EULERSKA ŠTEVILA

ALEKS ŽIGON TANKOSIČ

Gimnazija Nova Gorica

Rešitev za permutacijski problem iskanja števila vzponov v permutacijah podajajo eulerska števila. V članku so predstavljene njihova rekurzija, Worpitzkyjeva identiteta ter povezava s Stirlingovimi števili druge vrste. Na koncu so predstavljeni še eulerski polinomi in njihova rekurzija.

EULERIAN NUMBERS

The solution to the permutation problem of finding the number of ascents in permutations is given by Eulerian numbers. The article presents their recursion, the Worpitzky's identity and the connection with Stirling numbers of the second kind. Finally, the article presents the Eulerian polynomials and their recurrence relation.

1. Uvod

Kombinatorika je obsežno področje matematike, ki se ukvarja s konstrukcijo, lastnostmi in številom (praviloma) končnih matematičnih struktur. Kombinatorika se deli na veliko podpodročij (denimo preštevalno, algebraično, analitično, ekstremalno), povezuje pa se še z mnogimi drugimi področji matematike in tudi fizike. Eulerska števila, ki jih obravnavamo v tem članku, sodijo v *preštevalno kombinatoriko*, ki preučuje načine preštevanja elementov dane končne množice struktur in lastnosti števil, ki jih pri tem dobimo.

1.1 Zgodovinski pregled razvoja eulerskih števil

Eulerska števila je prvi raziskoval Euler leta 1755 v svojem delu *Institutiones calculi differentialis* (glej sliko 1). Raziskoval je alternirajočo vsoto $\sum_{i=1}^{m}(-1)^i i^n$. Nato je prišel do splošnega pravila

$$\sum_{i=1}^{m} i^n t^i = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{n+l} \binom{n}{l} \frac{t^{m+1} m^l}{(t-1)^{n-l+1}} E_{n-l}(t) + (-1)^n \frac{t\,(t^m-1)}{(t-1)^{n+1}} E_n(t),$$

kjer so $E_n(t)$ eulerski polinomi. Kombinatorično definicijo je prvi predstavil Riordan v petdesetih letih 20. stoletja. Natančnejši pregled razvoja eulerskih števil je v [8].

1.2 Definicija vzpona in padca permutacije

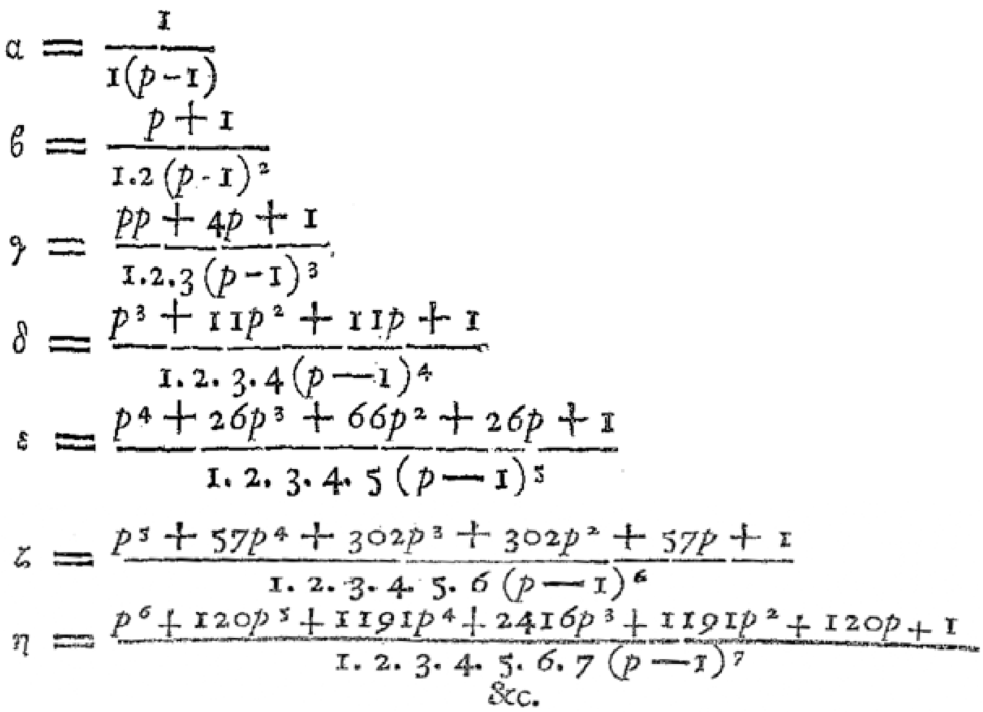
Da bomo lahko definirali eulerska števila kombinatorično, moramo najprej definirati *vzpon in padec permutacije.*

Definicija 1. Naj bo

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

permutacija množice $\{1, 2, \ldots, n\}$. Položaj j spodnje vrstice permutacije σ imenujemo *vzpon permutacije* σ, če velja $i_j < i_{j+1}$. Število vseh vzponov permutacije σ označimo z $\operatorname{asc}(\sigma)$. Hkrati položaj j imenujemo *padec permutacije* σ, če velja $i_j > i_{j+1}$.

Zgled 2. Vzemimo permutacijo $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Pozicije 2, 3 in 5 so vzponi, pozicije 1, 4, 6 pa padci.



$$\alpha = \frac{1}{1(p-1)}$$
$$\beta = \frac{p+1}{1.2\,(p-1)^2}$$
$$\gamma = \frac{pp+4p+1}{1.2.3\,(p-1)^3}$$
$$\delta = \frac{p^3+11p^2+11p+1}{1.2.3.4\,(p-1)^4}$$
$$\varepsilon = \frac{p^4+26p^3+66p^2+26p+1}{1.2.3.4.5\,(p-1)^5}$$
$$\zeta = \frac{p^5+57p^4+302p^3+302p^2+57p+1}{1.2.3.4.5.6\,(p-1)^6}$$
$$\eta = \frac{p^6+120p^5+1191p^4+2416p^3+1191p^2+120p+1}{1.2.3.4.5.6.7\,(p-1)^7}$$
&c.

Slika 1. Zapis eulerskih števil kot koeficientov polinomov $\frac{E_n(p)/p}{n!(p-1)^n}$ iz Eulerjevega dela *Institutiones calculi differentialis*. Vir: Wikipedia.

2. Kombinatorična definicija eulerskih števil

Poglavje pred nami je povzeto po razdelku 6.3 v [3].

Definicija 3. Eulersko število $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ je število permutacij množice $\{1, 2, \ldots, n\}$, ki imajo natanko k vzponov.

Opomba 4. Poleg zapisa eulerskih števil $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ se uporabljata tudi zapisa $E(n, k)$ in $A(n, k)$, pri čemer je $E(n, k) = \left\langle {n \atop k} \right\rangle$ in $A(n, k) = \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle$. Števila $A(n, k)$ so natančneje opisana v [7].

Zgled 5. Da ilustriramo kombinatorično definicijo, si oglejmo vse vrednosti eulerskih števil za $n = 3$ in $k \leq 2$. Vse permutacije množice $\{1, 2, 3\}$ so zapisane spodaj:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Števila vzponov za posamično permutacijo so:

$$\operatorname{asc}(\sigma_1) = 0 \qquad \operatorname{asc}(\sigma_2) = 1 \qquad \operatorname{asc}(\sigma_3) = 1$$
$$\operatorname{asc}(\sigma_4) = 1 \qquad \operatorname{asc}(\sigma_5) = 1 \qquad \operatorname{asc}(\sigma_6) = 2,$$

torej je

$$\left\langle {3 \atop 0} \right\rangle = 1, \quad \left\langle {3 \atop 1} \right\rangle = 4, \quad \left\langle {3 \atop 2} \right\rangle = 1.$$

3. Rekurzivna zveza

Za eulerska števila velja lepa *trikotniška rekurzivna zveza* ([3, str.150]).

Izrek 6. *Velja:*

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = (k+1)\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle + (n-k)\left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle. \tag{1}$$

Dokaz. Naj bo π permutacija iz S_n s k vzponi. Če tej permutaciji izbrišemo vrednost n, dobimo permutacijo iz S_{n-1}, ki ima k ali $k-1$ vzponov. Obratno lahko vsako permutacijo iz S_n s k vzponi konstruiramo z dodajanjem vrednosti n na primerno mesto permutacije iz S_{n-1} s k ali $k-1$ vzponi. Sedaj ločimo dva primera:

(1) Imejmo permutacijo $\sigma \in S_{n-1}$ s k vzponi. Vrednost n moramo vriniti v permutacijo σ, tako da ne dodamo nobenega novega vzpona, torej na začetek ali med par, ki predstavlja vzpon permutacije (takih parov je k). Skupaj imamo torej $k+1$ možnosti za postavitev vrednosti n.

(2) Imejmo permutacijo $\alpha \in S_{n-1}$ s $k-1$ vzponi. Če želimo z vstavljanjem vrednosti n permutaciji v dobiti permutacijo s k vzponi, moramo vrednost n dodati na zadnje mesto ali pa med dve vrednosti, ki sta prej predstavljali padec (takih parov je $n-k-1$). V tem primeru imamo skupaj $n-k$ možnosti za postavitev vrednosti n. ∎

3.1 Tabela vrednosti in simetrija

S pomočjo rekurzije lahko s pomočjo računalniškega programa (npr. Python ali Maple) hitro sestavimo tabelo vrednosti za eulerska števila.

$n\|k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	4	1	0	0	0	0	0	0
4	1	11	11	1	0	0	0	0	0
5	1	26	66	26	1	0	0	0	0
6	1	57	302	302	57	1	0	0	0
7	1	120	1191	2416	1191	120	1	0	0
8	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1	0
9	1	502	14608	88234	156190	88234	14608	502	1

Tabela 1. Vrednosti Eulerskih števil za $0 \leq n \leq 8$. Vrstice predstavljajo k, stolpci pa n.

V tabeli vrednosti je lahko viden Eulerjev trikotnik, ki je simetričen prav tako kot Pascalov trikotnik. Zapišimo to opazko kot trditev.

Trditev 7. *Za vsak $n \in \mathbb{N}$ in $k \in \{0, ..., n-1\}$ velja*

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \left\langle {n \atop n-k-1} \right\rangle. \tag{2}$$

Dokaz. Če ima permutacija

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

k vzponov, potem ima permutacija

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ i_n & i_{n-1} & i_{n-2} & \cdots & i_1 \end{pmatrix}$$

$n - k - 1$ vzponov. ■

3.2 Vsota eulerskih števil

Očitno, da je vsota vseh eulerskih števil množice $\{1, 2, ..., n\}$ ravno $n!$, torej ravno število vseh permutacij množice $\{1, 2, ..., n\}$. Iz tega sledi

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle = n!. \tag{3}$$

4. Identiteta Worpitzkega

Identiteta Worpitzkega je ena najbolj znanih enačb, ki vključujejo eulerska števila ([3, str. 150-152]).

Izrek 8. *Za nenegativno celo število n in poljubno realno število x velja*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{x+k}{n}. \tag{4}$$

Dokaz. Naj bo $x \in \mathbb{N}$. Poiskali bomo bijekcijo Φ med vsemi preslikavami $f\colon [n] = \{1, \ldots, n\} \to [x] = \{1, \ldots, x\}$ in pari (π, B), kjer je $\pi \in S_n$ permutacija, B pa n-elementna podmnožica množice $[x + \operatorname{asc}(\pi)]$. Očitno je, da je ustreznih funkcij x^n, ustreznih parov pa

$$\sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{x+k}{n},$$

tako da bijekcija dokaže identiteto za $x \in \mathbb{N}$. Ker sta obe strani polinoma stopnje n, ki se ujemata v neskončno točkah, je s tem identiteta Worpitzkega dokazana tudi v splošnem. Za preslikavo $f\colon [n] \to [x]$ naj bo π permutacija, ki jo dobimo, če spojimo praslike $f^{-1}(1), f^{-1}(2), \ldots, f^{-1}(x)$. Na primer, za $n = 6$, $x = 3$, $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 3$, $f(4) = 1$, $f(5) = 2$, $f(6) = 2$ je $f^{-1} = \{4\}$, $f^{-1}(2) = \{1, 5, 6\}$, $f^{-1}(3) = \{2, 3\}$ in $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Naj bo $a = (f(\pi_1), \ldots, f(\pi_n))$ šibko naraščajoča preureditev zaporedja $(f(1), \ldots, f(n))$, recimo v našem primeru $a = (1, 2, 2, 2, 3, 3)$. Opazimo, da če je $a_i = a_{i+1}$, mora biti i vzpon permutacije π. Zdaj iz zaporedja a skonstruiramo strogo naraščajoče zaporedje b, tako da vsakemu a_i prištejemo neko naravno število. Pri tem a_1 prištejemo 0; če a_i prištejemo k in je i vzpon permutacije π, potem a_{i+1} prištejemo $k+1$, če pa i ni vzpon permutacije π, potem a_{i+1} tudi prištejemo k. Z drugimi besedami, $b_i = a_i + |\{j < i | j \text{ je vzpon permutacije } \pi\}|$. V našem primeru je $b = (1, 2, 3, 4, 6, 7)$. Množico $\{b_1, \ldots, b_n\}$ označimo z B, in definiramo $\Phi(f) = (\pi, B)$. Ni težko preveriti, da je Φ bijekcija. ■

5. Eksplicitna formula

Izrek 9. *Za vsa naravna števila n in k velja eksplicitna formula*

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n+1}{j} (k+1-j)^n. \tag{5}$$

Dokaz. Dokažimo eksplicitno formulo z indukcijo po n. Dokaz je bil predstavljen v [2]. Naj bo $L(n,k)$ leva stran enačbe (5) in naj bo $D(n,k)$ desna stran enačbe (5). Opazimo, da je $L(0,k) = D(0,k)$ za vse $k \in \mathbb{N}$. Predpostavimo, da enakost velja za n. Potem imamo

$$L(n+1,k) = \left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle = (k+1) \left\langle {n \atop k} \right\rangle + (n+1-k) \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle .$$

Prvi člen vsote je enak

$$\begin{aligned}
(k+1) \left\langle {n \atop k} \right\rangle &= (k+1) \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n+1}{j} (k+1-j)^n \\
&= (k+1)\left((k+1)^n + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{n+1}{j} (k+1-j)^n \right) \\
&= (k+1)^{n+1} + (k+1) \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j+1} \binom{n+1}{j+1} (k-j)^n,
\end{aligned}$$

iz drugega člena pa podobno dobimo

$$(n+1-k) \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle = (n+1-k) \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{n+1}{j} (k-j)^n.$$

Če vsoti združimo in v njih izpostavimo $(k-j)^n$, preostane

$$L(n+1,k) = (k+1)^{n+1} + \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j+1} (k-j)^{n+1} \binom{n+2}{j+2},$$

seštevamo pa lahko tudi od $j = k$, saj je pripadajoči člen enak 0. Velja torej

$$\begin{aligned}
L(n+1,k) &= (k+1)^{n+1} + \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j+1} (k-j)^{n+1} \binom{n+2}{j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j (k-j+1)^{n+1} \binom{n+2}{j} \\
&= D(n+1,k).
\end{aligned}$$

∎

S pomočjo eksplicitne formule dobimo poleg simetrije še nekaj zanimivih posebnih vrednosti eulerskih števil ([4]).

Trditev 10. *Za $n \geq 0$ velja*

$$\left\langle {n \atop 0} \right\rangle = 1 \tag{6}$$

$$\left\langle {n \atop 1} \right\rangle = 2^n - n - 1 \tag{7}$$

$$\left\langle {n \atop 2} \right\rangle = 3^n - (n+1)2^n + \frac{1}{2}n(n+1) \tag{8}$$

6. Relaciji med eulerskimi in Stirlingovimi števili

Naslednji zanimivi relaciji sta relaciji, ki povezujeta eulerska in Stirlingova števila 2. vrste. Stirlingovo število 2. vrste $\left\{ {n \atop k} \right\}$ je število vseh razdelitev množice $[n]$ na k nepraznih paroma disjunktnih množic $B_1, B_2, \ldots, B_k$, imenovanih *bloki*, katerih unija je $[n]$. ([3, str. 7]).

Izrek 11. *Za* $0 \le m \le n$ *velja:*

$$m! \left\{ {n \atop m} \right\} = \sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{k}{n-m}. \tag{9}$$

Dokaz. Identiteto bomo dokazali algebraično s pomočjo matematične indukcije in rekurzivnih zvez za eulerska in Stirlingova števila ter za binomske koeficiente. Dokaz je bil predstavljen v [1].

Za Stirlingova števila druge vrste velja rekurzivna zveza ([3, str. 8])

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\},$$

za binomske koeficiente pa ([4, str. 4])

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \tag{10}$$

Naj bo $L(n,m)$ leva stran enačbe (9) in naj bo $D(n,m)$ desna stran enačbe (9). Opazimo, da je $L(0,0) = R(0,0), L(1,0) = D(1,0)$ in $L(1,1) = D(1,1)$.

Predpostavljamo torej, da enačba (9) velja za $0 \le m \le n$. Z uporabo rekurzivne zveze za eulerska števila (1), dobimo

$$\begin{aligned}
&\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle \binom{k}{n+1-m} \\
&= \left((k+1) \left\langle {n \atop k} \right\rangle + \Big(n+2-(k+1)\Big) \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle \right) \binom{k}{n+1-m} \\
&= (k+1) \binom{k}{n+1-m} \left\langle {n \atop k} \right\rangle + (n+2) \binom{k}{n+1-m} \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle - (k+1) \binom{k}{n+1-m} \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Upoštevamo, da je $(k+1)\binom{k}{n+1-m} = (n-m+2)\binom{k+1}{n-m+2}$ in dobimo

$$\begin{aligned}
\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle \binom{k}{n+1-m} = &(n-m+2) \binom{k+1}{n-m+2} \left\langle {n \atop k} \right\rangle + (n+2) \binom{k}{n+1-m} \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle \\
&- (n-m+2) \binom{k+1}{n-m+2} \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Binomske koeficiente zapišemo z rekurzivno zvezo (10) in razčlenimo produkte

$$
\begin{aligned}
&\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle \binom{k}{n+1-m}\\
&= (n-m+2)\left(\binom{k}{n-m+2} + \binom{k}{n-m+1}\right)\left\langle {n \atop k} \right\rangle\\
&+ (n+2)\left(\binom{k-1}{n+1-m} + \binom{k-1}{n-m}\right)\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle\\
&- (n-m+2)\left(\binom{k-1}{n-m+2} + 2\binom{k-1}{n-m+1} + \binom{k-1}{n-m}\right)\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle\\
&= (n-m+2)\left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{k}{n-m+2} + (n-m+2)\left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{k}{n-m+1}\\
&+ (n+2)\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle \binom{k-1}{n+1-m} + (n+2)\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle \binom{k-1}{n-m}\\
&- (n-m+2)\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle \binom{k-1}{n-m+2} - 2(n-m+2)\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle \binom{k-1}{n-m+1}\\
&- (n-m+2)\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle \binom{k-1}{n-m}.
\end{aligned}
$$

Dobljeni razultat uporabimo za poenostavitev desne strani enačbe

$$
\begin{aligned}
&D(n+1,m)\\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle \binom{k}{n+1-m}\\
&= (n-m+2)\sum_{k=0}^{n+1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{k}{n-m+2} + (n-m+2)\sum_{k=0}^{n+1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{k}{n-m+1}\\
&+ (n+2)\sum_{k=0}^{n+1} \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle \binom{k-1}{n+1-m} + (n+2)\sum_{k=0}^{n+1} \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle \binom{k-1}{n-m}\\
&- (n-m+2)\sum_{k=0}^{n+1} \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle \binom{k-1}{n-m+2} - 2(n-m+2)\sum_{k=0}^{n+1} \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle \binom{k-1}{n-m+1}\\
&- (n-m+2)\sum_{k=0}^{n+1} \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle \binom{k-1}{n-m}\\
&= (n-m+2)\sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{k}{n-m+2} + (n-m+2)\sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{k}{n-m+1}\\
&+ (n+2)\sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{k}{n+1-m} + (n+2)\sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{k}{n-m}\\
&- (n-m+2)\sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{k}{n-m+2} - 2(n-m+2)\sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{k}{n-m+1}\\
&- (n-m+2)\sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{k}{n-m}.
\end{aligned}
$$

Poenostavimo vsote produktov eulerskih števil in binomskih koeficientov

$$
\begin{aligned}
&D(n+1,m)\\
&= (n-m+2)(m-2)!\left\{ {n \atop m-2} \right\} + (n-m+2)(m-1)!\left\{ {n \atop m-1} \right\}\\
&+ (n+2)(m-1)!\left\{ {n \atop m-1} \right\} + (n+2)m!\left\{ {n \atop m} \right\} - (n-m+2)(m-2)!\left\{ {n \atop m-2} \right\}\\
&- 2(n-m+2)(m-1)!\left\{ {n \atop m-1} \right\} - (n-m+2)m!\left\{ {n \atop m} \right\}\\
&= m!\left\{ {n \atop m-1} \right\} + m\cdot m!\left\{ {n \atop m} \right\} = m!\left\{ {n+1 \atop m} \right\} = L(n+1,m)
\end{aligned}
$$

in s tem smo dokazali (9). ∎

Posledica 12. *Velja*

$$
\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \sum_{m=0}^{n} m!\left\{ {n \atop m} \right\}\binom{n-m}{k}(-1)^{n-m-k}. \tag{11}
$$

Dokaz. Relacijo bomo dokazali z uporabo prejšnje. Z množenjem enačbe (9) z x^{n-m} in seštevanjem dobimo

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{n} m!\left\{ {n \atop m} \right\} x^{n-m} &= \sum_{k=0}^{n}\left\langle {n \atop k} \right\rangle \sum_{m=0}^{n}\binom{k}{n-m}x^{n-m}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\left\langle {n \atop k} \right\rangle (x+1)^k,
\end{aligned}
$$

kjer smo v zadnjem koraku uporabili dobro znani binomski izrek. Z zamenjavo x z $x-1$ in ponovno uporabo binomskega izreka dobimo

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{n} m!\left\{ {n \atop m} \right\} (x-1)^{n-m} &= \sum_{m=0}^{n} m!\left\{ {n \atop m} \right\} \sum_{k=0}^{n-m}\binom{n-m}{k}(-1)^{n-m-k}x^k\\
&= \sum_{k=0}^{n} x^k\left(\sum_{m=0}^{n} m!\left\{ {n \atop m} \right\}\binom{n-m}{k}(-1)^{n-m-k}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\left\langle {n \atop k} \right\rangle x^k.
\end{aligned}
$$

∎

7. Simetrična identiteta eulerskih števil

Fan Choung, Ron Graham in Donald Knuth so v članku [6] dokazali presenetljivo simetrično identiteto, ki vključuje eulerska števila. Identiteto si bomo ogledali brez dokaza.

Izrek 13. *Za pozitivni števili a in b, kjer predpostavimo, da je $\left\langle {0 \atop 0} \right\rangle = 0$, velja*

$$
\sum_{k=0}^{a+b}\binom{a+b}{k}\left\langle {k \atop a-1} \right\rangle = \sum_{k=0}^{a+b}\binom{a+b}{k}\left\langle {k \atop b-1} \right\rangle. \tag{12}
$$

Zgled 14. Naj bosta $a = 3$ in $b = 2$. Identiteta (12) postane

$$\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \left\langle {k \atop 2} \right\rangle = \sum_{k=0}^{a+b} \binom{5}{k} \left\langle {k \atop 1} \right\rangle . \tag{13}$$

Leva stran (13) postane

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \left\langle {k \atop 2} \right\rangle &= \binom{5}{0} \left\langle {0 \atop 2} \right\rangle + \binom{5}{1} \left\langle {1 \atop 2} \right\rangle + \binom{5}{2} \left\langle {2 \atop 2} \right\rangle + \binom{5}{3} \left\langle {3 \atop 2} \right\rangle + \binom{5}{4} \left\langle {4 \atop 2} \right\rangle + \binom{5}{5} \left\langle {5 \atop 2} \right\rangle \\ &= \binom{5}{3} + 11\binom{5}{4} + 66 = 131,\end{aligned}$$

desna pa

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \left\langle {k \atop 1} \right\rangle &= \binom{5}{0} \left\langle {0 \atop 1} \right\rangle + \binom{5}{1} \left\langle {1 \atop 1} \right\rangle + \binom{5}{2} \left\langle {2 \atop 1} \right\rangle + \binom{5}{3} \left\langle {3 \atop 1} \right\rangle + \binom{5}{4} \left\langle {4 \atop 1} \right\rangle + \binom{5}{5} \left\langle {5 \atop 1} \right\rangle \\ &= \binom{5}{2} + 4\binom{5}{3} + 11\binom{5}{4} + 26 = 131.\end{aligned}$$

8. Eulerski polinomi

Poglavje pred nami je povzeto po razdelku 1.4 v [4].

Definicija 15. Za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ je n-ti eulerski polinom definiran z

$$E_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \left\langle {n \atop i} \right\rangle x^i \tag{14}$$

za $n \geq 1$, oziroma z $E_0(x) = 1$.

Zgled 16. Eulerski polinom za $n = 3$ je $E_3(x) = 1x^0 + 4x^1 + 1x^2$.

8.1 Rekurzivna zveza za eulerske polinome

Izrek 17. *Za vsak $n \geq 0$ velja rekurzivna zveza*

$$E_{n+1}(x) = x(1-x)\frac{d}{dx}E_n(x) + (1+nx)E_n(x). \tag{15}$$

Dokaz. Najprej moramo izračunati odvod eulerskega polinoma $E_n(x)$:

$$\frac{d}{dx}E_n(x) = \sum_i i \left\langle {n \atop i} \right\rangle x^{i-1}. \tag{16}$$

Sedaj pomnožimo $E_n(x)$ z $(1+nx)$ ter $\frac{d}{dx}E_n(x)$ z $x(1-x)$, dobimo:

$$\begin{aligned}
(1+nx)E_n(x) &= (1+nx)\sum_i \left\langle {n \atop i} \right\rangle x^i \\
&= \sum_i \left\langle {n \atop i} \right\rangle x^i + \sum_i n \left\langle {n \atop i} \right\rangle x^{i+1} \\
&= \sum_i \left\langle {n \atop i} \right\rangle x^i + \sum_i n \left\langle {n \atop i-1} \right\rangle x^i \\
&= \sum_i \left(\left\langle {n \atop i} \right\rangle + n \left\langle {n \atop i-1} \right\rangle \right) x^i, \\
x(1-x)\frac{d}{dx}E_n(x) &= x(1-x)\sum_i i \left\langle {n \atop i} \right\rangle x^{i-1} \\
&= \sum_i i \left\langle {n \atop i} \right\rangle x^i - \sum_i i \left\langle {n \atop i} \right\rangle x^{i+1} \\
&= \sum_i i \left\langle {n \atop i} \right\rangle x^i - \sum_i (i-1) \left\langle {n \atop i-1} \right\rangle x^i.
\end{aligned}$$

Če seštejemo zgornji enakosti, dobimo:

$$\begin{aligned}
&(1+nx)E_n(x) + x(1-x)\frac{d}{dx}E_n(x) = \\
&= \sum_i \left(\left\langle {n \atop i} \right\rangle + n \left\langle {n \atop i-1} \right\rangle + i \left\langle {n \atop i} \right\rangle - (i-1) \left\langle {n \atop i-1} \right\rangle \right) x^i \\
&= \sum_i \left((i+1) \left\langle {n \atop i} \right\rangle x^i + (n+1-i) \left\langle {n \atop i-1} \right\rangle \right) x^i \\
&= \sum_i \left\langle {n+1 \atop i} \right\rangle x^i \\
&= E_{n+1}(x).
\end{aligned}$$

Torej je vsota $(1+nx)E_n(x) + t(1-x)\frac{d}{dx}E_n(x)$ enaka vsoti

$$\sum_{k=0}^{n} \left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle x^k = E_{n+1}(x),$$

tako smo dokazali rekurzivno zvezo eulerskih polinomov. ■

9. Zaključek

V članku smo definirali eulerska števila na kombinatoričen način ter definirali eulerske polinome. Predstavili smo nekaj najbolj znanih in zanimivih identitet, ki vključujejo ta števila in polinome.

Eulerska števila nastopajo še na mnogih drugih področjih v matematiki. Za nadaljnje branje o eulerskih številih in njihovi uporabi na drugih področjih matematike toplo priporočam knjigo [4].

Zahvala

Avtor se zahvaljuje anonimnemu recenzentu za natančen pregled in nasvete pri urejanju članka.

LITERATURA

[1] mathlove (https://math.stackexchange.com/users/78967/mathlove): Algerbaic proof of Eulerian-Stirling numbers identity using recurrence relations, *Mathematics Stack Exchange*, dostopno na `https://math.stackexchange.com/q/4957536`. Dostop dne 13. 8. 2024.

[2] mathlove (https://math.stackexchange.com/users/78967/mathlove): An Eulerian numbers identity proof by induction, *Mathematics Stack Exchange*, dostopno na `https://math.stackexchange.com/q/4957697`. Dostop dne 13. 8. 2024.

[3] I. Mezo: *Combinatorics and Number Theory of Counting Sequences*, CRC Press, 2019.

[4] T. Kyle Petersen: *Eulerian Numbers*, Springer New York, 2015.

[5] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik: *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, 2nd edition, Addison-Wesley, (1989).

[6] F. Chung, R. Graham, D. Knuth: A Symmetrical Eulerian Identity, *Journal of Combinatorics* **1.1**, pp. 29–38, (2010).

[7] E. Zmazek: Eulerjeva in Eulerska števila, delo diplomskega seminarja, *Fakulteta za matematiko in fiziko*, dostopno na `https://repozitorij.uni-lj.si/IzpisGradiva.php?id=100643`. Dostop dne 10. 1. 2023.

[8] T. Xiong, T. H.-P. Tsao, J. I. Hall: General Eulerian Numbers and Eulerian Polynomials, *Journal of Mathematics*, 2013, Hindawi publishing (2013).

Viri slikovnega gradiva

Slika 1:
`https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/43/EulerianPolynomialsByEuler1755.png`, dostop dne 2. 1. 2024.