IZBOLJŠAVA KVOCIENTNEGA KRITERIJA

LANA RAMŠAK

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Članek obravnava izboljšavo D'Alembertovega kvocientnega kriterija, ki je temeljni kriterij za določanje konvergence oziroma divergence številskih vrst s pozitivnimi členi. Medtem ko osnovni kvocientni kriterij pogosto odpove, razširjene različice, tako imenovani kvocientni kriteriji višjih redov, ponujajo bolj natančen pristop. V prispevku je predstavljen kvocientni kriterij drugega reda, ki se izkaže kot učinkovitejši pri analizi primerov, kot je bigeometrijska vrsta. Poleg tega je podana tudi posplošitev na m-ti kvocientni kriterij in primerjava z obstoječimi kriteriji, kot sta Raabejev in Cauchyjev korenski kriterij. Rezultati kažejo, da je kvocientni kriterij višjega reda močnejše orodje pri analizi konvergence številskih vrst v matematični analizi.

IMPROVEMENT OF THE RATIO TEST

This article explores an improvement of D'Alembert's ratio test, a fundamental criterion for determining the convergence or divergence of positive term series. Since the standard ratio test does not always give conclusive results, this work introduces an alternative approach using higher-order ratio tests. The second-order ratio test is presented and applied to examples such as the bi-geometric series to illustrate its effectiveness. Furthermore, the concept is extended to the m-th order ratio test and compared with other known convergence tests, including Raabe's test and Cauchy's root test. The findings indicate that higher-order ratio tests provide a more powerful method for analyzing the convergence of series in mathematical analysis.

1. Uvod

Enega izmed temeljnih problemov matematične analize predstavlja določanje konvergence oz. divergence pozitivne številske vrste. Skozi leta se je s tem vprašanjem ukvarjalo že veliko matematikov, največji napredek pa je bil dosežen v 19. stoletju. Takrat so mnogi matematiki, kot na primer A.-L. Cauchy, N. H. Abel, C. F. Gauss, A. Pringsheim in Du Bois-Reymond odkrili kriterije, ki so pripomogli k določanju konvergence. V naslednjih straneh bomo spoznali nov kriterij imenovan izboljšani kvocientni kriterij, ideja zanj je povzeta iz reference [1]. Eden od najpogosteje uporabljenih kriterijev, pa je bil odkrit že v 18. stoletju, in sicer d'Alembertov kvocientni kriterij, ki ga študenti spoznamo že pri Analizi 1. Le ta bo predstavljal osrednje izhodišče našega raziskovanja, zato ga za začetek formulirajmo [3, izrek 76].

Izrek 1 (D'Alembertov-kvocientni kriterij). *Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s pozitivnimi členi. Tvorimo zaporedje števil*

$$D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Tedaj veljata sklepa:

1. *Če obstaja $q < 1$, da za vsak n od nekega n_0 naprej velja $D_n \leq q$, tedaj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.*
2. *Če za vsak n od nekega n_0 naprej velja $D_n \geq 1$, tedaj velja, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.*

Zgoraj zapisani izrek podaja kriterij v vsej splošnosti, čeprav ga v praksi le redko uporabimo na ta način. Ob predpostavki, da zaporedje števil D_n konvergira, lahko kriterij preoblikujemo v bolj preprosto in uporabno obliko. Le to podajmo v spodnji opombi.

Pripomba 2. Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s pozitivnimi členi. Če obstaja limita $D = \lim_{n\to\infty} D_n$, potem veljajo sklepi:

1. Če je $D < 1$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

2. Če je $D > 1$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

3. Če je $D = 1$, o konvergenci v splošnem ne moremo soditi.

Pri Analizi 1 smo spoznali mnogo primerov, v katerih je kvocientni kriterij odpovedal. V tem članku si bomo iz tega razloga pogledali izboljšavo tega kriterija oziroma kvocientne kriterije višjih redov.

2. Motivacija

Poglejmo si primer bigeometrijske vrste, ki dobro predstavi uporabnost kriterija. [2, primer 9].

Primer 3. Naj bosta r_1 in r_2 pozitivni števili. Rekurzivno zaporedje, definirano z zvezami

$$a_1 = 1; \quad a_{2n} = r_1 \cdot a_n; \quad a_{2n+1} = r_2 \cdot a_n,$$

imenujemo *bigeometrijsko zaporedje*, vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pa *bigeometrijska vrsta*. Poglejmo si prvih nekaj členov vrste:

$$1, r_1, r_2, r_1^2, r_1 r_2, r_1 r_2, r_2^2, r_1^3, r_1^2 r_3, \ldots$$

Poskusimo na tej vrsti uporabiti kvocientni kriterij. Poglejmo si kvocient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Ločimo primere:

- n je sodo število oz. obstaja $k \in \mathbb{N}$, da je $n = 2k$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{r_2 \cdot a_k}{r_1 \cdot a_k} = \frac{r_2}{r_1}.$$

- n je liho število in $n \neq 1$ oz. obstaja $k \in \mathbb{N}$, da je $n = 2k - 1$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{2k}}{a_{2(k-1)+1}} = \frac{r_1 \cdot a_k}{r_2 \cdot a_{k-1}}$$

  Pri tem primeru postopek ponavljamo, vse dokler ne dobimo rezultata brez člena zaporedja.

- $n = 1$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{r_1 \cdot a_1}{a_1} = r_1$$

Opazimo lahko, da $\lim_{n\to\infty} D_n$ ne obstaja in da s kvocientnim kriterijem težko določimo pogoje za konvergenco vrste. Lažje bi nam bilo opazovati kvociente $\frac{a_{2n}}{a_n}$ ter $\frac{a_{2n+1}}{a_n}$, saj tako dobimo natanko r_1 in r_2. Ta ideja bo izhodišče za oblikovanje novega kriterija.

3. Kvocientni kriterij drugega reda

Izrek 4 (Kvocientni kriterij drugega reda). *Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s pozitivnimi členi in naj bo*

$$L = \max\left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n}, \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n}\right\}$$

ter

$$l = \min\left\{\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n}, \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n}\right\}.$$

Potem veljajo naslednji sklepi:

1. *Če je $L < \frac{1}{2}$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.*
2. *Če je $l > \frac{1}{2}$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.*

3. *Če je $l \leq \frac{1}{2} \leq L$, o konvergenci vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ne moremo soditi.*

Osnovno verzijo izboljšanega kriterija lahko znova naredimo bolj primerno za uporabo, če predpostavimo konvergenco dveh ustreznih zaporedij.

Pripomba 5. Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s pozitivnimi členi. Naj obstajata limiti $L_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n}$ in $L_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n}$, ter naj bo $L = \max\{L_1, L_2\}$ in $l = \min\{L_1, L_2\}$. Potem veljajo naslednji sklepi:

1. Če je $L < \frac{1}{2}$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

2. Če je $l > \frac{1}{2}$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

3. Če je $l \leq \frac{1}{2} \leq L$, o konvergenci vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ne moremo soditi.

Sedaj ponovno obravnavajmo konvergenco bigeometrijske vrste z uporabo kvocientnega kriterija drugega reda.

Zgled 6.

$$a_1 = 1, \quad a_{2n} = r_1 \cdot a_n, \quad a_{2n+1} = r_2 \cdot a_n,$$

$$L = \max\{r_1, r_2\}, \quad l = \min\{r_1, r_2\},$$

$$L < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{Vrsta} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergira.}$$

$$l > \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{Vrsta} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergira.}$$

Na ta način so bili pogoji za konvergenco bigeometrijske vrste določeni na bolj neposreden in učinkovit način. Pred obravnavo dokaza kvocientnega kriterija drugega reda je smiselno ponovno preučiti dokaz osnovnega kvocientnega kriterija, saj oba temeljita na podobnem pristopu.

Skica dokaza. V prvi alternativi predpostavimo, da je $D_n \leq q < 1$ za $n \geq n_0$. Torej za dovolj velika naravna števila n velja $a_{n+1} \leq q a_n$. Tako lahko vrsto $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ ocenimo navzgor z vrsto $a_0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} q^n$, ki pa konvergira, saj je $q < 1$. Po primerjalnem kriteriju konvergira tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

V drugi alterantivi predpostavimo, da je $D_n \geq q \geq 1$ za $n \geq n_0$. Podobno kot zgoraj lahko vrsto $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ ocenimo navzdol z vrsto $a_0 \sum_{n=1}^{\infty} q^n$, le da tokrat ta geometrijska vrsta divergira, saj je $q \geq 1$. ∎

V dokazu D'Alembertovega kriterija torej uporabimo že pozan kriterij o konvergenci geometrijske vrste in primerjalni kriterij [3, izrek 75]. Na podoben način bomo pri dokazu kvocientnega kriterija drugega reda poskusili vrsto oceniti navzgor oziroma navzdol z geometrijsko vrsto in nato določali konvergenco [1, izrek 1].

Dokaz. V prvi alternativi predpostavimo, da je $L < \frac{1}{2}$. Naj bo r tak, da je $L < r < \frac{1}{2}$. Potem obstaja tako število N, da velja

$$\frac{a_{2n}}{a_n} \leq r \quad \text{in} \quad \frac{a_{2n+1}}{a_n} \leq r$$

za vse $n \geq N$. Ker gre za vrsto s pozitivnimi členi (absolutna konvergenca je enaka običajni konvergenci), lahko brez škode za splošnost preuredimo rep vrste:

$$\begin{aligned}\sum_{n=N}^{\infty} a_n &= (a_N + a_{N+1} + \cdots + a_{2N-1}) + (a_{2N} + a_{2N+1} + \cdots + a_{4N-1}) + \\ &\quad + (a_{4N} + a_{4N+1} + \cdots + a_{8N-1}) + \cdots \\ &\quad \cdots + (a_{2^k N} + a_{2^k N+1} + \cdots + a_{2^{k+1}N-1}) + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (a_{2^k N} + a_{2^k N+1} + \cdots + a_{2^{k+1}N-1}).\end{aligned}$$

Naj bo $S_k = a_{2^k N} + a_{2^k N+1} + \cdots + a_{2^{k+1}N-1}$. Potem za $k \geq 1$ pišimo

$$S_k = \left(a_{2^k N} + a_{2^k N+1}\right) + \left(a_{2^k N+2} + a_{2^k N+3}\right) + \cdots + \left(a_{2^{k+1}N-2} + a_{2^{k+1}N-1}\right).$$

Ker je $\frac{a_{2n}}{a_n} \leq r$ in $\frac{a_{2n+1}}{a_n} \leq r$, dobimo

$$\begin{aligned}S_k &= \left(a_{2^k N} + a_{2^k N+1}\right) + \left(a_{2^k N+2} + a_{2^k N+3}\right) + \cdots + \left(a_{2^{k+1}N-2} + a_{2^{k+1}N-1}\right) \\ &\leq 2\left(a_{2^{k-1}N}\right) r + 2\left(a_{2^{k-1}N+1}\right) r + \cdots + 2\left(a_{2^k N-1}\right) r \\ &= 2r\left(a_{2^{k-1}N} + a_{2^{k-1}N+1} + \cdots + a_{2^k N-1}\right) = 2rS_{k-1}.\end{aligned}$$

Po indukciji na k dobimo

$$S_k \leq 2^k r^k \left(a_N + a_{N+1} + \cdots + a_{2N-1}\right) = 2^k r^k S_0$$

za $k \geq 0$. Torej je

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} S_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} S_0 (2r)^k < \infty$$

za $r < \frac{1}{2}$. Zato $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, če je $L < \frac{1}{2}$.

V drugi alternativi predpostavimo, da je $l > \frac{1}{2}$. Naj bo r tak, da je $\frac{1}{2} < r < l$. Potem obstaja tako število N, da velja

$$\frac{a_{2n}}{a_n} > r \quad \text{in} \quad \frac{a_{2n+1}}{a_n} > r$$

za vse $n \geq N$. Torej je $a_{2n} > ra_n$ in $a_{2n+1} > ra_n$ za vse $n \geq N$. Naj bo S_k kot zgoraj. Z indukcijo dokažemo, da je

$$\begin{aligned}S_k &= \left(a_{2^k N} + a_{2^k N+1}\right) + \left(a_{2^k N+2} + a_{2^k N+3}\right) + \cdots + \left(a_{2^{k+1}N-2} + a_{2^{k+1}N-1}\right) \\ &\geq 2\left(a_{2^{k-1}N}\right) r + 2\left(a_{2^{k-1}N+1}\right) r + \cdots + 2\left(a_{2^k N-1}\right) r \\ &= 2r\left(a_{2^{k-1}N} + a_{2^{k-1}N+1} + \cdots + a_{2^k N-1}\right) = 2rS_{k-1}\end{aligned}$$

in po indukciji na k dobimo

$$S_k \geq 2^k r^k \left(a_N + a_{N+1} + \cdots + a_{2N-1}\right) = 2^k r^k S_0.$$

Ker je $r > \frac{1}{2}$, velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} S_k \geq \sum_{k=0}^{\infty} S_0 (2r)^k = \infty.$$

Torej $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira za $l > \frac{1}{2}$.

Nazadnje si oglejmo še primer, ki potrdi, da kriterij za $l \leq \frac{1}{2} \leq L$ odpove. Vrsta $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$, kjer je $a_n = \frac{1}{n(\ln n)^p}$, konvergira za $p > 1$ in divergira za $p \leq 1$. To lahko preporsto preverimo z integralskin kriterijem. Po drugi strani se izkaže, da po zgornjem kriteriju dobimo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\ln n)^p}{2n(\ln(2n))^p} = \frac{1}{2}.$$

Torej je $l \leq \frac{1}{2} \leq L$, kar pomeni da o konvergenci ne moremo soditi. To se ujema z našim izračunom, saj smo dobili limito, ki je neodvisna od števila p. Torej naš kriterij ne zazna konvergence oz. divergence te vrste. ■

Dodajmo še posledico, ki poenostavi uporabo kriterija.

Posledica 7. *Naj bo $\{a_n\}$ pozitivno padajoče zaporedje in naj obstajata $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n}$ in $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n}$. Potem velja:*

1. *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, če je $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} < \frac{1}{2}$,*
2. *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, če je $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} > \frac{1}{2}$.*

Dokaz. Ker je zaporedje a_n padajoče, velja $a_{n+1} \leq a_n$, od koder dobimo tudi oceno $\frac{a_{2n+1}}{a_n} \leq \frac{a_{2n}}{a_n}$. Naj bo $L_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n}$ in $L_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n}$. Potem bo $L = \max\{L_1, L_2\} = L_1$ in $l = \min\{L_1, L_2\} = L_2$. Torej bo vrsta konvergirala, ko bo $L_1 < \frac{1}{2}$ in divergirala, ko bo $L_2 > \frac{1}{2}$. ■

Zgled 8. Obravnavajmo konvergenco vrste

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n\,(n+1)!}.$$

Pokažimo, da je zaporedje padajoče.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot (2n+1) \cdot 2^n \cdot (n+1)!}{2^{n+1} \cdot (n+2)! \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} = \frac{2n+1}{2\,(n+2)} < 1$$

Uporabimo lahko posledico. Poglejmo oceno za kvocient

$$\begin{aligned}
\frac{a_{2n}}{a_n} &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot (2n+1) \cdots (4n-1)}{2^{2n} \cdot (2n+1)!} \cdot \frac{2^n \cdot (n+1)!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \\
&= \frac{(2n+1)\,(2n+3) \cdots (4n-1)}{2^n\,(n+2)\,(n+3) \cdots (2n)\,(2n+1)} \\
&= \frac{(2n+3) \cdots (4n-1)}{2\,(2n+4)\,(2n+6) \cdots (4n)} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{2n+3}{2n+4}\right) \left(\frac{2n+5}{2n+6}\right) \cdots \frac{4n-1}{4n} < \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4n}\right)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Ker velja

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{4n}\right)^{n-1} = \frac{1}{\sqrt[4]{e}},$$

lahko ocenimo

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} \leq \frac{1}{2\sqrt[4]{e}} < \frac{1}{2}$$

in vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

4. Primerjava novega kriterija z že znanimi

Na tem mestu se bralcu morda poraja vprašanje, ali je vredno vpeljevati popolnoma nov kriterij med že tako veliko izbiro le teh. Poskusimo kvocientni kriterij drugega reda uvrstiti med ostale, glede na njegovo moč določanja konvergence. Opazimo, da velja

$$\frac{a_{2n}}{a_n} = \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} \frac{a_{2n-1}}{a_{2n-2}} \cdots \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

in

$$\frac{a_{2n+1}}{a_n} = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} \cdots \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Ko vrsta $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ konvergira po kvocientnem kriteriju, bo očitno konvergirala tudi po izboljšanem kvocientnem kriteriju, saj v zgornjih izražavah dobimo natanko kvociente zaporednih členov. V primeru konvergence po osnovnem kvocientnem kriteriju mora veljati $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, torej bo $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} = 0$. Podoben sklep lahko naredimo tudi v primeru divergence vrste po osnovnem kvocientnem kriteriju. Takrat velja $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, torej bo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} = \infty.$$

Za kvocientni kriterij drugega reda zato lahko trdimo, da je „močnejši“ od osnovnega d'Alembertovega kvocientnega kriterija.

Zgled 9. Analizirajmo konvergenco vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ za $p \in \mathbb{R}$. Z uporabo Cauchyjevega korenskega kriterija [3, izrek 77] dobimo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = \left(\frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}\right)^p = 1.$$

Torej o konvergenci ne moremo soditi. Uporabimo sedaj drugi kvocientni kriterij.

$$\frac{a_{2n}}{a_n} = \frac{(2n)^{-p}}{n^{-p}} = \frac{1}{2^p} \qquad \text{in} \qquad \frac{a_{2n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)^{-p}}{n^{-p}} = \frac{1}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^p}$$

Torej bo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} = \frac{1}{2^p},$$

in bo vrsta konvergirala za $p > 1$, saj $\frac{1}{2^p} < \frac{1}{2}$ in divergirala za $p < 1$, saj bo takrat $\frac{1}{2^p} > \frac{1}{2}$.

Glede na to bi lahko sklepali, da je drugi kvocientni kriterij močnejši od korenskega. Vendar lahko hitro najdemo protiprimer za tak sklep.

Zgled 10. Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta, kjer so $a_n = 2^{-3^{k+1}}$ in k tak, da velja $3^k \leq n < 3^{k+1}$. Njeni členi bodo

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2^3}, \quad n = 1,2,3 \\ a_n &= \frac{1}{2^9}, \quad n = 4,5,\ldots,8 \\ a_n &= \frac{1}{2^{27}}, \quad n = 9,10,\ldots,26 \end{aligned}$$

Ta vrsta bo po korenskem kriteriju konvergirala, saj so $|a_n| < 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in velja

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq |a_n|^{\frac{1}{3^{k+1}}} = 2^{-1}$$

ter zato $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{2}$. Sedaj poskusimo uporabiti še kvocientni kriterij drugega reda. Naj bo $n = 3^k$, potem velja $3^k \leq n \leq \frac{1}{3}3^{k+1}$. Ko pomnožimo neenakost z 2, dobimo

$$3^k \leq 2 \cdot 3^k \leq 2n \leq \frac{2}{3} \cdot 3^{k+1} < 3^{k+1}.$$

Torej bo

$$a_n = a_{2n} \qquad \text{oziroma} \qquad \frac{a_{2n}}{a_n} = 1;$$

ocena pove, da je

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} \geq 1,$$
$$L > 1 > \frac{1}{2}.$$

To pa pomeni, da o konvergenci vrste ne moremo soditi.

Pokazali smo, da kocientni kriterij drugega reda ni močnejši od korenskega, prav tako pa ne velja tudi obratno. Nazadnje ga primerjajmo še z Raabejevim kriterijem [3, izrek 78].

Izrek 11 (Raabejev kriterij). *Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s pozitivnimi členi in*

$$R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$$

Tedaj velja:

1. *Če za vsak n od nekega n_0 naprej velja $R_n \geq r > 1$, tedaj vrsta $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ konvergira.*
2. *Če za vsak n od nekega n_0 naprej velja $R_n \leq 1$, tedaj vrsta $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ divergira.*

Oglejmo si izrek, ki povezuje konvergenco po Raabejevem kriteriju in konvergenco po kvocientnem kriteriju drugega reda [1, stran 522]. S pomočjo tega izreka lahko tudi dokažemo Raabejev kriterij.

Izrek 12. *Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s pozitivnimi členi. Če vrsta konvergira po Raabejevem kriteriju, potem vrsta konvergira tudi po kvocientnem kriteriju drugega reda.*

Dokaz. Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s pozitivnimi členi, za katero obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak $n > n_o$ velja $R_n \geq r > 1$. To pa lahko napišemo tudi kot

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq r,$$

kar lahko preoblikujemo v

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \frac{n+r}{n}$$

oziroma

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{n}{n+r} = 1 - \frac{r}{n+r}.$$

Kot prej lahko kvocient $\frac{a_{2n}}{a_n}$ razpišemo na sledeč način

$$\frac{a_{2n}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\cdots\frac{a_{2n-1}}{a_{2n-2}}\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}.$$

Sedaj uporabimo zgornjo oceno za $n \geq n_0$

$$\frac{a_{2n}}{a_n} \leq \left(1 - \frac{r}{n+r}\right)\left(1 - \frac{r}{n+1+r}\right)\cdots\left(1 - \frac{r}{2n-2+r}\right)\left(1 - \frac{r}{2n-1+r}\right).$$

Velja $1 - x \leq e^{-x}$ za $0 < x < 1$. Torej dobimo

$$\left(1 - \frac{r}{n+r}\right) \cdots \left(1 - \frac{r}{2n-1+r}\right) \leq e^{-\left(\frac{r}{n+r} + \frac{r}{n+1+r} + \cdots + \frac{r}{2n-1+r}\right)}.$$

Za vsoto v eksponentu pa lahko uporabimo oceno

$$\frac{r}{n+r} + \frac{r}{n+1+r} + \cdots + \frac{r}{2n-1+r} > \int_n^{2n} \frac{r}{x+r} dx = r \ln \left(\frac{2n+r}{n+r}\right) \xrightarrow{n \to \infty} r \ln (2),$$

torej

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{a_{2n}}{a_n} \geq e^{-r \ln (2)} = \frac{1}{2^r} < \frac{1}{2}.$$

Podobno naredimo tudi za $\frac{a_{2n+1}}{a_n}$. Dobimo, da je

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} < \frac{1}{2} \qquad \text{in} \qquad \limsup_{n \to \infty} \frac{a_{2n}}{a_n} < \frac{1}{2},$$

in vrsta konvergira tudi po kvocientnem kriteriju drugega reda. ∎

5. Kvocientni kriterij m-tega reda

Izrek 13 (Kvocientni kriterij m-tega reda). *Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s pozitivnimi členi in naj bo $m > 1$ naravno število. Naj obstajajo števila*

$$L_1 = \limsup_{n \to \infty} \frac{a_{mn}}{a_n},\ L_2 = \limsup_{n \to \infty} \frac{a_{mn+1}}{a_n},\ \ldots\ ,\ L_m = \limsup_{n \to \infty} \frac{a_{mn+m-1}}{a_n},$$

$$l_1 = \liminf_{n \to \infty} \frac{a_{mn}}{a_n},\ l_2 = \liminf_{n \to \infty} \frac{a_{mn+1}}{a_n},\ \ldots\ ,\ l_m = \liminf_{n \to \infty} \frac{a_{mn+m-1}}{a_n}.$$

Naj bo

$$L = \max\{L_1, L_2, \ldots, L_m\} \quad \textit{ter} \quad l = \min\{l_1, l_2, \ldots, l_m\}.$$

Potem veljejo sklepi:

1. *Če je $L < \frac{1}{m}$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.*
2. *Če je $l > \frac{1}{m}$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.*
3. *Če je $l \leq \frac{1}{m} \leq L$, o konvergenci vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ne moremo soditi.*

Sedaj smo prej podani kvocientni kriterij drugega reda razširili na m različnih kvocientov. Pri dokazu kriterija bomo zato opazili, da uporabimo podobne ideje kot pri dokazu kvocientnega kriterija drugega reda.

Dokaz. Naj bo $m \in \mathbb{N}, m > 1$. V prvi alternativi predpostavimo, da je $L < \frac{1}{m}$. Naj bo r tak, da je $L < r < \frac{1}{m}$. Potem obstaja število $N \in \mathbb{N}$, da velja

$$\frac{a_{mn}}{a_n} \leq r, \frac{a_{mn+1}}{a_n} \leq r, \ldots, \frac{a_{mn+m-1}}{a_n} \leq r,$$

za vse $n \geq N$. Pišimo

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= (a_N + a_{N+1} + \cdots + a_{mN-1}) + (a_{mN} + a_{mN+1} + \cdots + a_{m^2N-1}) \\
&\quad + (a_{m^2N} + a_{m^2N+1} + \cdots + a_{m^3N-1}) + \cdots \\
&\quad + (a_{m^kN} + a_{m^kN+1} + \cdots + a_{m^{k+1}N-1}) + \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (a_{m^kN} + a_{m^kN+1} + \cdots + a_{m^{k+1}N-1}).
\end{aligned}$$

Definirajmo $S_k = a_{m^k N} + a_{m^k N+1} + \cdots + a_{m^{k+1}N-1}$. Potem za $k \geq 1$ pišimo

$$\begin{aligned} S_k = &\left(a_{m^k N} + a_{m^k N+1} + \cdots + a_{m^k N+m-1}\right) \\ &+ \left(a_{m^k N+m} + a_{m^k N+m+1} + \cdots + a_{m^k N+2m-1}\right) + \cdots \\ &+ \left(a_{m^{k+1}N-m} + a_{m^{k+1}N-m+1} + \cdots + a_{m^{k+1}N-1}\right). \end{aligned}$$

Po zgornji oceni dobimo

$$\begin{aligned} S_k &\leq m\,(a_{m^{k-1}N})\,r + m\left(a_{m^{k-1}N+1}\right)r + \cdots + m\left(a_{m^k N-1}\right)r \\ &= rm\left(a_{m^{k-1}N} + a_{m^{k-1}N+1} + \cdots + a_{m^k N-1}\right) = mrS_{k-1}, \end{aligned}$$

po indukciji na k dobimo

$$S_k \leq m^k r^k \,(a_N + a_{N+1} + \cdots + a_{mN-1}) = m^k r^k S_0.$$

Za $k \geq 0$. Torej je

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} S_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} S_0 (mr)^k < \infty$$

za $r < \frac{1}{m}$. Zato $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, če je $L < \frac{1}{m}$.

V drugi alternativi predpostavimo, da je $l > \frac{1}{m}$. Naj bo r tak, da je $\frac{1}{m} < r < l$. Potem obstaja tako število N, da velja

$$\frac{a_{mn}}{a_n} \geq r, \frac{a_{mn+1}}{a_n} \geq r, \ldots, \frac{a_{mn+m-1}}{a_n} \geq r,$$

za vse $n \geq N$. Naj bo S_k kot zgoraj. Z indukcijo dokažemo, da je

$$\begin{aligned} S_k = &\left(a_{m^k N} + a_{m^k N+1} + \cdots + a_{m^k N+m-1}\right) \\ &+ \left(a_{m^k N+m} + a_{m^k N+m+1} + \cdots + a_{m^k N+2m-1}\right) + \cdots \\ &+ \left(a_{m^{k+1}N-m} + a_{m^{k+1}N-m+1} + \cdots + a_{m^{k+1}N-1}\right) \\ &\geq m\,(a_{m^{k-1}N})\,r + m\left(a_{m^{k-1}N+1}\right)r + \cdots + m\left(a_{m^k N-1}\right)r \\ &= rm\left(a_{m^{k-1}N} + a_{m^{k-1}N+1} + \cdots + a_{m^k N-1}\right) = mrS_{k-1}. \end{aligned}$$

in po indukciji na k dobimo

$$S_k \geq m^k r^k \,(a_N + a_{N+1} + \cdots + a_{mN-1}) = m^k r^k S_0$$

Torej je

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} S_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} S_0 (mr)^k < \infty$$

za $r > \frac{1}{m}$. Zato $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, če je $l > \frac{1}{m}$.

Sedaj znova poiščimo primer, ki demonstrira, da kriterij v mejnem primeru odpove. Tudi tokrat lahko uporabimo vrsto $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$, kjer so členi vrste enaki $a_n = \frac{1}{n(\ln n)^p}$. Ustrezni kvocitenti so tokrat oblike

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{mn}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\ln n)^p}{mn(\ln{(mn)})^p} = \frac{1}{m}$$

Torej je $l \leq \frac{1}{m} \leq L$, kar pomeni da o konvergenci ne moremo soditi. ■

Za konec si poglejmo še zgled uporabe m-tega kvocientnega kriterija.

Zgled 14. Analizirajmo konvergenco vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Uporabimo m-ti kvocientni kriterij za $m = 3$. Najprej določimo ustrezna stekališča:

$$\begin{aligned} L_1 &= \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{3n}}{a_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(3n)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{9} = \frac{1}{9}, \\ L_2 &= \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{3n+1}}{a_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(3n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} < \frac{1}{9}, \\ L_3 &= \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{3n+2}}{a_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(3n+2)^2}}{\frac{1}{n^2}} < \frac{1}{9}, \end{aligned}$$

Torej je $L = \max\{L_1, L_2, L_3\} = \frac{1}{9} < \frac{1}{3}$ in zato vrsta konvergira.

LITERATURA

[1] SA. Ali. *The mth Ratio Test: New Convergence Tests for Series*, The American Mathematical Monthly, **115** (2008) 514–524.

[2] C. Hammond & E. Omey *A Second Look at the Second Ratio Test*, The American Mathematical Monthly, **128** (2021) 579–596.

[3] J. Globevnik in M. Brojan, *Analiza I*, Matematični rokopisi **25**, DMFA-založništvo, Ljubljana, 2010; dostopno tudi na `http://www.fmf.uni-lj.si/~globevnik/skripta.pdf`, ogled: 15.2.2025.