POPULARNA PRIREJANJA

ANJA RUPNIK

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Ta članek obravnava različna prirejanja v grafih in njihove lastnosti. Najprej se osredotoči na največja in stabilna prirejanja v dvodelnih grafih z utežmi, nato pa se kot kompromis med tema dvema konceptoma uvede popularna prirejanja. Predstavi tudi Gale-Shapleyjev algoritem za iskanje stabilnih prirejanj in algoritem za iskanje največjih popularnih prirejanj v dvodelnih grafih z utežmi.

POPULAR MATCHINGS

This article discusses various matchings in graphs and their properties. It first focuses on maximum and stable matchings in weighted bipartite graphs, and then introduce popular matchings, a compromise between these two concepts. The article also presents the Gale-Shapley algorithm for computing a stable matching and an algorithm for computing a largest popular matching in weighted bipartite graphs.

1. Uvod

Prirejanja so pomemben koncept v teoriji grafov, ki omogoča reševanje različnih optimizacijskih problemov, pri katerih je treba povezati dve množici elementov glede na določena pravila ali preference. Recimo, da imamo plesalke in plesalce, ki jih želimo razporediti v plesne pare. Nekateri med njimi se poznajo, nekateri pa ne. Ali jih lahko razporedimo v pare tako, da se plesalca v paru poznata med sabo? Kako razporediti študente v študentske domove, če želimo upoštevati njihove želje glede tega, v katerem domu bi najraje bili? Kako študente razporediti na fakultete, če ima vsak študent svoj razpored ljubših fakultet in vsaka fakulteta rangira študente? Zgornje probleme lahko rešimo s pomočjo prirejanj. Prirejanje plesalke in plesalce razporedi v pare, ki se med seboj poznajo, pri tem pa lahko tudi nekatere plesalke in plesalce pusti brez para. Vsak plesalec ali plesalka je lahko v največ enem paru.

S teorijo prirejanj se je že leta 1916 ukvarjal Dénes Kőnig, ki je napisal prvo knjigo o teoriji grafov [7]. Skozi leta so se razvile različne vrste prirejanj za reševanje različnih vrst problemov. Nekatera se osredotočajo na čim večje število prirejenih parov (največja prirejanja). V grafih z utežmi lahko iščemo prirejanja z najmanšo ali največjo ceno. Če imamo dane funkcije preferenc, pa lahko gledamo na želje posameznikov, ki jih prirejamo. Stabilna prirejanja, recimo, so primer prirejanj, ki upoštevajo želje posameznikov tako, da v njih nobena dva posameznika ne bi bila raje drug z drugim kot s svojim trenutnim parom.

Znani so tudi različni algoritmi za iskanje različnih vrst prirejanj. Madžarska metoda (Hungarian algorithm) poišče največje prirejanje dvodelnega grafa oziroma najcenejše prirejanje v dvodelnem grafu z utežmi [8]. Lloyd Shapley in David Gale sta leta 1962 predstavila algoritem (Gale-Shapley algorithm [2]) za iskanje stabilnega prirejanja v dvodelnem grafu.

Leta 1975 je Peter Gärdenfors uvedel pojem popularnega prirejanja [5], ki pravzaprav izhaja iz kognitivne znanosti. Če primerjamo dve prirejanji tako, da vozlišča glasujejo za eno ali drugo prirejanje glede na to s kom so v paru v danem prirejanju, so popularna prirejanja tista, ki ne izgubijo proti nobenem izmed ostalih prirejanj. Popularno prirejanje je posplošitev stabilnega prirejanja, saj poskuša ugoditi željam skupine kot celote. Gärdenfors je tudi dokazal, da je vsako stabilno prirejanje popularno. Naslednjih nekaj let večjih novih odkritij na področju popularnih prirejanj ni bilo, na začetku 21. stoletja pa so številne nove objave pokazale pomen te teme. Popularna prirejanja rešujejo probleme, kot so dodeljevanje študentov na univerze [9], razporejanje prebivalcev v domove za ostarele [10] in oblikovanje stabilnih trgovinskih omrežij [11].

2. Največja prirejanja in stabilna prirejanja

Najprej se spomnimo nekaj osnovnih pojmov iz teorije grafov. Več o grafih najdemo v [1].

Graf je matematična struktura, s katero prikažemo množico objektov (vozlišča) in povezave med nekaterimi od njih. Formalno je *graf* urejeni par $G = (V, E)$, pri čemer je V končna množica *vozlišč* in E množica *povezav*. Pišemo tudi $V(G)$ in $E(G)$. Graf je lahko usmerjen ali neusmerjen. V neusmerjenih grafih je $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$. Povezavo $\{u, v\}$ krajše zapišemo kot uv in velja $uv = vu$. V usmerjenih grafih je $E \subseteq \{(u, v) \mid u, v \in V, u \neq v\}$. Povezavo (u, v) krajše zapišemo kot uv. Tu uv in vu označujeta različni povezavi, uv ima *začetek* v vozlišču u in *konec* v vozlišču v. Vozlišči u, v sta *krajišči povezave uv*.

Graf $G = (V, E)$ je *dvodelen*, če obstaja takšna razdelitev množice $V = X \cup Y$, da za vsako povezavo $uv \in E$ velja $u \in X$ in $v \in Y$ ali $v \in X$ in $u \in Y$.

Zaporedju paroma različnih vozlišč $v_0, v_1, \ldots v_n$ grafa $G = (V, E)$, za katere velja $v_i v_{i+1} \in E$ za $i \in \{0, 1, \ldots n-1\}$, pravimo *pot* v grafu. *Cikel* v grafu je pot, ki ji dodamo še povezavo $v_n v_0$. V nadaljevanju bomo uporabljali predvsem povezave v tej poti, zato se dogovorimo, da pot lahko pomeni tudi množico povezav $\{v_0 v_1, v_1 v_2, \ldots, v_{n-1} v_n\}$.

Definicija 1. Naj bo $G = (V, E)$ graf. Množica povezav $M \subseteq E$ je *prirejanje*, če nobeni dve povezavi iz M nimata skupnega krajišča. Če je povezava uv v prirejanju M, pravimo, da je *vezana* in da sta si vozlišči u in v *prirejeni* oziroma sta *par*. Pravimo tudi, da je u par v in v par u ter označimo z $M(v) = u$ oziroma $M(u) = v$. Če povezava uv ni v prirejanju M, pravimo, da je *prosta*. Vozlišče u je *vezano* ali *v paru*, če je krajišče povezave iz M, sicer je *prosto*. Z $U(M)$ označimo množico vozlišč, ki so vezana v prirejanju M.

Definicija 2. Naj bo $G = (V, E)$ graf, M prirejanje v grafu G, P pot in C cikel v grafu G. Pot P v grafu G je *izmenična* glede na prirejanje M, če se v njej izmenjujejo proste in vezane povezave. Cikel C v grafu G je *izmeničen* glede na prirejanje M, če se v njej izmenjujejo proste in vezane povezave. Izmenična pot P v grafu G je *povečujoča* glede na prirejanje M, če ima prosti krajišči.

Definicija 3. Naj bosta A in B množici. Množico $A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ imenujemo *simetrična razlika* množic A in B.

Trditev 4. *Če v grafu obstaja povečujoča pot P glede na prirejanje M, potem je tudi $M \oplus P$ prirejanje in velja $|M \oplus P| = |M| + 1$.*

Dokaz. Prirejanje M in množica povezav $M \oplus P$ se razlikujeta le v povezavah, ki so na poti P. Vse vezane povezave v P so v $M \oplus P$ proste, vse proste pa vezane. Vsako od vozlišč na poti je še vedno krajišče le ene povezave, vozlišči na začetku in koncu poti, ki sta bili prej prosti, pa sta zdaj vezani in sta torej tudi krajišči le ene povezave iz $M \oplus P$, torej to je prirejanje. Ker se povečujoča pot P začne in konča s prosto povezavo, je v njej ena prosta povezava več kot je vezanih glede na M. Torej je v njej ena vezana povezava več kot je prostih glede na $M \oplus P$. Ker drugih povezav nismo spreminjali, velja $|M \oplus P| = |M| + 1$. ■

Ponavadi je naš cilj čim večje število parov, iskali bomo torej največja prirejanja. Trditev 4 nam pove, da lahko s pomočjo povečujočih poti dano prirejanje povečamo.

Definicija 5. Prirejanje M grafa G je *največje*, če za vsa prirejanja M' grafa G velja $|M'| \leq |M|$.

Opomba 6. Graf ima lahko več največjih prirejanj. Na grafu na sliki 3 so rdeče, modro in črno prirejenje največja prirejanja grafa.

V vsakem grafu obstaja največje prirejanje, v dvodelnih grafih ga lahko učinkovito poiščemo na primer z Madžarsko metodo, v splošnih pa z Edmondsovim Blossom algoritmom [12].

Naslednja trditev nam bo prišla prav pri oceni velikosti prirejanj, ki jih bomo dobili.

Trditev 7. *Naj bo M prirejanje v grafu $G = (V, E)$ in M^* največje prirejanje v grafu G. Če ima vsaka povečujoča pot glede na prirejanje M dolžino vsaj $2k + 1$, potem velja*

$$|M| \geq \frac{k}{k+1} \cdot |M^*|.$$

Dokaz. Oglejmo si graf z množico vozlišč V in množico povezav $M \oplus M^*$. Sestavljen je iz med seboj disjunktnih izmeničnih poti in ciklov, saj je vsako vozlišče krajišče največ ene povezave iz M in ene iz M^*.

Razlika v številu povezav iz M in številu povezav iz M^* v $M \oplus M^*$ je enaka kot v G, saj smo odstranili le tiste povezave, ki so v obeh prirejanjih. Cikli so sode dolžine, zato je v njih število povezav iz M enako številu povezav iz M^*. Enako velja za poti sode dolžine.

Začetna in končna povezava poti lihe dolžine sta iz istega prirejanja. Če bi bili obe iz M, bi našli povečujočo pot glede na M^*, kar pa je protislovje s tem, da je M^* največje prirejanje.

Če sta prva in zadnja povezava iz M^*, je to povečujoča pot P_j glede na M, zato ima dolžino vsaj $2k + 1$. V njej je torej $i_j \geq k$ povezav iz M in $i_j + 1$ povezav iz M^*.

Iz tega sledi

$$\frac{|M|}{|M^*|} = \frac{t + \sum_{j=1}^{n} i_j}{t + \sum_{j=1}^{k} (i_j + 1)} \geq \frac{k}{k+1},$$

kjer je t skupno število povezav iz M (M^*) v sodih ciklih in sodih poteh in n število lihih poti. Desno neenakost lahko preverimo s preprostim računom. Velja torej ocena

$$|M| \geq \frac{k}{k+1} \cdot |M^*|.$$

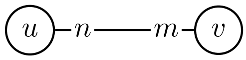
■

Denimo, da razvrščamo plesalke in plesalce v pare, pri čemer želimo poleg tega, da se med seboj poznajo, čim bolj upoštevati tudi njihove želje. Vsaka plesalka in vsak plesalec imata svoj seznam preferenc glede na to, s katero osebo bi najraje plesala. Za predstavitev takega problema je najbolj primeren usmerjen graf s funkcijo preferenc vozlišč.

Definicija 8. Naj bo $G = (V, E)$ usmerjen graf. *Funkcija preferenc vozlišč* je preslikava $f : E \to \mathbb{N}$. Če f slika usmerjeno povezavo uv v neko naravno število n, to razumemo kot *v je n-ta izbira u*. Funkcija preferenc je *stroga*, če f za poljubno vozlišče u slika usmerjene povezave, ki se začnejo v krajišču u, v različna števila. To lahko razumemo tudi, kot da ne dopuščamo deljenja mest oziroma izenačenja na seznamu preferenc.

Definicija funkcije preferenc dopušča primer, ko bi vozlišče u imelo recimo drugo izbiro, prve pa ne. Ker nas zanima le vrstni red izbir vozlišča u, lahko v tem primeru drugo izbiro premaknemo na prvo mesto in podobno ostale izbire premaknemo tako, da dobimo strnjeno zaporedje izbir. Ker se vse lastnosti, ki jih bomo uporabljali v nadeljevanju, ob tem ohranijo, lahko predpostavimo, da imajo naše funkcije preferenc za vsako vozlišče strnjeno zaporedje izbir, ki se začne s prvo izbiro.

S prehodom na usmerjene grafe lahko naletimo na težave, saj se lahko zgodi, da je uv povezava grafa, medtem ko vu ni. Če glede na problem, ki ga rešujemo, to pomeni, da vozlišči u in v ne moreta biti par, lahko grafu odstranimo vse take povezave, saj se množica možnih prirejanj s tem ne bo spremenila, ali pa se omejimo na polne grafe. Privzemimo tudi, da iščemo prirejanje, kjer



Slika 1. Prikazovanje povezav.

je vsako vozlišče raje v paru z enim od vozlišč s svojega seznama preferenc, kot da ni v paru. Vrednosti funkcije preferenc lahko prikažemo kar na povezavah grafa. Za čim večjo preglednost jih bomo prikazovali kot na sliki 1, kjer je v n-ta izbira u ($f(uv) = n$) in u m-ta izbira v ($f(vu) = m$).

Eden od načinov za razvrstitev plesalk in plesalcev v pare, pri katerih upoštevamo njihove sezname preferenc, so stabilna prirejanja.

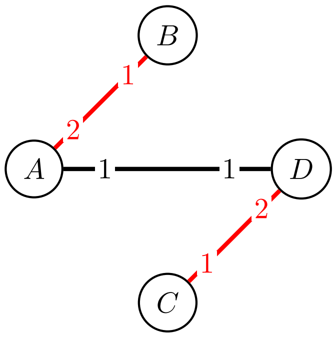
Definicija 9. Naj bo $G = (V, E)$ usmerjen graf in funkcija $f : E \to \mathbb{N}$ funkcija preferenc vozlišč. Prirejanje M je *stabilno*, če ne obstajata taki dve vozlišči a, b, da $ab \notin M$ in velja

- a ima raje b kot svoj trenuten par ali a ni v nobenem paru,
- b ima raje a kot svoj trenuten par ali b ni v nobenem paru.

Povezavi a, b, ki ustreza pogojem iz definicije, pogosto pravimo tudi *blokirajoča povezava*, oziroma pravimo, da par $\{a, b\}$ *blokira* prirejanje M.

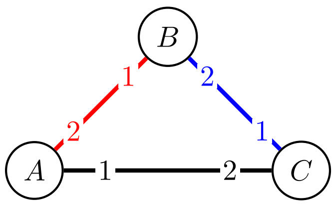
Oglejmo si stabilna prirejanja na nekaj primerih.

Zgled 10. Oglejmo si graf na sliki 2. Rdeče prirejanje $\{AB, CD\}$ ni stabilno, saj si A in D nista prirejena, vendar ima A raje D kot B in D raje A kot C. Črno prirejanje $\{AD\}$ pa je stabilno.



Slika 2. Primer stabilnega prirejanja.

Zgled 11. Oglejmo si graf na sliki 3. Rdeče prirejanje $\{AB\}$ ni stabilno, saj ga blokira par $\{A, C\}$. Črno prirejanje $\{AC\}$ blokira par $\{B, C\}$. Modro prirejenje $\{BC\}$ pa blokira par $\{A, C\}$. Prazno prirejanje blokira katerikoli od parov. Ker so to vsa možna prirejanja v danem grafu, graf sploh nima stabilnega prirejanja.



Slika 3. Primer grafa brez stabilnega prirejanja.

Torej obstoj stabilnega prirejanja v grafih v splošnem ni zagotovljen, če pa se omejimo na dvodelne grafe s strogo funkcijo preferenc, stabilno prirejanje vedno obstaja in ga znamo tudi poiskati, kar bomo pokazali v naslednjem razdelku.

3. Gale-Shapleyjev algoritem

V tem poglavju bomo opisali Gale-Shapleyjev algoritem za reševanje problema stabilnih zakonov, ki sta ga leta 1962 objavila David Gale in Lloyd Shapley [2]. V problemu stabilnih zakonov imamo skupino deklet in skupino fantov, ki jih poskušamo razvrstiti v pare tako, da ne obstajata fant in dekle, ki bi bila raje drug z drugim, kot s svojim trenutnim parom. Iščemo torej stabilno prirejanje. Vendar ali v poljubnem dvodelnem grafu s strogo funkcijo preferenc sploh obstaja stabilno prirejanje?

Izrek 12. *Vsak dvodelen graf s strogo funkcijo preferenc ima stabilno prirejanje.*

Izrek bomo dokazali s konstrukcijo Gale-Shapleyjevega algoritma, ki poišče stabilno prirejanje v dvodelnem grafu s strogo funkcijo preferenc. Oglejmo si torej postopek Gale-Shapleyjevega algoritma.

Imamo skupino fantov in deklet, od katerih ima vsak svoj seznam strogih preferenc. Izberemo eno skupino (recimo fante), ki bo postavljala ponudbe drugi skupini (dekletom), medtem ko bo druga skupina ponudbe ali zavračala ali sprejemala.

Najprej vsak fant postavi ponudbo dekletu, ki je prvo na njegovem seznamu preferenc. Nato vsako dekle, ki je prejelo vsaj eno ponudbo, sprejme ponudbo fanta, ki je najvišje na seznamu njenih preferenc, in zavrne vse ostale. Nato se začne nov krog, kjer vsi fantje, ki so bili zavrnjeni, postavijo ponudbo naslednjemu dekletu na svojem seznamu. Dekleta lahko prej sprejeto ponudbo zavrnejo, če so prejele boljšo, in sprejmejo novo. Na novo zavrnjeni fantje, torej tudi ti, ki so jih zavrnila dekleta, ker so prejela boljšo ponudbo, v naslednjem krogu postavijo ponudbo naslednjemu dekletu na svojem seznamu.

Ta postopek se nadaljuje, dokler nismo vseh razvrstili v pare ali pa so vsi fantje, ki niso v paru, prišli do konca svojega seznama preferenc.

Preverimo, da je dobljeno prirejanje res stabilno. Če fant v postavi ponudbo dekletu u, ga ta zavrne le, če je prejela boljšo ponudbo. Če pa fant v ni postavil ponudbe dekletu u, dekle u ali ni na njegovem seznamu ali pa je na koncu prirejen dekletu, ki je višje na njegovem seznamu. Torej nobeno dekle u in fant v ne blokirata končnega prirejanja. Dobljeno prirejanje torej je stabilno. To dokazuje, da Gale-Shapleyjev algoritem vrne stabilno prirejanje.

Opomba 13. Graf ima lahko več stabilnih prirejanj, algoritem nam vrne enega od teh. Če bi zamenjali skupine, torej če bi dekleta postavljala ponudbe, bi lahko dobili drugo stabilno prirejanje.

Razmislimo še, kako učinkovit je Gale-Shapleyjev algoritem. Vsak fant postavi ponudbo vsakemu dekletu na svojem seznamu največ enkrat, torej bomo potrebovali največ toliko korakov, kot je povezav od fantov do deklet. Algoritem je tako linearen glede na velikost vhodnih podatkov.

4. Popularna prirejanja

Opazimo lahko, da so moči stabilnih prirejanj lahko precej manjše od moči največjih prirejanj v grafu. Recimo, v zgledu 10 imamo stabilno prirejanje moči 1 (črno) in največje prirejanje moči 2 (rdeče). Zahteve za stabilna prirejanja bi torej želeli nekoliko sprostiti, da bi dobili prirejanje, ki še vedno na nek način upošteva preference vozlišč kot celote, vendar omogoča večje število parov v prirejanju. To si lahko predstavljamo, kot da vozliščem damo moč glasovanja nad prirejanji. Za poljubni dve prirejanji vprašamo vsako vozlišče, katero mu je ljubše. Vozlišča se o ljubšem prirejanju odločijo glede na svoj par ali pomanjkanje le-tega v prirejanju. Če je vozlišče u v prvem prirejanju v paru z vozliščem, ki je višje na seznamu njegovih preferenc kot vozlišče, s katerim je v paru v drugem prirejanju, ima vozlišče u raje prvo prirejanje in glasuje zanj. Vozlišče je vedno raje v paru z nekom iz svojega seznama, kot da je brez para. Vozlišče se lahko tudi vzdrži glasovanja, če mu nobeno od prirejanj ni ljubše. To se lahko zgodi, kadar je njegov par v obeh prirejanjih enak, ali pa v primeru, ko preferenčna funkcija ni stroga in pride do izenačenja.

Na podoben način si stabilna prirejanja lahko predstavljamo, kot da vozliščem namesto moči izbiranja med dvema prirejanjema damo moč ugovora na prirejanje v paru. Blokirajoč par bi torej podal ugovor v primeru, ko prirejanje ni stabilno. V tem razdelku bomo definirali popularna prirejanja, raziskali njihove lastnosti in primerjavo s stabilnimi prirejanji. Vsebina naslednjega poglavja je povzeta po [3] in [6].

Definicija 14. Naj bo $G = (V, E)$ usmerjen graf in $f : E \to \mathbb{N}$ funkcija preferenc. Naj bosta M in N prirejanji v grafu G. S $\Phi(M, N)$ označimo število vozlišč, ki imajo prirejanje M raje kot prirejanje N. Prirejanje M je *vsaj tako popularno* kot prirejanje N, če velja $\Phi(M, N) \geq \Phi(N, M)$. Če velja $\Phi(M, N) > \Phi(N, M)$, pravimo, da prirejanje M *premaga* prirejanje N.

Definirana relacija na množici prirejanj ni tranzitivna, kar ilustrira zgled 11. Modro prirejanje je vsaj tako popularno kot črno prirejanje, saj zanj glasujeta vozlišči B in C, za črno pa le A. Na podoben način je črno prirejanje vsaj tako popularno kot rdeče prirejanje, modro prirejanje pa ni vsaj tako popularno kot rdeče prirejanje.

Definicija 15. Prirejanje M je *popularno*, če je vsaj tako popularno kot katerokoli drugo prirejanje.

Trditev 16. *Vsako stabilno prirejanje v grafu s strogo funkcijo preferenc je popularno.*

Dokaz. Naj bo $G = (V, E)$ graf in $\Phi : E \to \mathbb{N}$ stroga funkcija preferenc. Naj bo M stabilno prirejanje. Denimo, da M ni popularno. Torej obstaja prirejanje N, ki ga premaga, torej velja $\Phi(M, N) < \Phi(N, M)$. Zato obstaja vsaj eno vozlišče u, ki ima raje prirejanje N kot prirejanje M. Ker je vozlišče vedno raje v paru kot ne in ker bi se, če bi bilo v obeh prirejanjih samo ali v paru z istim vozliščem, vzdržalo glasovanja, to tudi pomeni, da je vozlišče u v prirejanju N v paru z nekim vozliščem v, s katerim ni v paru v prirejanju M. Ker imamo funkcijo strogih preferenc, iz tega sledi, da mora imeti vozlišče v eno od prirejanj raje. Če ima raje prirejanje N, pridemo v protislovje, saj tako vozlišči u in v tvorita blokirajočo povezavo v prirejanju M, kar bi pomenilo, da M ni stabilno. Torej ima vozlišče v raje prirejanje M. S tem pa izenači glas vozlišča u, zato mora med preostalimi vozlišči zagotovo obstajati še vsaj eno vozlišče, ki ima raje prirejanje N.

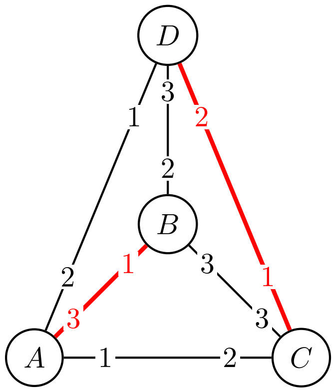
Ponavljamo zgornji razmislek in ker imamo le končno število vozlišč, bomo ali prišli do para v N, ki blokira M, ali pa nam bo zmanjkalo vozlišč in bomo prišli v protislovje s tem, da prirejanje N premaga prirejanje M. Vsako stabilo prirejanje grafa G je torej popularno. ■

Iz zgleda 11 vidimo, da popularno prirejanje ne obstaja vedno. Iz trditve 16 in izreka 12 pa sledi, da lahko popularno prirejanje vedno najdemo v dvodelnem grafu s strogimi preferencami

V nadaljevanju se omejimo na grafe s strogo funkcijo preferenc. V tem primeru obstoj stabilnega prirejanja torej pomeni tudi obstoj popularnega prirejanja. Kaj pa obratno? V dvodelnih grafih stabilno prirejanje vedno obstaja po izreku 12, zato si oglejmo grafe, ki niso dvodelni.

Zgled 17. Graf na sliki 4 ima strogo funkcijo preferenc in ni dvodelen. Označeno rdeče prirejanje $\{AB, CD\}$ je popularno in da se preveriti, da je to tudi edino popularno prirejanje v tem grafu. Vendar pa ni stabilno, saj ga blokira par $\{A, D\}$. Iz trditve 16 sledi, da graf nima stabilnega prirejanja. Torej: če ima graf popularno prirejanje, to še ne pomeni, da ima tudi stabilno prirejanje.

Popularna prirejanja v istem grafu z isto funkcijo preferenc imajo lahko različne moči. Izkaže se, da velja naslednja trditev.



Slika 4. Primer grafa, ki ima popularno in nima stabilnega prirejanje.

Trditev 18. *Naj bo G graf. Stabilna prirejanja v grafu G s strogo funkcijo preferenc so popularna prirejanja najmanjše moči.*

Dokaz. Naj bo M stabilno prirejanje grafa G. Po trditvi 16 je M tudi popularno. Denimo, da prirejanje M ni popularno prirejanje najmanjše moči. Torej obstaja popularno prirejanje N, ki ima manjšo moč kot M. To pomeni, da obstaja vsaj eno vozlišče u_1, ki je v prirejanju M v paru, v prirejanju N pa ne. Torej ima to vozlišče prirejanje M raje kot prirejanje N. Ker sta M in N obe popularni prirejanji, nobeno ne premaga drugega, oziroma mora veljati $\Phi(M, N) = \Phi(N, M)$. Ker ima u_1 raje prirejanje M, mora obstajati vsaj eno vozlišče u_2, ki ima raje prirejanje N. To podobno kot v prejšnem dokazu pomeni, da je u_2 v prirejanju N v paru z nekim vozliščem u_3. Če ima tudi u_3 raje prirejanje N, pridemo v protislovje s stabilnostjo prirejanja M. Zaradi strogosti funkcije preferenc se u_3 glasovanja ne vzdrži. Torej ima u_3 raje prirejanje M. Ker $u_3 \neq u_1$ (saj u_1 v prirejanju N ni v paru), to pomeni, da mora obstajati še eno vozlišče, ki ima raje prirejanje N. Tako nadaljujemo, dokler nam ne zmanjka vozlišč in pridemo v protislovje s tem, da je prirejanje N popularno, saj ga premaga prirejanje M. ■

S to trditvijo smo pravzaprav dokazali še nekaj.

Posledica 19. *Vsa stabilna prirejanja grafa s strogo funkcijo preferenc imajo enako moč.*

Poleg tega velja tudi naslednja trditev.

Trditev 20. *Za dan graf G s strogo funkcijo preferenc je množica vozlišč, ki so v paru, za vsako stabilno prirejanje enaka.*

Dokaz. Denimo, da sta M in N stabilni prirejanji v grafu G. Spomnimo se, da z $U(M)$ označujemo vozlišča, ki so v prirejanju M v paru. Naj bo u vozlišče, ki ima v prirejanju M par v, v prirejanju N pa ni v paru; torej $u \in U(M), u \notin U(N)$. Vozlišče u ima torej raje prirejanje M kot prirejanje N. Če bi imelo vozlišče v prav tako raje M kot N, bi vozlišči u in v tvorili blokirajočo povezavo v prirejanju N in bi prišli v protislovje. Ker se v ne vzdrži glasovanja, ima torej raje prirejanje N, kar pa pomeni, da je v prirejanju N v paru z nekim vozliščem t, torej $v, t \in U(N)$. Vozlišče t mora imeti raje prirejanje M, saj bi v nasprotnem primeru z v tvorila blokirajočo povezavo in M ne bi bilo stabilno. To pa pomeni, da je $t \in U(M)$ in t je očitno različen od u. To ponavljamo, dokler nam ne zmanjka vozlišč in pridemo v protislovje s stabilnostjo N in M. To pa pomeni, da tako vozlišče u ne more obstajati in velja $U(M) = U(N)$ za vsaki stabilni prirejanji M in N. ■

Ta lastnost stabilnih prirejanj se razširi tudi na popularna prirejanja.

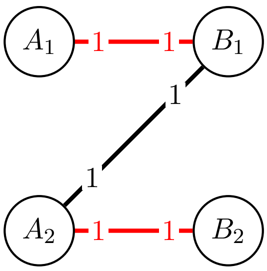
Trditev 21. *Naj bo $G = (V, E)$ graf s strogo funkcijo preferenc. Vozlišča, ki so v paru v poljubnem stabilnem prirejanju grafa G, so v paru tudi v poljubnem popularnem prirejanju grafa G.*

Dokaz. Označimo z U množico vseh vozlišč, ki so v paru v poljubnem stabilnem prirejanju grafa G, za katero vemo, da je v vsakem stabilnem prirejanju enaka po trditvi 20. Denimo, da obstaja popularno prirejanje M, v katerem vozlišče $s \in U$ ni v paru. Naj bo S poljubno stabilno prirejanje. Graf $G' = (V, M \oplus S)$ vsebuje izmenično pot P glede na M, ki se konča s povezavo iz S z enim krajiščem v vozlišču s.

Če je pot P sode dolžine, je $P = s, v_1, v_2, \ldots, v_{2k}$ za nek $k \in \mathbb{N}$. Ker je pot P izmenična glede na M in $sv_1 \notin M$, so $v_1v_2, v_3v_4, \ldots, v_{2k-1}v_{2k} \in M$. Če bi imeli v katerem od teh parov obe vozlišči raje prirejanje M kot prirejanje S, bi tvorili blokirajočo povezavo in bi prišli do protislovja s stabilnostjo. Zato ali obe vozlišči glasujeta za S ali pa eno za S in eno za M ter se njuna glasova med sabo izničita. Vozlišče s ima seveda raje prirejanje S, tako pa pridemo do protislovja s popularnostjo M, saj ga premaga prirejanje $M \oplus P$.

Če je pot P lihe dolžine, je $P = s, v_1, v_2, \ldots, v_{2k-1}$ za nek $k \in \mathbb{N}$. Ker je pot P izmenična glede na M in $sv_1 \notin M$, so $v_1v_2, v_3v_4, \ldots, v_{2k-3}v_{2k-2} \in M$. V tem primeru imata vozlišče s in vozlišče v_{2k-1} raje prirejanje S in je tako kot prej med njimi manj ali enako glasov za M, kot jih je za S. Torej spet pridemo v protislovje s popularnostjo prirejanja M. ■

Zgled 22. Na sliki 5 je graf s funkcijo preferenc, ki ni stroga. Ker je povezava blokirajoča le, če imata obe vozlišči raje drugo vozlišče kot svoj trenuten par in ne, če sta med izbirami indiferentni, sta v spodnjem grafu tako rdeče kot črno prirejanje stabilni. Očitno množici vozlišč, ki so vezana v teh dveh prirejanjih, nista enaki. Torej posledica 19 ne drži v grafih, ki nimajo stroge funkcije preferenc.



Slika 5. Primer grafa z različnima množicama vozlišč za različni stabilni prirejanji.

Kaj lahko povemo o velikosti stabilnih prirejanj?

Izrek 23. *Naj bo $G = (V, E)$ graf s strogo funkcijo preferenc. Naj bo S stabilno prirejanje in M^* največje prirejanje v grafu G. Potem velja*

$$|S| \geq \frac{1}{2} \cdot |M^*|.$$

Dokaz. Povečujoča pot dolžine 1 je povezava med dvema prostima vozliščema, torej je blokirajoča povezava, takih pa v stabilnem prirejanju ni. Torej so vse povečujoče poti vsaj dolžine 3 in po trditvi 7 sledi

$$|S| \geq \frac{1}{2} \cdot |M^*|.$$

■

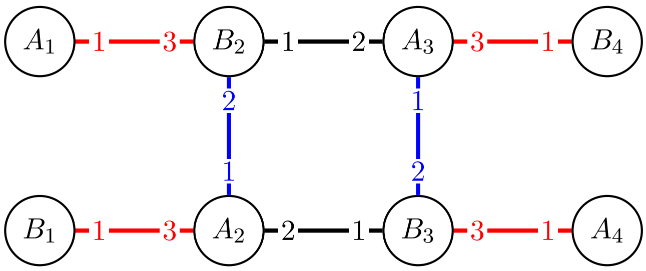
Iz zgleda 10 vidimo, da te ocene ne moremo izboljšati. Vsa popularna prirejanja so torej največ dvakrat manjša kot največje prirejanje v grafu. Naš cilj pa seveda ni iskanje prirejanj majhnih moči, temveč čim večjih.

5. Največja popularna prirejanja

Največje popularno prirejanje je popularno prirejanje, ki ima največjo moč med vsemi popularnimi prirejanji v danem grafu s podano funkcijo preferenc. Največje popularno prirejanje je v splošnem težko poiskati. Če ne privzamemo strogosti funkcije preferenc, je že iskanje popularnega prirejanja ali dokaz, da le-to ne obstaja, NP-poln problem [3].

Zaenkrat se torej omejimo na dvodelne grafe $G = (A \cup B, E)$ s strogo funkcijo preferenc, za katere vemo, da popularno prirejanje obstaja, saj vemo, da obstaja stabilno prirejanje (izrek 12) in je vsako stabilno prirejanje popularno (trditev 16). S tem poiščemo popularno prirejanje najmanjše moči (trditev 18). Zdaj bi potrebovali le še način za iskanje ostalih popularnih prirejanj oziroma predvsem največjih.

Zgled 24. Da se pokazati, da ima dvodelen graf na sliki 6 dve popularni prirejanji moči 2 (modro in črno) ter eno popularno prirejanje moči 4 (rdeče). Zanimivo pa je, da nima popularnega prirejanja moči 3. Torej iterativno povečevanje moči prirejanja za 1 ne bo delovalo.



Slika 6. Primer grafa s popularnimi prirejanji moči 2 in 4.

Leta 2013 sta Chien-Chung Huang in Telikepalli Kavitha predstavila učinkovit algoritem za iskanje največjega popularnega prirejanja v dvodelnem grafu s strogo funkcijo preferenc [6]. Leta 2014 je Telikepalli Kavitha predstavila izboljšan algoritem [4]. Oglejmo si slednjega, ki deluje kot nekakšen dvakratni Gale-Shapleyjev algoritem in ga bomo za potrebe tega članka tako tudi imenovali.

Imamo torej dvodelni graf $G = (A \cup B, E)$ s strogo funkcijo preferenc in tako kot pri Gale-Shapleyjevem algoritmu si bomo vozlišča predstavljali kot fante (A) in dekleta (B), ki jih poskušamo razvrstiti v pare. Kot prej bodo fantje postavljali ponudbe, dekleta pa jih bodo sprejemala ali zavračala. Razlika pa bo to, da imajo fantje dve možni stanji. Vsi fantje začnejo v prvem stanju in, kot v navadnem Gale-Shapleyjevem algoritmu, vsak fant postavi ponudbo dekletu na vrhu njegovega seznama preferenc. Le-ta izmed vseh ponudb sprejme tisto, ki je najvišje na njenem seznamu preferenc. Zavrnjeni fantje nato nadaljujejo po svojem seznamu in postavijo ponudbno naslednjemu dekletu, dekleta pa lahko prej sprejeto ponudbo zavrnejo, če so prejele boljšo, in sprejmejo novo. Tako nadaljujemo, dokler niso vsi v parih ali pa zavrnjeni fantje pridejo do konca svojega seznama. Na tej točki dobimo stabilno prirejanje.

Zdaj pa vse fante, ki niso v paru in so torej dosegli konec svojega seznama, povišamo v drugo stanje. Ti fantje gredo še enkrat od začetka skozi svoj seznam preferenc in postavljajo ponudbe dekletom. Vsako dekle raje sprejme ponudbo fanta v drugem stanju kot fanta v prvem stanju, ne glede na to, v kakšnem vrstnem redu sta na njenem seznamu preferenc. Izmed dveh fantov v drugem stanju pa ima še vedno dekle raje tistega, ki je višje na njenem seznamu. Tako nadaljujemo in ponavljamo korak, ko fantje postavijo ponudbe in jih dekleta sprejmejo ali zavrnejo. Vsakič, ko kateri od fantov v prvem stanju pride do konca svojega seznama, ga povišamo v drugo stanje in dobi priložnost, da se spet sprehodi čez svoj seznam. Če fant doseže konec svojega seznama še drugič, torej ko je v drugem stanju, se ustavi in neha postavljati ponudbe. Ko vse razvrstimo v pare ali pa se vsi fantje, ki niso v parih, ustavijo, dobimo prirejanje, ki ga bomo označili s S.

Spet se lahko vprašamo o časovni zahtevnosti opisanega algoritma. Vsak fant postavi ponudbo vsakemu dekletu na svojem seznamu največ dvakrat. Izvedli bomo torej največ dvakrat toliko korakov, kot je povezav od fantov do deklet. Torej tudi dvakratni Gale-Shapleyjev algoritem prirejanje najde v linearnem času glede na velikost vhodnih podatkov. Zdaj pa še pokažimo, da algoritem res vrne največje popularno prirejanje.

Izrek 25. *Naj bo $G = (A \cup B, E)$ dvodelen graf s strogo funkcijo preferenc. Prirejanje S, ki ga vrne dvakratni Gale-Shapleyjev algoritem, je največje popularno prirejanje v grafu G.*

Za dokaz tega izreka bomo uvedli nekaj novih oznak in si pomagali z nekaj lemami. Pri vseh lemah predpostavljamo, da je $G = (A \cup B, E)$ dvodelen graf s strogo funkcijo preferenc in S prirejanje, ki ga vrne dvakratni Gale-Shapleyjev algoritem.

Naj bo A_1 množica tistih fantov $a \in A$, ki so ob koncu algoritma v prvem stanju in za vsakega od njih obstaja neko dekle $b \in B$, da velja $S(b) = a$. Naj bo $A_2 = A \backslash A_1$. Naj bo $B_2 = \{b \in B \mid \exists a \in A_2 : S(b) = a\}$ množica deklet, ki so v paru s fanti iz A_2 in $B_1 = B \backslash B_2$. Z $A_1 \times B_1$ označimo množico povezav med vozlišči v A_1 in vozlišči v B_1, podobno $A_1 \times B_2$, $A_2 \times B_1$ in $A_2 \times B_2$.

Razmislimo, kakšne bi bile te množice, medtem ko teče algoritem. Na začetku so vsi fantje (dekleta) v množici A_1 (B_1), množica A_2 (B_2) pa je prazna. Ko se konča prvi krog Gale-Shapleyjevega algoritma, fante brez para premaknemo v A_2 (in kasneje tudi kateregakoli fanta, ki pride do konca svojega seznama) in začnemo drugi krog tako, da fantje spet postavijo ponudbe dekletom na svojih seznamih. Ko dekle sprejme ponudbo fanta v drugem stanju (A_2), jo premaknemo v B_2 in ker ima poljubnega fanta v drugem stanju raje kot kateregakoli v prvem, bo od zdaj naprej sprejemala le ponudbe fantov iz A_2, torej bo tudi ob koncu algoritma v množici B_2. Iz definicije množic A_2 in B_1 je očitno, da so vsi fantje brez para v A_2 in vsa dekleta brez para v B_1. Velja tudi $S \subseteq (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$.

Definicija 26. Za poljuben $u \in A \cup B$ in njegova soseda v in t označimo

$$\mathrm{vote}_u(v,t) = \begin{cases} 1 & \text{če ima } u \text{ raje } v \text{ kot } t, \\ -1 & \text{če ima } u \text{ raje } t \text{ kot } v, \\ 0 & \text{ostalo.} \end{cases}$$

Za poljubni prirejanji M in N v grafu G velja $\Phi(M,N) - \Phi(N,M) = \sum_{u \in V} \mathrm{vote}_u(M(u), N(u))$. Če u ni v paru v S, bo $\mathrm{vote}_u(v, S(u)) = 1$ za kateregakoli soseda v, saj je vsako vozlišče raje v paru.

Zaradi preglednosti tega dokaza bomo v nadeljevanju povezavo $e = uv = vu$ pisali kot $e = (u,v) = (v,u)$. Označimo vsako povezavo $e = (u,v)$ v $E \backslash S$ z (α_e, β_e), kjer je $\alpha_e = \mathrm{vote}_u(v, S(u))$ in $\beta_e = \mathrm{vote}_v(u, S(v))$. Opazimo, da je povezava blokirajoča natanko tedaj, ko je označena z $(1,1)$. Opazimo tudi, da bosta $\alpha_e, \beta_e \neq 0$, saj imamo stroge preference in smo označil le povezave, ki niso v S, torej $u \neq S(v)$ in $v \neq S(u)$. Sedaj pa si oglejmo nekaj lastnosti naše nove delitve vozlišč.

Lema 27. *Vsaka povezava $(a,b) \in A_2 \times B_1$ je označena z $(-1,-1)$.*

Dokaz. Ker je (a,b) povezava grafa, je a na seznamu b in obratno. Denimo, da je $a \in A_2$ in $b \in B_1$. Najprej opazimo, da je fant a v paru. Če ne bi bil, bi postavil ponudbo dekletu b, kar pa ni mogoče, saj je $b \in B_1$, torej ni nikoli prejela ponudbe fanta iz A_2, saj bi jo drugače sprejela in bila zato v B_2. Ker ji ni postavil ponudbe, to tudi pomeni, da se je ustavil že prej na seznamu, torej ima svoj trenuten par raje kot b. Torej je $\mathrm{vote}_a(b, S(a)) = -1$. Ker je $a \in A_2$, je moral priti do konca svojega seznama, kar pomeni, da ga je dekle b zavrnilo za boljšo ponudbo, in ker je njen trenuten par v prvem stanju, to pomeni, da je višje na njenem seznamu kot a. Torej je tudi $\mathrm{vote}_b(a, S(b)) = -1$ in je (a,b) označena z $(-1,-1)$. ■

Lema 28. *Vsaka povezava, označena z* $(1, 1)$*, je v* $A_1 \times B_2$*.*

Dokaz. Med potekom algoritma nobeno od deklet iz B_1 ne prejme ponudbe fanta iz A_2, torej v $A_1 \times B_1$ ni blokirajočih povezav, saj poljubno dekle iz B_1 izbere najljubšo izmed prejetih ponudb; če pa ji fant iz A_1 ponudbe ni postavil, to pomeni, da je v paru z dekletom, ki je višje na njegovem seznamu. Enako velja za $A_2 \times B_2$. Iz prejšne leme vemo, da je vsaka povezava iz $A_2 \times B_1$ označena z $(-1, -1)$. Sledi, da je vsaka povezava označena z $(1, 1)$ v $A_1 \times B_2$. ■

Oglejmo si podgraf grafa G, ki ga dobimo iz G tako, da izbrišemo vse povezave označene z $(-1, -1)$, in ga označimo z G_S. Izbrisali smo torej vse povezave iz $A_2 \times B_1$ in morda še kakšno od drugod.

Lema 29. *Naj bo* $P = y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$ *izmenična pot glede na* S *v* G_S*, kjer je* $(x_i, y_i) \in S$ *za* $i \geq 1$*.*

1. *Če je* $y_0 \in A_2 \cup B_1$*, potem nobena povezava na poti* P *ni označena z* $(1, 1)$*.*
2. *Če je* $y_0 \in A_1 \cup B_2$*, potem je največ ena povezava na poti* P *označena z* $(1, 1)$*.*

Dokaz. Naj bo $y_0 \in A_2$. V G_S ni povezav med A_2 in B_1, torej je $x_1 \in B_2$. Ker je y_1 njegov par, mora biti ta tudi v A_2. Tako sledi $x_i \in B_2$ in $y_i \in A_2$ za vsak $i \geq 1$. Torej je vsaka povezava v P v $A_2 \times B_2$ in nobena ni označena z $(1, 1)$.

Naj bo $y_0 \in B_1$. Podobno kot prej je potem x_i v A_1 in y_i v B_1 za vsak $i \geq 1$. Torej je vsaka povezava v P v $A_1 \times B_1$ in nobena ni označena z $(1, 1)$.

Naj bo $y_0 \in A_1$. Med A_1 in B_2 so povezave, ki so lahko označene z $(1, 1)$. Ko pot P enkrat pride v B_2, bo ostala v $A_2 \cup B_2$ po argumentu iz prejšnih dveh primerov. Torej je na poti P največ ena povezava iz $A_1 \times B_2$, torej je največ ena povezava označena z $(1, 1)$.

Naj bo $y_0 \in B_2$. Podobno kot prej pot lahko pride v A_1, vendar potem ostane v $A_1 \cup B_1$. Torej je na poti P največ ena povezava iz $A_1 \times B_2$, torej je največ ena povezava označena z $(1, 1)$. ■

Pot iz prvega primera leme 29 imenujmo *pot tipa 1*, pot iz drugega primera pa *pot tipa 2*.

Naj bo M' poljubno prirejanje grafa G. Če je povezava $e = (u, v) \in M'$ ena od tistih, ki smo jih označili z $(-1, -1)$, je za primerjavo popularnosti prirejanj M' in S vseeno, če jo izpustimo, oziroma če M' ne bi priredil u in v drug drugemu. To je res, ker je $\mathrm{vote}_u\left(M'(u), S(u)\right) = \mathrm{vote}_u\left(v, S(u)\right) = \alpha_e = -1$, torej ima u raje svoj par v S kot svoj par v M' in se njegov glas ne spremeni, tudi če mu M' ne priredi para. Simetrično velja za v. Torej lahko za primerjavo popularnosti gledamo M' v G_S oziroma prirejanje $M = M' \cap E\left(G_S\right)$ in velja $\Phi\left(M', S\right) = \Phi\left(M, S\right)$.

Oglejmo si graf H z množico vozlišč V in množico povezav $S \oplus M$. Ta je sestavljen iz med seboj disjunktnih izmeničnih poti in ciklov, saj ima vsako vozlišče lahko le eno povezavo iz S in eno iz M. Tem izmeničnim potem in ciklom lahko tudi pravimo *komponente* grafa H. Vsi cikli so sode dolžine, drugače bi bili dve zaporedni povezavi v ciklu iz istega prirejanja, kar pa je v protislovju z definicijo prirejanja.

Za primerjavo popularnosti prirejanj S in M je pravzavprav dovolj pogledati le vsa vozlišča v izmeničnih poteh in ciklih grafa H. Vozlišča, ki niso v nobeni izmenični poti ali ciklu, so ali v obeh prirejanjih brez para ali pa imajo v obeh prirejanjih isti par. Torej ne glasujejo za nobeno od prirejanj, saj je situacija za ta vozlišča v obeh prirejanjih enaka, zato se lahko omejimo le na komponente grafa H. Poglejmo, kaj lahko povemo o komponentah grafa H.

Izrek 30. *Za poljubno prirejanje* M *grafa* G_S *velja naslednja trditev. Če je* P *izmenični cikel ali izmenična pot glede na* M*, ki je komponenta* H*, potem velja* $\Phi\left(S \oplus P, S\right) \leq \Phi\left(S, S \oplus P\right)$*.*

Dokaz. Naj bo P izmenična pot ali cikel glede na M v H. Vrednost $\Phi(S \oplus P, S) - \Phi(S, S \oplus P)$ lahko zapišemo kot $\sum_{u \in P} \text{vote}_u ((S \oplus P)(u), S(u))$, saj je razlika med prirejanjema le v vozliščih, ki so na P, za vsa ostala bo $\text{vote}_u ((S \oplus P)(u), S(u)) = 0$. Če pa se omejimo le na P, je prirejanje $S \oplus P$ ravno enako kot prirejanje M. Torej velja $\text{vote}_u ((S \oplus P)(u), S(u)) = \text{vote}_u (M(u), S(u))$ za $u \in P$. To pa lahko zapišemo tudi kot

$$\Phi(S \oplus P, S) - \Phi(S, S \oplus P) = \sum_{\substack{u \in P \\ u \notin U(M)}} -1 + \sum_{e \in P \cap M} (\alpha_e + \beta_e), \tag{1}$$

pri čemer za povezavo $e = (u, v)$ iz $P \cap M$ velja $\alpha_e = \text{vote}_u (v, S(u)) = \text{vote}_u (M(u), S(u))$ ter $\beta_e = \text{vote}_v (u, S(v)) = \text{vote}_v (M(v), S(v))$ in je $U(M)$ iz definicije 1.

Če je P izmenični cikel, mora na njemu obstajati vozlišče $u \in A_2 \cup B_1$, saj so vse povezave S med A_1 in B_1 ali med A_2 in B_2. Torej je $P \setminus \{(u, S(u))\}$ izmenična pot tipa 1. Po lemi 29 v taki poti ni povezave, označene z $(1,1)$, torej je $\alpha_e + \beta_e \leq 0$ za vsako povezavo $e \in P \cap M$. Tako je desna stran enačbe (1) največ 0 in sledi $\Phi(S \oplus P, S) \leq \Phi(S, S \oplus P)$.

Če je P izmenična pot, ki je komponenta $S \oplus M$, da je vsaj eno krajišče prosto glede na S, je to krajišče v $A_2 \cup B_1$, saj so vsa vozlišča, ki nimajo para v S, v $A_2 \cup B_1$. Torej je P pot tipa 1 in po lemi 29 v njej ni povezave označene z $(1,1)$. Spet sledi $\alpha_e + \beta_e \leq 0$ za vsako povezavo $e \in P \cap M$. Torej velja $\Phi(S \oplus P, S) \leq \Phi(S, S \oplus P)$.

Če je P taka izmenična pot, ki je komponenta $S \oplus M$, da sta obe krajišči vezani glede na S, po lemi 29 vemo, da je lahko na poti P (brez krajišč) največ ena povezava označena z $(1,1)$. Tu smo krajišči spustili, saj sta prva in zadnja povezava na poti P iz prirejanja S, torej nista označeni. Torej je $\sum_{e \in P \cap M} (\alpha_e, \beta_e) \leq 2$. Ker pa nobeno od krajišč poti P ni vezano v M, prispevata k desni strani enačbe (1) vsako -1. Torej na desni strani enačbe (1) dobimo največ $-2 + 2 = 0$. Torej tudi v tem primeru sledi $\Phi(S \oplus P, S) \leq \Phi(S, S \oplus P)$. ∎

Če se omejimo le na komponento P, po razmisleku iz dokaza velja $\Phi(S \oplus P, S) = \Phi(M, S)$. Torej za poljubno prirejanje M' grafa G, pri čemer je $M = M' \cap E(G_S)$, velja

$$\Phi(M', S) = \sum_{P \in S \oplus M} \Phi(S \oplus P, S).$$

Z uporabo izreka 30 dobimo

$$\Phi(M', S) = \sum_{P \in S \oplus M} \Phi(S \oplus P, S) \leq \sum_{P \in S \oplus M} \Phi(S, S \oplus P) = \Phi(S, M'),$$

kar dokazuje, da je prirejanje S res popularno.

Dokažimo še, da je tudi največje popularno prirejanje. Spomnimo se, da je povečujoča pot glede na S izmenična pot, ki ima obe krajišči prosti (brez para v S).

Lema 31. *V G_S ni nobene povečujoče poti glede na S.*

Dokaz. Naj bo $P = y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, y_{n-1}, x_n$ povečujoča pot v G_S glede na S. Vozlišči y_0 in x_n sta iz različnih delov dvodelnega grafa G in brez para v S. Vsa vozlišča, ki nimajo para v S, pa so v $A_2 \cup B_1$. Brez škode za splošnost lahko torej privzamemo $y_0 \in B_1$ in $x_n \in A_2$. Ker so vse povezave v S med A_1 in B_1 ali med A_2 in B_2, mora P vsebovati povezavo med B_1 in A_2. Takih povezav pa v G_S ni. Torej povečujoča pot ne more obstajati. ∎

Lema 32. *Naj bo M' tako prirejanje grafa G, da je $|M'| > |S|$. Potem je $\Phi(S, M') > \Phi(M', S)$.*

Dokaz. Ker velja $|M'| > |S|$, v grafu G obstaja povečujoča pot $P \subseteq S \oplus M'$ glede na S. Za primerjavo popularnosti se lahko spet omejimo na G_S z $M = M' \cap E(G_S)$. Ker po prejšni lemi v G_S ni povečujočih poti glede ne S, mora P v G_S razpasti na več poti $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Poti P_1 in P_n imata vsaka eno prosto krajišče glede na S, ki pa mora biti v $A_2 \cup B_1$, saj so tam vsa vozlišča, ki nimajo para v S. Torej po lemi 29 v P_1 in P_n, ni nobene povezave, označene z $(1, 1)$.

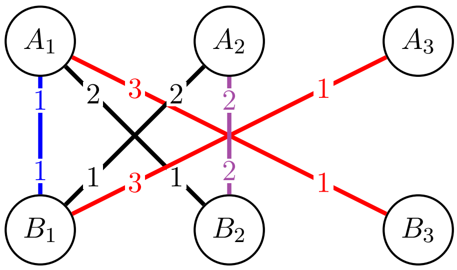
V poti P_1 so torej povezave iz M označene le z $(1, -1)$ ali $(-1, 1)$ (ker povezav, označenih z $(-1, -1)$, sploh ni v G_S). Pot P_1 se začne s povezavo iz M in nadaljuje izmenično do zadnjega krajišča, ki pa mora biti brez para v M, da pot P_1 ni povečujoča, ima pa par v S. Torej ima drugo krajišče raje prirejanje S, medtem ko se glasovi vseh ostalih vozlišč iz poti izenačijo. Če se omejimo le na pot P_1, na njej torej velja $\Phi(S, M) = \Phi(M, S) + 1$, kar pomeni tudi $\Phi(S, M') = \Phi(M', S) + 1$ na poti P_1.

Enako velja tudi za P_n, česar pa niti ne potrebujemo, saj za poljubno komponento P' (izmenično pot ali cikel) $S \oplus M$, kar vključuje vse ostale poti $P_2, \ldots, P_n$, na katere je razpadla povečujoča pot P, po izreku 30 velja $\Phi(S \oplus P', S) \leq \Phi(S, S \oplus P')$. Torej po enakem razmisleku kot prej sledi $\Phi(S, M') > \Phi(M', S)$. ∎

Dokazali smo, da prirejanje S premaga vsako prirejanje, ki ima večjo moč kot S. Torej je prirejenje S res največje popularno prirejanje in je s tem izrek 25 dokazan.

Prej smo omenili, da imajo stabilna in posledično popularna prirejanja vsaj polovico moči največjih prirejanj v grafu. Ali lahko povemo kaj o moči največjega popularnega prirejanja?

Zgled 33. V grafu na sliki 7 je z rdečo in vijolično označeno največje prirejanje, ki ima moč 3. Edino popularno prirejanje in torej tudi največje popularno prirejanje je označeno z modro in vijolično ter ima moč 2.



Slika 7. Primer grafa z največjim prirejanjem moči 3 in največjim popularnim prirejanjem moči 2.

V zgornjem zgledu ima največje popularno prirejanje dve tretjini moči največjega prirejanja. Izkaže se, da je to ravno spodnja meja za velikost največjega popularnega prirejanja glede na velikost največjega prirejanja. S pomočjo leme 31 lahko dokažemo naslednje.

Trditev 34. *Naj bo $G = (A \cup B, E)$ graf s strogo funkcijo preferenc. Naj bo S največje popularno prirejanje grafa G in M^* največje prirejanje grafa G. Potem velja $|S| \geq \frac{2}{3} \cdot |M^*|$.*

Dokaz. Pokažimo, da v grafu G ni nobene povečujoče poti glede na S, ki bi imela dolžino manjšo ali enako 3. Če bi obstajala povečujoča pot dolžine 1, bi bila to pravzaprav le povezava med dvema vozliščema, ki sta v S brez para, torej označena z $(1, 1)$, torej bi bila tudi v G_S. Tukaj pa pridemo do protislovja, saj je to tudi povečujoča pot v G_S, ki pa po lemi 31 ne obstaja.

Če bi obstajala povečujoča pot dolžine 3, bi bili njeni krajišči brez para v S, torej prva in tretja (zadnja) povezava poti zagotovo ne bi bili označeni z $(-1, -1)$, torej bi bili v G_S. Druga povezava pa je iz S, torej je tudi v G_S. S tem je ta pot v G_S in je povečujoča, kar pa spet vodi v protislovje z lemo 31. Torej je vsaka povečujoča pot v G glede na prirejanje S vsaj dolžine 5. Potem po trditvi 7 sledi $|S| \geq \frac{2}{3} \cdot |M^*|$, kjer je M^* največje prirejanje grafa G. ∎

6. Zaključek

Dokazali smo, da v dvodelnih grafih s strogimi preferencami vedno obstajajo popularna prirejanja in predstavili algoritem za njihovo iskanje. Poleg tega smo raziskali lastnosti najmočnejših popularnih prirejanj in pokazali, da imajo vsaj dve tretjini moči največjega možnega prirejanja v grafu. Kljub temu pa ostaja še veliko odprtih vprašanj, predvsem pri iskanju učinkovitih algoritmov za iskanje največjih popularnih prirejanj v splošnih grafih in pri grafih s preferencami, ki niso stroge.

LITERATURA

[1] R.J. Wilson, J.J. Watkins, *Uvod v teorijo grafov*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 1997.

[2] D. Gale in L. S. Shapley, *College Admissions and the Stability of Marriage*, The American Mathematical Monthly, **69** (1962), 9–15.

[3] Á. Cseh, *Popular Matchings*, v: U. Endriss (ur.), *Trends in Computational Social Choice*, ILLC, University of Amsterdam, (2017), 105–122.

[4] T. Kavitha, *A Size-Popularity Tradeoff in the Stable Marriage Problem*, SIAM Journal on Computing, **43** (2014), 52–71.

[5] P. Gärdenfors, *Match making: assignments based on bilateral preferences*, Behavioral Science, **20** (1975), 166–173.

[6] C.-C. Huang in T. Kavitha, *Popular matchings in the stable marriage problem*, Information and Computation **222** (2013), 180–194.

[7] D. Kőnig, *Theory of Finite and Infinite Graphs*, Birkhäuser, 1990.

[8] H.W. Kuhn, *The Hungarian method for the assignment problem*, Naval Research Logistics Quarterly, **2** (1955), 83–97.

[9] D.J. Abraham, K. Cechlárová, D. Manlove in K. Mehlhorn, *Pareto Optimality in House Allocation Problems*, Algorithmica, **50** (2007), 495–528.

[10] T. Kavitha, J. Mestre in M. Nasre, *Popular Matchings with Multiple Partners*, Theoretical Computer Science, **547** (2014), 27–38.

[11] R. McCutchen, *The Least-Unpopularity-Factor Matching Problem*, Proceedings of the 16th Annual European Symposium on Algorithms (ESA), **5193** (2008), 593–604.

[12] J. Edmonds, E.L. Johnson in S.C. Lockhart, *Blossom I: A computer code for the matching problem*, IBM T. J. Watson Research Center, Yorktown Heights, New York, 1969.