vpadno valovanje točkastega izvora, kot so to izvedli v numerični simulaciji [5]. Upoštevali so uklon neposrednih žarkov in žarkov, odbitih od tal. Poleg tega so uklonska polja s Fourierovo transformacijo pretvorili v funkcije impulznega odziva [17], ki predstavljajo časovni potek uklona za izvirni signal s sunkovno časovno odvisnostjo $\delta(t)$. Na ta način so na mestu poslušalca izračunali natančno frekvenčno in časovno zvočno podobo.



Slika 7. Delež zvočne energije, ki jo prispeva uklon na stopnicah. Upoštevani so žarki, ki poslušalca dosežejo v prvih 50 ms po neposrednem žarku. Prirejeno po [5].

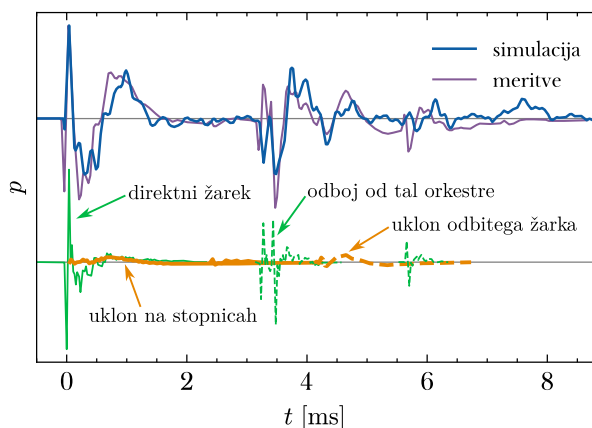


Slika 6. Poleg neposrednega in odbitih žarkov, ki niso narisani, poslušalca doseže več uklonskih žarkov. Uklonski žarek višjega reda izvira od uklonskega valovanja s prejšnjih stopnic. Prirejeno po [5].

Da bi ovrednotili vpliv uklonskih prispevkov, so za različna mesta v gledališču izračunali, koliko zvočne energije izvira od uklona na robovih vseh stopnic skupaj [5]. Pri tem so upoštevali le tiste prispevke, ki so za neposrednim žarkom zakasneni za manj kot 50 ms, ker le ta del zvočne energije prispeva k razumljivosti govora. Ugotovili so, da delež uklonske energije narašča z oddaljenostjo od središča in pri najbolj oddaljenih poslušalcih doseže 30 %, kot lahko razberemo na sliki 7. Simulacijo bi v marsičem lahko še izboljšali, na primer z upoštevanjem uklonskih žarkov višjega reda in drugih odbojev, ne le od tal orkestre, vendar se že ta poenostavljeni model dobro ujema z meritvami.

3. Primerjava z meritvami in ugotovitve

Leta 2004 so v gledališču v Epidavru izvedli obsežne akustične meritve [16], s katerimi so kasneje primerjali rezultate opisanih računalniških simulacij, predvsem zadnje z geometrijsko teorijo uklona [5]. Scenska zgradba ni več ohranjena, zato vse meritve in simulacije upoštevajo le odboj od tal in sipanje na stopnicah v prostoru za gledalce. Vpliv scenske zgradbe smo v grobem ovrednotili že v razdelku o geometrijski obravnavi. Za izvor je v meritvah služil zvočnik, ki seva enakomerno v vse smeri, njegov položaj v meritvah [16] in simulaciji [5] je na sliki 3 označen z 1'. Na različnih mestih v gledališču so izmerili frekvenčni spekter in časovni potek, za katerega so po zvočniku predvajali kratek sunek.



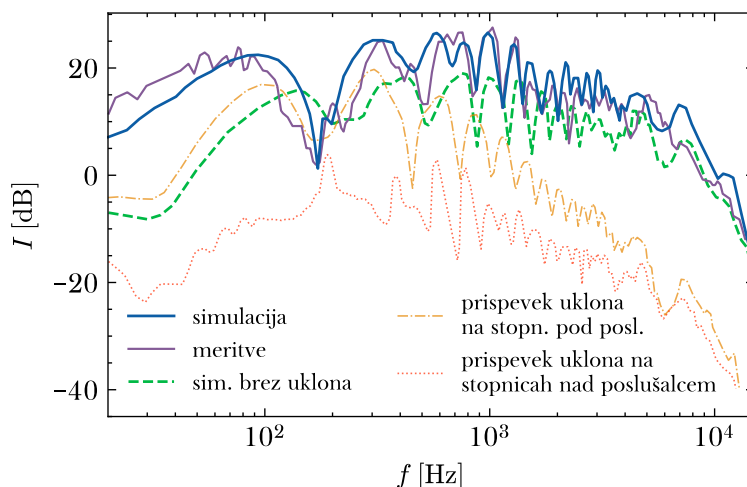
Slika 8. Izračunani in izmerjeni časovni potek zvočnega valovanja na mestu med poslušalcema D in E (gl. sliko 3). Spodaj so ločeni posamezni prispevki v simulaciji. Prirejeno po [5].

v kratkem časovnem intervalu za prihodom neposrednega signala. Natančna meritev in simulacija časovnega poteka razkrije, da v sprednjih vrstah poslušalca v približno 1 ms za neposrednim zvokom najprej doseže odboj od tal orkestre, nato pa čez nekaj milisekund še uklonski prispevki stopnic nad poslušalcem, ki jih skupaj zaobjamemo z izrazom povratno sipanje. Ocene [7, 5] namigujejo, da povratno sipanje v prvih vrstah negativno vpliva na razločanje govora, predvsem zaradi izrazite harmonske frekvenčne strukture. Vendar so v prvih vrstah drugi prispevki bistveno opaznejši in je govor zaradi visoke jakosti že tako dovolj razločen.

V zadnjih vrstah uklonski prispevki sipanja na stopnicah poslušalca dosežejo še pred odbojem od tal, kot vidimo na sliki 8. Iz slike 7 lahko ocenimo, da v tem primeru sipanje na stopnicah prinese znaten delež zvočne energije v zelo kratkem času in ima tudi ugodnejšo frekvenčno sestavo od povratnega sipanja, zato lahko precej gotovo rečemo, da v zadnjih vrstah sipanje na stopnicah pripomore k razumljivosti. To izjavo podpre primerjava gledališča v Epidavru z gledališčem v Sirakuzah. Zaradi naravne oblikovanosti pobočja so v Sirakuzah zgornje vrste sedežev postavljene na klančini z manjšim naklonom

Predstavljene geometrijske ocene in računalniške simulacije skupaj z meritvami kažejo, da lahko v zadnjih vrstah gledališča pričakujemo ojačenje med 5 dB in 10 dB v primerjavi s prostim poljem [16, 6, 21, 9]. Pri taki oddaljenosti, kjer je jakost govornega signala pogosto le malo nad jakostjo šuma, že majhno ojačenje 3 dB lahko pomeni ključno razliko za razumevanje govora. Vse raziskave pa so enotne v ugotovitvi, da bolj od samega ojačenja k razumljivosti pripomore svojevrsten časovni potek odbojnih in uklonskih zvočnih prispevkov, ki je povsem drugačen od tistega v zaprtih prostorih.

Povprečna jakost v samo 60 ms pade za 40 dB [16], torej je vsa zvočna energija zbrana



Slika 9. Izračunani in izmerjeni frekvenčni spekter na mestu med poslušalcema D in E (gl. sliko 3). Prirejeno po [5].

od vrst v spodnjem delu prostora za gledalce. Opazili so, da razumljivost v tem gledališču v zadnjih vrstah pada veliko hitreje, kot bi lahko pripisali le razdalji. Razlog za to je, da se zaradi majhnega naklona žarki na robovih stopnic ne morejo sipati [7].

Kljub temu da poglobitve zaključke o uspešnosti gledališč pri prenosu govora do poslušalca ponuja časovna obravnava, je zanimivo na kratko razčleniti še frekvenčno podobo. V geometrijski obravnavi smo interferenčne pojave med neposrednim in odbitimi žarki povsem zanemarili. Frekvenčni spekter teh dveh prispevkov brez drugih uklonskih popravkov, ki ga prikazuje zelena črtkana črta na sliki 9, pokaže, da se interferenca odraža v oslabitvah pri določenih frekvencah, pri katerih se žarka srečata v nasprotni fazi. Uklonski pojavi so pomembni predvsem pri srednjih in nizkih frekvencah, saj pri višjih frekvencah nad približno 5 kHz valovne dolžine postanejo tako majhne, da uklonski popravki zamrejo na kratkih razdaljah in preidemo v področje veljavnosti geometrijske akustike.

Skupen frekvenčni spekter, na sliki 9 zarisan v polni modri črti, lahko opredelimo s tremi značilnimi območji. Opazni sta ojačeni v področju okoli 100 Hz in v področju od 500 Hz do 2000 Hz ter izrazita oslabitev v okolici 180 Hz. Slednjo lahko pripišemo interferenci med uklonskimi žarki [5]. Ojačenje okoli 1000 Hz nedvomno pozitivno vpliva na razločnost govora, medtem ko za drugo ojačenje okoli 100 Hz tega ne moremo trditi z gotovostjo. Po eni strani so v tem območju osnovne frekvence moškega govora, po drugi strani pa je tudi šum, običajno prisoten v gledališču, pretežno sestavljen iz nizkih frekvenc [5].

Po vsem tem se lahko vprašamo o splošnosti ugotovitev. Veliko pozornosti smo namenili sipanju v prostoru za gledalce. Metode, ki smo jih uporabili, gotovo ne veljajo v primeru prisotnosti občinstva. Izkušnje kažejo, da se razločnost govora tudi ob polnem gledališču ne poslabša bistveno. Lahko sklepamo, da se valovanje sipa tudi na gledalcih, zaradi manj ostrih kotov površin pa uklonski žarki poslušalca dosežejo še močnejši in z majhnim časovnim zamikom. Del energije se v občinstvu absorbira, vendar to hkrati tudi zmanjša odmevni čas. Klepetanje gledalcev je manj moteče kot v zaprtih prostorih, ker se vsled odsotnosti zveznega odmeva ne zlije v trajen šum in ker zaradi geometrije ni enako ojačano kot glas igralcev [7, 16].

Pri iskanju lokacije gledališča so arhitekti namenili veliko pozornosti izbiri primerne okolja [3, 16]. Grška gledališča so se pogosto odpirala proti mirnim dolinam, kjer ni bilo okoliškega šuma. Rimska gledališča so bila po navadi zgrajena v mestih, kar je ob stalnem vrvežu zahtevalo večjo zaprtost zgradbe. Višja in širša scenska stavba sicer učinkovito zaustavi šum z ulic, a tudi poveča število poznih odbojev, ki zameglijo govor. To težavo delno odpravi dejstvo, da scenski zid v rimskih gledališčih ni bil raven, ampak reliefen in z okni, zato so bili pozni odboji razpršeni in manj moteči.

Zanimivo vprašanje je še, kako se je akustika v antičnih časih razlikovala od današnje. Scenske zgradbe so ohranjene le izjemoma, vendar lahko sklepamo, da so glas igralcev še ojačale, če so le stali dovolj blizu zidu. Erozijske površine vsaj v dobro ohranjenih gledališčih po ocenah z računalniškimi simulacijami [21] zvočne podobe bistveno ne spremenijo.

4. Zaključek

S seštevanjem prispevkov odbojev od različnih površin in nadgradnjo z upoštevanjem uklonskih popravkov, bodisi s pogledom na stopnice v prostoru za gledalce kot na celoto bodisi z natančnejšo obravnavo uklona na robovih posameznih stopnic, smo uspeli ovrednotiti lastnosti zvočnega polja na mestu poslušalca in razčleniti njegovo sestavo. Dobro ujemanje računalniških simulacij z meritvami in z izkušnjami gledalcev v pravih gledališčih nas je opogumilo, da smo ocenili vloge posameznih prispevkov pri uspešnem prenosu glasu z odra do poslušalca, čeprav kriteriji ostajajo ohlapni in bi bilo nespametno izpostavljati pomen enega ali drugega prispevka nad ostalimi.

V grobem lahko izjemne akustične lastnosti gledališč pripišemo njihovi obliki, ki je zaslužna za

to, da vsi prispevki, uklonski ali odbojni, poslušalca dosežejo skoraj sočasno. Ker gledališča nimajo strehe, valovanje po enem ali največ nekaj odbojih zapusti prostor, zato ne pride do zakasnenih odmevov, ki bi motili razumljivost govora – po poskusih o dožemanju govora je ravno zgoščen časovni potek odbojev odločilen za razločevanje besed. Pri tem so pomembni prispevki odboja od tal orkestre, sipanja na stopnicah v prostoru za gledalce in prispevek odboja od scene, če je ta prisotna. Vsi omenjeni prispevki poslušalca dosežejo v manj kot 35 ms za neposrednim zvokom, kar je eksperimentalno določena meja za pozitiven vpliv na dožemanje govora. Tudi frekvenčni odziv, ki je posledica interference med različnimi prispevki in odvisnosti uklonskih pojavov od valovne dolžine, je na splošno ugoden glede na spoznanja o frekvenčni sestavi človeškega govora.

Ne vemo, ali so v antiki gledališča gradili s tem zavedanjem. Dejstvo je, da so poznali valovno naravo zvoka in so pri načrtovanju gledališč namenili veliko pozornosti tudi zvoku [3], čeprav je bolj verjetno, da so oblikovno zasnovo podredili vizualnim vodilom. Ne glede na to, ali je dobra akustika antičnih gledališč le plod naključij ali skrbnega načrtovanja, arhitektom še vedno lahko služi za vzor pri snovanju sodobnih dvoran [6].

LITERATURA

- [1] J. Marinko, *Antična arhitektura*, Družina, 1997.
- [2] G. Rupprecht, R. Goggräfe in H. Mikler, *Theatrum*, <https://www.theatrum.de/home.html>, dostopano: 9. 2. 2025.
- [3] Vitruvius Pollio, *O arhitekturi / Vitruvij*, Fakulteta za arhitekturo, 2009, prevod Fedja Košir.
- [4] P. M. Morse in R. H. Bolt, *Sound waves in rooms*, Rev. Mod. Phys. **16** (1944), 69–150.
- [5] K. Kaleris, G. Moiragias, P. Hatziantoniou in J. Mourjopoulos, *Time-frequency diffraction acoustic modeling of the Epidaurus ancient theatre*, Acta Acust. **7** (2023), 67.
- [6] F. Canac, *L'Acoustique des théâtres antiques, ses enseignements*, Centre national de la recherche scientifique, Paris, 1967.
- [7] R. S. Shankland, *Acoustics of Greek theatres*, Physics Today **26** (1973), št. 10, 30–35.
- [8] L. E. Kinsler in A. R. Frey, *Fundamentals of acoustics*, J. Wiley & Sons; Chapman & Hall, 1950.
- [9] T. Lokki, A. Southern, S. Siltanen in L. Savioja, *Acoustics of Epidaurus - studies with room acoustics modelling methods*, Acta Acustica united with Acustica **99** (2013), 40–47.
- [10] N. Declercq in C. Dekeyser, *Acoustic diffraction effects at the hellenistic amphitheater of Epidaurus: Seat rows responsible for the marvelous acoustics*, The Journal of the Acoustical Society of America **121** (2007), 2011–22.
- [11] J. A. DeSanto, *Coherent scattering from rough surfaces*, Mathematical Methods and Applications of Scattering Theory (Berlin, Heidelberg) (J. A. DeSanto, A. W. Sáenz in W. W. Zachary, ur.), Springer Berlin Heidelberg, 1980, str. 60–70.
- [12] J. W. Strutt Baron Rayleigh, *The theory of sound*, zv. 2, Dover Publications, New York, 1896.
- [13] S. Wang, J. Tao, X. Qiu in J. Cheng, *Effects of periodically corrugated surfaces on sound scattering*, Journal of Sound and Vibration **436** (2018), 1–14.
- [14] P. C. Waterman, *Scattering by periodic surfaces*, Journal of the Acoustical Society of America **57** (1975), 791–802.
- [15] A. Wirgin, *Reflection from a corrugated surface*, Acoustical Society of America Journal **68** (1980), 692–699.
- [16] S. Psarras, P. D. Hatziantoniou, M. Kountouras, N.-A. Tatlas, J. Mourjopoulos in D. Skarlatos, *Measurements and analysis of the Epidaurus ancient theatre acoustics*, Acta Acustica United With Acustica **99** (2013), 30–39.
- [17] P. Menounou in P. Nikolaou, *Analytical model for predicting edge diffraction in the time domain*, The Journal of the Acoustical Society of America **142** (2017), št. 6, 3580–3592.
- [18] P. Menounou in S. Bougiesis, *Theoretical investigation of diffraction phenomena in the ancient theatre of Epidaurus*, International Symposium The Acoustics of Ancient Theatres (2022).
- [19] M. Nethercote, R. Assier in I. Abrahams, *Analytical methods for perfect wedge diffraction: A review*, Wave Motion **93** (2020), 102479.
- [20] A. D. Pierce, *Acoustics: An introduction to its physical principles and applications*, 3. izd., Springer eBooks Physics and Astronomy, Springer, Cham, 2019.
- [21] P. Economou in P. Charalampous, *The significance of sound diffraction effects in simulating acoustics in ancient theatres*, Acta Acustica united with Acustica **99** (2013).
- [22] J. B. Keller, *Geometrical theory of diffraction*, Journal of the Optical Society of America **52** (1962), 116–30.
- [23] R. F. Millar, *The Rayleigh hypothesis and a related least-squares solution to scattering problems for periodic surfaces and other scatterers*, Radio Science **8** (1973), št. 8-9, 785–796.
- [24] R. F. Millar, *On the Rayleigh assumption in scattering by a periodic surface*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **65** (1969), št. 3, 773–791.

Dodatek A Izračun koeficientov pri sipanju na periodični površini

Ko smo obravnavali sipanje valovanja na periodični površini, smo rešitev napisali v obliki neskončne vsote ravnih valov, izpustili pa smo podrobnosti, kako izračunati koeficiente v razvoju. Obstaja več postopkov in pristopov, vendar je bila njihova uporabnost in veljavnost še do nedavnega predmet razprav [15, 23, 14, 11].

Obravnavamo ravno vpadno valovanje

$$p_{vp} = e^{ik(x \sin \vartheta_{vp} - z \cos \vartheta_{vp})},$$

ki se sipa na periodični površini

$$z = f(x); \quad f(x + \Lambda) = f(x).$$

Skupno tlačno polje je sestavljeno iz vpadnega in sipanega valovanja $p = p_{vp} + p_s$, kjer sipano valovanje razvijemo po ravnih valovih, ki zadostijo periodičnosti površine in vpadnega valovanja:

$$p_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \phi_n. \quad (10)$$

Bazne funkcije ravnih valov, po katerih razvijamo sipano valovanje, so v tem primeru:

$$\phi_n = e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}},$$

kjer je

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_n &= k(\mathbf{e}_x \sin \vartheta_n + \mathbf{e}_z \cos \vartheta_n), \\ \sin \vartheta_n &= \sin \vartheta_{vp} + \frac{\lambda}{\Lambda} n, \\ \cos \vartheta_n &= \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta_n}. \end{aligned}$$

Razvoj po teh baznih funkcijah, kot ga je predlagal Rayleigh [12], je smiselno na območju strogo nad površino, tam kjer je $z > \max f(x)$. Izkaže se, da razvoja v točnem računu ne smemo uporabiti na vmesnem območju za $f(x) \leq z < \max f(x)$, saj bi morali tam vključiti še ravne valove, ki se širijo navzdol in so posledica odbojev na višjih točkah površine, ali, matematično gledano, ker zaradi morebitnih singularnosti pod površino razvoj ne konvergira v vseh primerih [23].

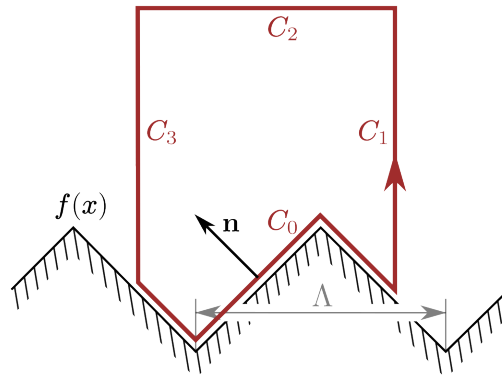
Zato t. i. Rayleighova hipoteza, ki pravi, da lahko koeficiente a_n določimo neposredno z upoštevanjem robnih pogojev na razvoju (10), torej z razširitvijo razvoja na celotno območje $z \geq f(x)$, ne drži nujno. Različne teorije, npr. Watermanova [14], skušajo to težavo zaobiti in izračun posplošiti na vse periodične površine, za primerjavo obeh teorij gl. [15].

Za dovolj „blage“ površine brez ostrih robov, pri katerih je amplituda površine dovolj majhna v primerjavi z njeno periodo, je Rayleighova hipoteza veljavna [23, 24]. Tudi sicer se je mogoče z njo dobro približati pravi rešitvi [15], zato bomo predstavili izračun koeficientov v tem približku.

Koeficiente a_n je smiselno izraziti z vrednostjo tlačnega polja na površini v obliki integralske enačbe. Uporabimo Greenovo identiteto ter integriramo po zaključeni krivulji C širine ene periode, ki se na spodnji strani dotika površine, na zgornji strani je ravna, ob straneh pa navpična, kot prikazuje slika 10. Za funkciji v Greenovo identiteto vstavimo skupno tlačno polje p in kompleksno konjugirano bazno funkcijo ϕ_m :

$$\oint_C \left[p \frac{\partial \phi_m^*}{\partial n} - \frac{\partial p}{\partial n} \phi_m^* \right] ds = 0.$$

Ker tako p kot ϕ_m rešita Helmholtzovo enačbo, je integral po površini, ki sicer nastopa v Greenovi identiteti, enak 0. Integral po krivulji razdelimo na štiri odseke C_0 , C_1 , C_2 in C_3 , kot so označeni na sliki 10.



Slika 10. Zaključena krivulja, na kateri uporabimo Greenovo identiteto. Integrala po C_1 in C_3 se odštejeta, prav tako integrala po C_0 in C_2 .

Na navpičnih odsekih C_1 in C_3 se integranda razlikujeta za predznak, saj se fazni premik zaradi kompleksne konjugacije ϕ_m izniči, normala pa ima nasprotno smer. Sledi, da sta integrala po C_0 in C_2 nasprotno enaka. Integral po C_2 lahko izvednotimo z vstavljanjem razvoja za p in upoštevanjem ortogonalnosti ϕ_m po eni periodi. Dobimo

$$\int_{C_2} \left[p \frac{\partial \phi_m^*}{\partial n} - \frac{\partial p}{\partial n} \phi_m^* \right] ds = a_m 2ik\Lambda \cos \vartheta_m,$$

od koder a_n izrazimo z integralom po eni periodi površine:

$$a_m = \frac{i}{2k\Lambda \cos \vartheta_m} \int_{C_0} \left[p \frac{\partial \phi_m^*}{\partial n} - \frac{\partial p}{\partial n} \phi_m^* \right] ds. \quad (11)$$

Tu je $ds = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$, po x pa integriramo od 0 do Λ . Za Dirichletov robni pogoj $p = 0$ prvi člen odpade in podobno za Neumannov robni pogoj $\partial p / \partial n = 0$ odpade drugi člen.

Dobljena enačba (11) v resnici predstavlja neskončen sistem enačb za koeficiente a_n . V praksi rešujemo končni sistem za $|n| \leq N$ in opazujemo konvergenco koeficientov pri večanju N [15].

Dodatek B Izraz za uklonsko valovanje na robu stopnice v približku geometrijske teorije uklona

Uklon na robu stopnice smo obravnavali v približku geometrijske teorije uklona, kjer tlačno polje razdelimo na geometrijski in uklonski del. V splošnem lahko na ta način obravnavamo uklon na poljubnem neskončnem klinu z zunanjim kotom Θ in z izbranimi robnimi pogoji na površini. V danem primeru je $\Theta = 3\pi/2$ in robni pogoj Neumannov robni pogoj.

Zapišimo skupno tlačno polje

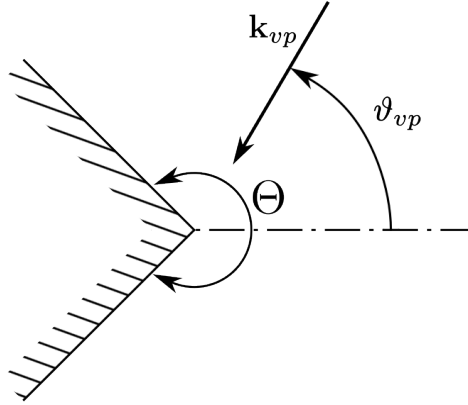
$$p = p_{geo} + p_{ukl}.$$

Geometrijski del je za primer, upodobljen na sliki 5, na različnih območjih

$$p_{geo} = \begin{cases} p_{vp} + p_{odb} & , \text{ območje I,} \\ p_{vp} & , \text{ območje II,} \\ 0 & , \text{ območje III,} \end{cases}$$

kjer sta vpadni in odbiti val v polarnem zapisu

$$\begin{aligned} p_{vp} &= e^{-ikr \cos(\vartheta - \vartheta_{vp})}, \\ p_{odb} &= e^{-ikr \cos(\vartheta + \vartheta_{vp} - \Theta)}. \end{aligned}$$



Slika 11. Uklon valovanja na klinu z zunanjim kotom Θ .

Uklonski del je za $kr \gg 1$ približno [19]

$$p_{ukl} \approx \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} D(\vartheta, \vartheta_{vp}), \quad (12)$$

kjer je kotna odvisnost za Neumannov robni pogoj

$$\begin{aligned} D(\vartheta, \vartheta_{vp}) &= \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} [s(\vartheta - \pi) - s(\vartheta + \pi)]; \\ s(z) &= \frac{\delta \cos(\delta z)}{\sin(\delta z) - \sin(\delta \vartheta_{vp})}, \\ \delta &= \frac{\pi}{\Theta}. \end{aligned}$$

Drugačno površino, npr. mejo med zrakom in tekočino, ustrezneje opiše Dirichletov robni pogoj. V zvezi z uklonom na robu pride v poštev zlasti pri drugih vrstah valovanja, kot je elektromagnetno. Za Dirichletov robni pogoj moramo spremeniti le funkcijo $s(z)$:

$$s(z) = \frac{\delta \cos(\delta \vartheta_{vp})}{\sin(\delta z) - \sin(\delta \vartheta_{vp})}.$$

Predstavljeni približek (12) ima določene težave, saj ob mejah geometrijskih območij divergira. Obstajajo boljši približki, ki to težavo odpravijo, vendar v tem primeru ne moremo ločiti radialne in kotne odvisnosti. Model je mogoče razširiti tudi na robove končne dolžine in različne oblike vpadnega valovanja, kot je krogelno ali valjno. Izpeljavo in druge približke bralec najde v [19, 17].