

ELASTIČNE LASTNOSTI SLOJEVITIH KOMPOZITOV

GABRIJEL PFLAUM

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

V članku je predstavljen izračun nadomestnih elastičnih konstant slojevitega kompozita iz ravnih anizotropnih plasti. Tak opis omogoči obravnavo kompozita kot celote pri modeliranju odziva vseh plasti na zunanje obremenitve ali deformacije. Poudarek je na fizikalnem vidiku izpeljave z vezano minimizacijo energije, nekatere praktične vidike, kot sta upogib kompozita in temperaturno raztezanje, pa smo izpustili.

ELASTIC PROPERTIES OF LAMINATES

In the article a formulation of effective elastic moduli of a laminated composite consisting of flat anisotropic layers is presented. This enables us to treat the laminate as a unit and to model the overall response given specified stress or strain boundary conditions. The principal consideration is the physical aspect of the derivation based on constrained energy minimization, while some practical aspects such as bending and thermal expansion of the laminate are omitted.

1. Uvod

Elastomehanika je že od svojih začetkov v 19. stoletju mejno področje med fiziko in tehniko. Francoski matematik in inženir Augustin-Louis Cauchy je v svoji razpravi o napetosti v trdnem telesu [1, 2, 3] naredil pomembne korake v smeri koncepta tenzorja, danes vsakdanjega pojma v matematični fiziki. Mehansko valovanje, na primer, je služilo kot model za elektromagnetno valovanje do odkritja teorije relativnosti [4, str. 108]. Čeprav je elastomehanika v okviru svoje veljavnosti zrela teorija, kjer s fizikalnega vidika ne moremo več pričakovati temeljnih odkritij, njen pomen v svetu tehnike ni upadel, temveč se z možnostjo numeričnega reševanja praktičnih problemov in razvojem naprednih materialov pojavlja vse večja potreba po natančnih matematičnih modelih za njihov opis. Elastomehanika tu služi kot osnovno orodje za izračun nosilnosti konstrukcij in napoved obremenitvenih stanj [5, 6, 7].

Prve raziskave mehanskih lastnosti kompozitnih materialov so opravili v šestdesetih in sedemdesetih letih 20. stoletja za potrebe letalske in vesoljske industrije, med katere spada tudi celovit izračun elastičnih lastnosti slojevitih kompozitov, predstavljen v [8, str. 23]. Obravnava tega problema v drugi obstoječi literaturi je praktično usmerjena in pogosto temelji na semiempiričnih enačbah ali približkih za posebne primere [9, 10, 11]. Tu bo v nekoliko okrnjeni obliki opisan točen rezultat iz [8], vendar z bolj abstraktno matematično-fizikalno izpeljavo namesto neposredne poti po komponentah.

2. Kratek uvod v elastomehaniko

Ključni količini za opis stanja v zveznem sredstvu sta napetost in deformacija, obe tenzorja drugega reda. Če označimo z $\mathbf{r}$ krajevni vektor točke snovi v nedeformiranem stanju in z $\mathbf{r}'$ krajevni vektor te točke v deformiranem stanju, vpeljemo vektor premika kot

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$$

in nato *deformacijski tenzor*¹ ε kot simetrični del gradienta vektorja premika:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (1)$$

¹Navedena definicija pravzaprav ustreza le linearnemu delu deformacijskega tenzorja. Splošna oblika je navedena v [12, str. 2].

Notranje sile, ki se pojavijo ob deformaciji, zaobjamemo z *napetostnim tenzorjem* σ , ki ob množenju z vektorjem površine da silo $d\mathbf{F}$, ki deluje na del prereza $d\mathbf{S}$:

$$dF_i = \sigma_{ik} dS_k. \quad (2)$$

Povezava med napetostnim in deformacijskim tenzorjem je odvisna od snovi; za homogeno elastično snov privzamemo linearno zvezo ali Hookov zakon

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (3)$$

kjer je C tenzor četrtega reda, poznan pod izrazi togostni tenzor ali tenzor elastičnih konstant. Za izotropno snov, torej snov, ki se v vseh smereh obnaša enako, sta potrebni le dve elastični konstanti in lahko Hookov zakon poenostavimo:

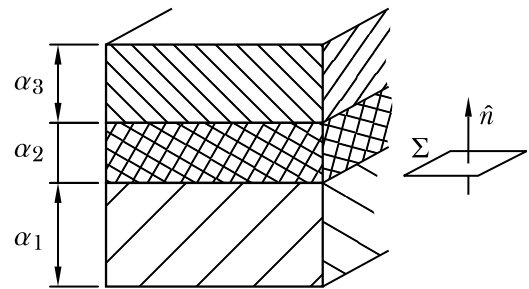
$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{ll} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (4)$$

Elastični konstanti λ in μ v tem primeru imenujemo Laméjevi konstanti, pogosto pa za zapis Hookovega zakona uporabljamo še druge konstante, kot so prožnostni modul E , strižni modul G in Poissonovo razmerje ν , ki jih vse lahko izrazimo z Laméjevima konstantama [12, 13, 5, 14].

3. Predstavitev problema

Elastomehanika kompozitnih materialov prinese v primerjavi s homogenimi snovmi dodatne zaplete, ker moramo poleg anizotropije upoštevati še neenotno sestavo. Za skupno obnašanje so pomembne lastnosti sestavin in geometrija njihove razporeditve v kompozitu. V mnogih primerih analitično ni mogoče izračunati točnih elastičnih lastnosti kompozita in so v literaturi podane le ocene za snovne konstante. V primeru toga zlepljenih ravnih plasti, ki ga bomo obravnavali, pa je točen izračun mogoč.

Debelina plasti kompozitnega materiala je običajno precej manjša od značilnih razsežnosti, na katerih opazujemo materialne lastnosti. Smiselno je torej iskati povezavo med makroskopskimi količinami, ki opisujejo snov kot enotno celoto in jih lahko izmerimo, mikroskopske nehomogenosti zaradi plastne sestave pa zaobjeti v pravilno izraženih povprečnih snovnih lastnostih. Isto zamisel bi lahko uporabili tudi na nivoju posamezne plasti, saj se zavedamo, da te v resnici niso homogene, ampak običajno vsebujejo vlakna ali druge ojačitvene elemente, povezane s polimerom. Za potrebe te razprave bomo privzeli, da so plasti homogene oziroma da njihove povprečne lastnosti že poznamo, čeprav bi jih lahko ponovno izrazili z lastnostmi sestavnih delov.



Slika 1. Plasti kompozitnega materiala. Z α_i smo označili prostorninski delež posamezne plasti.

4. Makroskopski opis stanja

Zamislimo si kompozit, sestavljen iz toga zlepljenih vzporednih plasti različnih debelin in snovnih lastnosti. Prostorninski delež i -te plasti označimo z α_i , tako da je $\sum_i \alpha_i = 1$, kot to prikazuje slika 1. Pomembno vprašanje je, ali sploh obstajajo makroskopske količine za reprezentativen opis stanja snovi in kako so povezane z mikroskopskimi. Lokalno stanje opišemo z deformacijo ε in napetostjo σ ,

vendar v nehomogenem materialu ti količini tudi za makroskopsko homogene deformacije nista konstantni. Kot izhodišče vzemimo, da za vsako plast posebej velja Hookov zakon

$$\sigma^i = C^i \varepsilon^i, \quad (5)$$

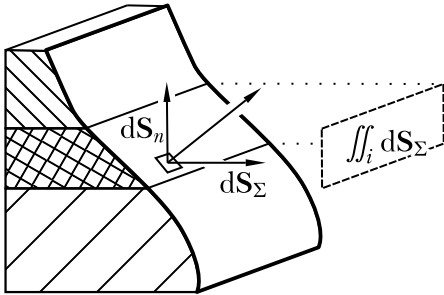
kjer so σ^i napetostni tenzor, ε^i deformacijski tenzor in C^i togostni tenzor i -te plasti, ki se znotraj plasti ne spreminjajo. Kot nakazuje enačba (3), imamo s produktom $C^i \varepsilon^i$ v mislih seštevanje po notranjih dveh indeksih $\sigma_{jk}^i = C_{jklm}^i \varepsilon_{lm}^i$.

Sprva pogledjmo, kako bi ustrezno opisali napetostno stanje celotnega kompozita in pri tem ohranili fizikalni pomen sicer lokalnega pojma napetosti. Z drugimi besedami, iščemo tako povprečno napetost $\bar{\sigma}$, ki ustreza povprečni sili v prerezu kompozita

$$\bar{\sigma} \iint d\mathbf{S} = \iint \sigma d\mathbf{S}.$$

Integracijska ploskev mora vse različne plasti sekati tako, da so v prerezu zastopane v enakem deležu kot tudi sicer v celém kompozitu. Vektor $d\mathbf{S}$ je smiselno razdeliti na komponento v smeri normale plasti in komponento v ravnini plasti: $d\mathbf{S} = d\mathbf{S}_n + d\mathbf{S}_\Sigma$, kar ponazarja slika 2. Iz robnih pogojev sledi, da je $\sigma d\mathbf{S}_n$ pri vseh plasteh enak, zato preostane

$$\bar{\sigma} \iint d\mathbf{S}_\Sigma = \sum_i \sigma^i \iint_i d\mathbf{S}_\Sigma,$$



Slika 2. Integracija napetostnega tenzorja σ po prerezu kompozita.

kjer indeks i označuje plast in $\iint_i$ integral po delu ploskve, ki seka i -to plast. Ker smo izbrali tak prerez, da so plasti zastopane sorazmerno sestavi kompozita, je prečni površinski delež vsake plasti $\iint_i d\mathbf{S}_\Sigma / \iint d\mathbf{S}_\Sigma$ enak prostorninskemu deležu te plasti α_i . Ustrezna količina za makroskopski opis napetostnega stanja kompozita je torej kar prostorninsko uteženo povprečje napetosti posameznih plasti:

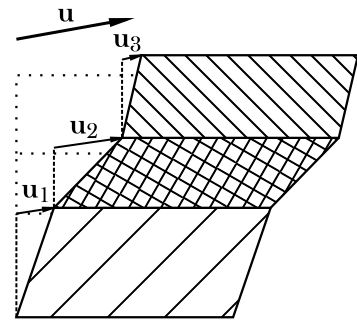
$$\bar{\sigma} = \langle \sigma^i \rangle = \sum_i \alpha_i \sigma^i. \quad (6)$$

Deleži α_i so normirani, $\sum_i \alpha_i = 1$. V nadaljevanju bomo z $\langle \rangle$ označili prostorninsko uteženo povprečje poljubne količine: $\langle f_i \rangle = \sum_i \alpha_i f_i$.

Podobno kot smo uvedli povprečno napetost, iščemo še makroskopsko količino $\bar{\varepsilon}$, ki opiše povprečno deformacijo. Da bi bila definicija smiselna, mora skupni premik plasti $\mathbf{u}$, izražen s povprečno deformacijo, ustrezati vsoti premikov posameznih plasti $\mathbf{u}_i$, kot je upodobljeno na sliki 3. Zapišimo vektor $\mathbf{r}$, ki kaže od poljubne točke na dnu spodnje plasti do neke druge točke na vrhu zgornje plasti. Spremembo tega vektorja, ki jo označimo z $\mathbf{u}$, naj opiše povprečni deformacijski tenzor $\bar{\varepsilon}$, ki ga iščemo:

$$\mathbf{u} = \bar{\varepsilon} \mathbf{r}.$$

Po drugi strani lahko vektor $\mathbf{r}$ razdelimo na krajše vektorje $\mathbf{r}_i$, ki vsak zase v celoti ležijo znotraj ene same plasti.



Slika 3. Deformirano stanje kompozita. Povprečna deformacija $\langle \varepsilon^i \rangle$ opisuje skupni premik plasti $\mathbf{u}$.

Njihove spremembe $\mathbf{u}_i$ lahko izrazimo z deformacijami posameznih plasti, za katere smo privzeli, da so konstantne:

$$\mathbf{u} = \sum_i \mathbf{u}_i = \sum_i \varepsilon^i \mathbf{r}_i$$

Del vektorja $\mathbf{r}$, ležec v i -ti plasti, je $\mathbf{r}_i = \alpha_i \mathbf{r}$, zato povprečno deformacijo $\bar{\varepsilon}$ (tako kakor povprečno napetost) podaja prostorninsko uteženo povprečje deformacij posameznih plasti:

$$\bar{\varepsilon} = \langle \varepsilon^i \rangle = \sum_i \alpha_i \varepsilon^i. \quad (7)$$

Vidimo, da makroskopsko stanje zadovoljivo opišemo s povprečno napetostjo $\bar{\sigma}$ in povprečno deformacijo $\bar{\varepsilon}$. Dogajanja v posameznih plasteh s tem ne zaobjamemo, a nas to v večini primerov niti ne zanima. Tudi kadar bi želeli poznati lokalno stanje, opis s povprečnimi količinami ne bo ovira, saj lahko lokalno deformacijo in napetost v vsaki plasti izrazimo iz povprečnih, kot bo razvidno pri izpeljavi nadomestnega togostnega tenzorja.

Za popolno opredelitev elastičnih lastnosti večplastne snovi manjka še povezava med $\bar{\sigma}$ in $\bar{\varepsilon}$. Želeli bi zapisati nadomestni Hookov zakon, ki bo kompozit opisal podobno, kot običajni Hookov zakon opiše homogeno snov. Intuitivno si predstavljamo, da tak opis deluje dobro, dokler je merilo spreminjanja makroskopskega stanja precej večje od merila nehomogenosti snovi, v tem primeru debeline plasti. Pomemben primer, ki temu pogoju ne zadosti, je upogib kompozita v prečni smeri – na sliki 1 je to upogib ravnine Σ . V tem primeru se ravninska deformacija in napetost močno spreminjata vzdolž normale $\hat{n}$, za odziv pa so ključne ne le povprečne snovne lastnosti, temveč tudi višji momenti njihove porazdelitve v smeri normale. To težavo odpravimo z uvedbo dodatnega snovnega tenzorja, ki upošteva upogib kompozita, kot je natančneje razloženo v [8, str. 23].

Omejimo se na homogena stanja povprečne napetosti in deformacije – torej takšna stanja, ki se vzdolž normale $\hat{n}$ bistveno ne spreminjajo. Pri tem seveda dopustimo variacije dejanskih lokalnih napetosti in deformacij med plastmi. Le tedaj je smiselno iskati povezavo med napetostjo in deformacijo v obliki nespremenjenega Hookovega zakona

$$\bar{\sigma} = \bar{C} \bar{\varepsilon}. \quad (8)$$

Preostanek tega prispevka bo posvečen iskanju nadomestnega togostnega tenzorja $\bar{C}$. Mikavno bi bilo poskusiti s $\bar{C} = \langle C^i \rangle$ po zgledu ε in σ , a že asimetrija plastne zgradbe namiguje, da to ne zadostuje.

5. Robni pogoji

Za lažji zapis v nadaljevanju na tem mestu uvedemo nekaj matematičnega formalizma. Predvsem želimo karseda izkoristiti simetrijske lastnosti problema, ki nas bodo vodile pri iskanju fizikalno smiselnih zvez med tenzorji.

Pod V si predstavljamo tridimenzionalen, evklidski prostor, v katerega spadajo vsi vektorji. Zaradi enoosne simetrije plasti ga razdelimo na dva pravokotna podprostora, ravnino Σ in ortogonalni komplement $\text{span}\{\hat{n}\}$, kot sta prikazana na sliki 1. Poimenujemo ju V_Σ in V_n :

$$V = V_\Sigma \oplus V_n.$$

Sestavimo tenzorski prostor $W = V \otimes V$, prostor tenzorjev drugega reda, kot sta ε in σ . Tudi prostor W je smiselno razdeliti na dva pravokotna podprostora, W_Σ in W_Π . Matematično gledano dobimo iz delitve prostora V štiri podprostore W , in sicer $V_\Sigma \otimes V_\Sigma$, $V_\Sigma \otimes V_n$, $V_n \otimes V_\Sigma$ ter $V_n \otimes V_n$. Razlog,

da združimo zadnje tri, je fizikalen, saj podprostor $V_\Sigma \otimes V_\Sigma$ ustreza ravninskemu napetostnemu in deformacijskemu stanju:

$$W = W_\Sigma \oplus W_\Pi,$$

$$W_\Sigma = V_\Sigma \otimes V_\Sigma,$$

$$W_\Pi = W_\Sigma^\perp.$$

Podobno razdelimo še prostor tenzorjev četrtega reda $Q = W \otimes W$. V ta prostor spada togostni tenzor C . Podprostorov Q ne bomo združili v samo dva podprostora, ker bomo potrebovali vse štiri:

$$Q = Q_\Sigma \oplus (W_\Sigma \otimes W_\Pi) \oplus (W_\Pi \otimes W_\Sigma) \oplus Q_\Pi,$$

$$Q_\Sigma = W_\Sigma \otimes W_\Sigma,$$

$$Q_\Pi = W_\Pi \otimes W_\Pi.$$

Za tenzorje drugega reda $\sigma \in W$ definiramo operatorja projekcije na podprostora W_Σ in W_Π :

$$\text{pr}_\Sigma \sigma = (I - \hat{n} \otimes \hat{n}) \sigma (I - \hat{n} \otimes \hat{n}), \quad (9)$$

$$\text{pr}_\Pi \sigma = \sigma - \text{pr}_\Sigma \sigma, \quad (10)$$

kjer smo z I označili identiteto na prostoru vektorjev V . Projekciji označimo s σ_Σ in σ_Π ; vizualno si ju lahko predstavljamo kot ravninski in prostorski del tenzorja (slika 4).

Operatorja projekcije s pridom uporabimo tudi za delitev tenzorja četrtega reda $C \in Q$ na komponente C_Σ , $C_{\Sigma\Pi}$, $C_{\Pi\Sigma}$ in C_Π :

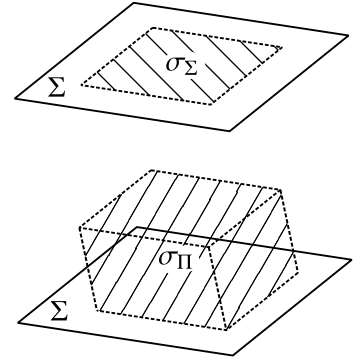
$$C_\Sigma = \text{pr}_\Sigma C \text{pr}_\Sigma,$$

$$C_{\Sigma\Pi} = \text{pr}_\Sigma C \text{pr}_\Pi,$$

$$C_{\Pi\Sigma} = \text{pr}_\Pi C \text{pr}_\Sigma,$$

$$C_\Pi = \text{pr}_\Pi C \text{pr}_\Pi.$$

Te projekcije lahko fizikalno osmislimo: C_Σ in C_Π tenzorje drugega reda preslikata brez mešanja ravninskega in prostorskega dela. Togostni tenzor z ničelnima komponentama $C_{\Sigma\Pi}$ in $C_{\Pi\Sigma}$ bi ustrezal snovi, katere obnašanje v ravnini je neodvisno od obnašanja v prostoru. To sklopitev običajno izrazimo s Poissonovimi števili.



Slika 4. Okvirna vizualizacija ravninskega in prostorskega dela tenzorja drugega reda.

Robni pogoj za napetostni tenzor

Povezavo med napetostnima tenzorjema dveh sosednjih plasti najlažje dobimo iz Cauchyjeve enačbe za mirujoče sredstvo

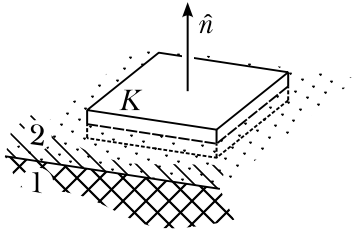
$$\nabla \cdot \sigma = -\mathbf{f}, \quad (11)$$

kjer sta $\nabla \cdot \sigma$ divergenca napetostnega tenzorja in $\mathbf{f}$ gostota zunanjih sil. Enačbo s posplošenim Gaussovim izrekom prepišemo v integralno obliko, kjer za območje vzamemo tanek kvader K , ki deloma leži v eni, deloma v drugi plasti, tako kot prikazuje slika 5. Nova oblika enačbe (11) je

$$\oint_{\partial K} \sigma d\mathbf{S} = - \iiint_K \mathbf{f} dV.$$

Ko kvader tanjšamo, gre desna stran proti 0, od leve strani pa ostane

$$\sigma_2 \hat{n} - \sigma_1 \hat{n} = 0.$$



Slika 5. Integracijsko območje K na meji med slojema 1 in 2.

Zaradi simetričnosti tenzorja σ veljajo enakosti

$$\begin{aligned}\sigma_1 \hat{n} &= \sigma_2 \hat{n}, \\ \hat{n} \sigma_1 &= \hat{n} \sigma_2, \\ \hat{n} \sigma_1 \hat{n} &= \hat{n} \sigma_2 \hat{n},\end{aligned}$$

za katere opazimo, da so vsebovane ravno v prostorskem delu tenzorja σ :

$$\sigma_\Pi = \sigma - \text{pr}_\Sigma \sigma = \hat{n} \otimes (\hat{n} \sigma) + (\sigma \hat{n}) \otimes \hat{n} - (\hat{n} \sigma \hat{n})(\hat{n} \otimes \hat{n}).$$

Ker se ujemata σ_Π sosednjih plasti, so prostorski deli napetostnega tenzorja vseh plasti enaki prostorskemu delu povprečnega napetostnega tenzorja $\bar{\sigma}$. Na kratko robni pogoj za napetostni tenzor vsake plasti zapišemo kot

$$\sigma_{i\Pi} = \bar{\sigma}_\Pi. \quad (12)$$

Robni pogoj za deformacijski tenzor

Robni pogoj za deformaciji sosednjih slojev razberemo iz podatka, da sta plasti toga zlepljeni, zato mora biti premik obeh plasti na meji enak. Vzemimo vektor $\mathbf{r}$, ki leži v ravnini Σ . Relativna premika ene in druge plasti glede na izhodišče vektorja sta

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \varepsilon_1 \mathbf{r}, \\ \mathbf{u}_2 &= \varepsilon_2 \mathbf{r}.\end{aligned}$$

Če vektor $\mathbf{r}$ ne bi ležal povsem v ravnini Σ , bi s tem vključili še skupni premik meje zaradi deformacije spodnjih plasti, ta pa nas ne zanima. Vsak vektor $\mathbf{r}$ iz ravnine lahko po drugi strani zapišemo kot projekcijo nekega vektorja $\mathbf{r}'$, ki ne leži nujno v tej ravnini:

$$\mathbf{r} = (I - \hat{n} \otimes \hat{n}) \mathbf{r}'.$$

Podobno kot pri napetostnem tenzorju še tu upoštevamo simetričnost deformacijskega tenzorja. Vektor $\mathbf{r}'$ je poljuben in ga lahko izpustimo:

$$(I - \hat{n} \otimes \hat{n}) \varepsilon_1 (I - \hat{n} \otimes \hat{n}) = (I - \hat{n} \otimes \hat{n}) \varepsilon_2 (I - \hat{n} \otimes \hat{n}).$$

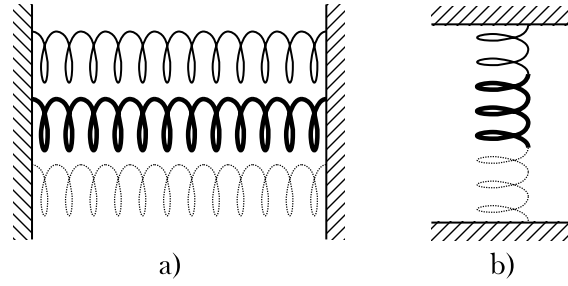
Na ta način lahko robni pogoj za deformacijski tenzor vsake plasti zapišemo z uporabo definicije ravninskega dela tenzorja:

$$\varepsilon_{i\Sigma} = \bar{\varepsilon}_\Sigma. \quad (13)$$

6. Povprečne snovne lastnosti

Kot smo že omenili, je glavni cilj izraziti makroskopske materialne lastnosti kompozita v obliki nadomestnega togostnega tenzorja $\bar{C}$, ki povezuje povprečno deformacijo in napetost. Iz primerjave definicije povprečne napetosti (6) in Hookovega zakona za kompozit (8) sklepamo, da je za zapis nadomestnega togostnega tenzorja dovolj, če znamo deformacijo posamezne plasti ε^i izraziti s povprečno deformacijo $\bar{\varepsilon}$. Iščemo ravnovesno stanje, ki ga bomo poiskali z minimizacijo energije.

Za lažjo predstavbo si najprej ogledimo poenostavljen primer vzporedno in zaporedno vezanih vzmeti z različnimi koeficienti. Da bo podobnost z zvezno snovjo večja, pišimo za silo vzmeti $F_i = \kappa_i \varepsilon^i$, kjer sta $\kappa_i = k_i l_i$ togost in $\varepsilon^i = \Delta l_i / l_i$ deformacija vzmeti, k_i in l_i pa sta koeficient in dolžina i -te vzmeti.



Slika 6. Vzoredno (a) in zaporedno (b) vezane vzmeti z različnimi koeficienti.

V primeru vzporedno vezanih vzmeti, upodobljenem na sliki 6 a, je naloga preprosta. Če poznamo povprečno deformacijo vseh vzmeti, poznamo tudi deformacijo vsake od vzmeti, saj so deformacije enake. Povprečna sila je enaka $\bar{F} = \langle \kappa_i \rangle \bar{\varepsilon}$ in za nadomestno togost dobimo povprečje posameznih togosti

$$\bar{\kappa} = \langle \kappa_i \rangle.$$

Nekoliko težji je primer zaporedno vezanih vzmeti, ki ga prikazuje slika 6 b. Če poznamo povprečni raztezek in želimo izraziti raztezek posamezne vzmeti, moramo iskati ravnovesno stanje, ki je pogojeno z enakostjo sil. Lahko pa postopamo drugače in o silah sploh ne razmišljamo. Zapišemo skupno energijo vseh vzmeti in jo minimiziramo ob vezi, da je povprečni raztezek enak predpisnemu. Tokrat dobimo nadomestno togost

$$\bar{\kappa} = \left\langle \frac{1}{\kappa_i} \right\rangle^{-1}.$$

Pri obravnavi kompozitnega materiala se zgledujemo po drugem primeru zaporedno vezanih vzmeti, ker pri danih robnih pogojih iščemo minimum potencialne energije glede na ε_{Π} , medtem ko ε_{Σ} že poznamo iz povprečne deformacije. V izogib preobilju indeksov od sedaj naprej indekse plasti i izpuščamo in vselej razumemo, da se α , ε , ε_{Π} , $C \dots$ nanašajo na konkretno plast, tj. α_i , ε_i , ε_{Π}^i , C^i . Indeks i bomo namesto tega uporabili za komponente tenzorjev. Zapišimo torej povprečno gostoto potencialne energije kompozita

$$\langle u \rangle = \frac{U}{V} = \frac{1}{2} \langle \varepsilon C \varepsilon \rangle, \quad (14)$$

ki jo minimiziramo glede na prostorske dele deformacij posameznih plasti ε_{Π} ob vezi

$$\langle \varepsilon_{\Pi} \rangle = \bar{\varepsilon}_{\Pi}. \quad (15)$$

Uporabimo metodo Lagrangeovih množiteljev:

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial \varepsilon_{\Pi}} = \lambda \frac{\partial \langle \varepsilon_{\Pi} \rangle}{\partial \varepsilon_{\Pi}}. \quad (16)$$

Nekoliko neobičajne matrične odvode najhitreje izračunamo v indeksni notaciji. Vsi tenzorji A_{ijkl} , ki se pojavijo, so simetrični na menjavo sklopov (ij) in (kl) ter posameznih dveh indeksov, zato izraze sproti dodatno poenostavimo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial \varepsilon_{\Pi ij}} &= \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial \varepsilon_{kl}} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \varepsilon_{\Pi ij}} = \text{pr}_{\Pi ijkl} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{kl}} \sum_{plasti} \frac{1}{2} \alpha \varepsilon_{mn} C_{mnop} \varepsilon_{op} = \alpha \text{pr}_{\Pi ijkl} C_{klmn} \varepsilon_{mn}, \\ \lambda_{ij} \frac{\partial \langle \varepsilon_{\Pi} \rangle_{kl}}{\partial \varepsilon_{\Pi ij}} &= \lambda_{ij} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\Pi ij}} \sum_{plasti} \alpha \varepsilon_{\Pi kl} = \alpha \text{pr}_{\Pi kl ij} \lambda_{ij} = \alpha \lambda_{kl}. \end{aligned}$$

Na koncu smo brez škode predpostavili, da je tenzor λ že na začetku ves vsebovan v prostoru W_Π in je enak svoji projekciji. Izraz $\text{pr}_\Pi C\varepsilon$ razdelimo na $C_\Pi\varepsilon_\Pi + C_{\Pi\Sigma}\bar{\varepsilon}_\Sigma$ ter vse skupaj vstavimo nazaj v enačbo (16) in izrazimo ε_Π :

$$\begin{aligned} C_\Pi\varepsilon_\Pi + C_{\Pi\Sigma}\bar{\varepsilon}_\Sigma &= \lambda, \\ \varepsilon_\Pi &= C_\Pi^{-1}(\lambda - C_{\Pi\Sigma}\bar{\varepsilon}_\Sigma). \end{aligned}$$

Inverz projekcije C_Π sprva izgleda sporno, ker tenzor v prostoru Q gotovo nima polnega ranga. Spomnimo se, da so v enačbi vsi tenzorji drugega reda popolnoma vsebovani v podprostoru W_Π in pravzaprav iščemo le inverz na tem podprostoru, se pravi da velja $C_\Pi^{-1}C_\Pi = \text{pr}_\Pi$. Izražen ε_Π povprečimo in vstavimo v enačbo (15), nakar izrazimo še množitelj λ :

$$\begin{aligned} \langle C_\Pi^{-1} \rangle \lambda - \langle C_\Pi^{-1} C_{\Pi\Sigma} \rangle \bar{\varepsilon}_\Sigma &= \bar{\varepsilon}_\Pi, \\ \lambda &= \langle C_\Pi^{-1} \rangle^{-1} \bar{\varepsilon}_\Pi + \langle C_\Pi^{-1} \rangle^{-1} \langle C_\Pi^{-1} C_{\Pi\Sigma} \rangle \bar{\varepsilon}_\Sigma. \end{aligned}$$

Ta korak nas skoraj že privede do zelenega rezultata. Deformacijski tenzor ε vsake posamezne plasti znamo izraziti z makroskopskim, povprečnim deformacijskim tenzorjem $\bar{\varepsilon}$:

$$\varepsilon_\Sigma = \bar{\varepsilon}_\Sigma, \quad (17)$$

$$\varepsilon_\Pi = C_\Pi^{-1} \langle C_\Pi^{-1} \rangle^{-1} \bar{\varepsilon}_\Pi + \left(C_\Pi^{-1} \langle C_\Pi^{-1} \rangle^{-1} \langle C_\Pi^{-1} C_{\Pi\Sigma} \rangle - C_\Pi^{-1} C_{\Pi\Sigma} \right) \bar{\varepsilon}_\Sigma. \quad (18)$$

Vzamemo definicijo povprečnega napetostnega tenzorja (6) in za ε vstavimo enačbi (17) – (18):

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} = \langle \sigma \rangle &= \langle C\varepsilon \rangle = \langle C\varepsilon_\Sigma \rangle + \langle C\varepsilon_\Pi \rangle = \\ &= \langle C \rangle \bar{\varepsilon}_\Sigma + \left(\langle CC_\Pi^{-1} \rangle \langle C_\Pi^{-1} \rangle^{-1} + \langle CC_\Pi^{-1} \rangle \langle C_\Pi^{-1} \rangle^{-1} \langle C_\Pi^{-1} C_{\Pi\Sigma} \rangle - \langle CC_\Pi^{-1} C_{\Pi\Sigma} \rangle \right) \bar{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Projekcije $\bar{\varepsilon}$ na Π in Σ v enačbi (18) smo lahko odstranili, ker nastopajo že v predstojećih C -jih. V izrazu $\langle CC_\Pi^{-1} C_{\Pi\Sigma} \rangle$ upoštevamo, da je $C_{\Pi\Sigma} = \text{pr}_\Pi C \text{pr}_\Sigma = \text{pr}_\Pi C - C_\Pi$, torej je $\langle CC_\Pi^{-1} C_{\Pi\Sigma} \rangle = \langle CC_\Pi^{-1} C \rangle - \langle C \rangle \text{pr}_\Pi$. Podobno preoblikujemo še $\langle C_\Pi^{-1} C_{\Pi\Sigma} \rangle = \langle C_\Pi^{-1} C \rangle - \text{pr}_\Pi$. Člene združimo tako, da lahko projekcije pred $\bar{\varepsilon}$ odstranimo in ga izpostavimo:

$$\bar{\sigma} = \left(\langle C \rangle (\text{pr}_\Sigma + \text{pr}_\Pi) + \langle CC_\Pi^{-1} \rangle \langle C_\Pi^{-1} \rangle^{-1} \langle C_\Pi^{-1} C \rangle - \langle CC_\Pi^{-1} C \rangle \right) \bar{\varepsilon}.$$

V preostanku prepoznamo izraz za nadomestni togostni tenzor $\bar{C}$, kot smo ga definirali v Hookovem zakonu za kompozit (8):

$$\bar{C} = \langle C \rangle - \langle CC_\Pi^{-1} C \rangle + \langle CC_\Pi^{-1} \rangle \langle C_\Pi^{-1} \rangle^{-1} \langle C_\Pi^{-1} C \rangle. \quad (19)$$

Pozornost vzbudi simetričnost robnih pogojev za σ (12) in ε (13). To nas napelje na idejo, da ju v izpeljavi zamenjamo. Za vsako plast Hookov zakon obrnemo v $\varepsilon = S\sigma$, kjer je S inverz togostnega tenzorja C . Tudi nadomestni Hookov zakon za kompozit iščemo v tej obliki:

$$\bar{\varepsilon} = \bar{S} \bar{\sigma}.$$

Če v izpeljavi nadomestnega togostnega tenzorja zamenjamo vse C s S , σ z ε ter pr_Π z pr_Σ in obratno, dobimo identičen problem za $\bar{S}$, zato rešitev lahko kar prepisemo:

$$\bar{S} = \langle S \rangle - \langle SS_\Sigma^{-1} S \rangle + \langle SS_\Sigma^{-1} \rangle \langle S_\Sigma^{-1} \rangle^{-1} \langle S_\Sigma^{-1} S \rangle. \quad (20)$$

Tako smo dobili še inverz nadomestnega togostnega tenzorja $\bar{C}$, kar sicer iz končnega rezultata ni očitno.

7. Povzetek in komentar

Videli smo, da lahko stanje slojevitega kompozita v veliko primerih dobro opišemo s povprečno deformacijo $\bar{\varepsilon}$ in povprečno napetostjo $\bar{\sigma}$, ki ju definiramo kot prostorninsko povprečje deformacij in napetosti posameznih slojev. Z $\langle \rangle$ smo označili prostorninsko uteženo povprečje količine, ki pripada posamezni plasti:

$$\bar{\varepsilon} = \langle \varepsilon \rangle, \quad \bar{\sigma} = \langle \sigma \rangle.$$

Privzamemo, da za vsako plast velja $\varepsilon_i = C_i \sigma_i$ (oz. $\sigma_i = S_i \varepsilon_i$), povezavo med $\bar{\varepsilon}$ in $\bar{\sigma}$ pa zapišemo z nadomestnim Hookovim zakonom

$$\bar{\varepsilon} = \bar{C} \bar{\sigma} \quad \text{ali} \quad \bar{\sigma} = \bar{S} \bar{\varepsilon},$$

kjer nadomestni togostni tenzor izračunamo kot

$$\begin{aligned} \bar{C} &= \langle C \rangle - \langle C C_{\Pi}^{-1} C \rangle + \langle C C_{\Pi}^{-1} \rangle \langle C_{\Pi}^{-1} \rangle^{-1} \langle C_{\Pi}^{-1} C \rangle, \\ \bar{C}^{-1} = \bar{S} &= \langle S \rangle - \langle S S_{\Sigma}^{-1} S \rangle + \langle S S_{\Sigma}^{-1} \rangle \langle S_{\Sigma}^{-1} \rangle^{-1} \langle S_{\Sigma}^{-1} S \rangle. \end{aligned}$$

Zanimivo je pogledati poseben primer, ko za vsako plast velja $C_{\Pi\Sigma} = C_{\Sigma\Pi} = 0$. Tak togostni tenzor bi našli pri materialu, katerega raztezanje v ravnini Σ je neodvisno od raztezanja v pravokotni smeri.² Členi v izrazu za nadomestni togostni tenzor se poenostavijo v

$$\begin{aligned} \langle C \rangle - \langle C C_{\Pi}^{-1} C \rangle &\rightarrow \langle C_{\Sigma} \rangle, \\ \langle C C_{\Pi}^{-1} \rangle \langle C_{\Pi}^{-1} \rangle^{-1} \langle C_{\Pi}^{-1} C \rangle &\rightarrow \langle C_{\Pi}^{-1} \rangle^{-1}, \end{aligned}$$

kar nas spomni na vzporedno in zaporedno povezane vzmeti. V smeri Σ so plasti vzporedne in za nadomestni togostni tenzor vzamemo povprečje plasti, kot smo to storili pri vzporedno povezanih vzmeteh: $\bar{C}_{\Sigma} = \langle C_{\Sigma} \rangle \sim \langle \kappa \rangle$. V pravokotni smeri Π so plasti zaporedne in moramo vzeti povprečje obratnih vrednosti, kakor pri zaporedno povezanih vzmeteh: $\bar{C}_{\Pi} = \langle C_{\Pi}^{-1} \rangle^{-1} \sim \langle 1/\kappa \rangle^{-1}$.

8. Zaključek

Predstavljeni opis slojevitega kompozita je dobra osnova za analizo obremenitvenega stanja dovolj debelega kosa snovi z veliko tankimi plastmi, da so spremembe deformacij in napetosti v smeri prečno na plasti počasne v primerjavi z njihovo debelino. Za tanke plošče pod upogibom, kjer to ne velja, obstajajo prilagojeni modeli, ki omejitev delno zaobidejo, a v izpeljavi ne bi videli veliko novega.

V celoti smo izpustili obravnavo temperaturnega raztezanja kompozita. Tudi izhodišče, da poznamo lastnosti posameznih plasti, ni samoumevno, marveč jih moramo pogosto izračunati, kar odpre nove izzive. Kar ta članek izpušča, izčrpno obravnava navedena literaturi o mehaniki kompozitnih materialov.

Izračun povprečnih snovnih lastnosti je zlasti uporaben pri numeričnem reševanju problemov elastomehanike. Ker jih rešujemo skoraj izključno z metodo končnih elementov, bi bila neposredna analiza posameznih plasti računsko izjemno zamudna, če ne nedosegljiva, hkrati pa povprečni opis za vse praktične namene zadostuje.

²Tega obnašanja pri resničnih snoveh sicer verjetno ne pričakujemo.

LITERATURA

- [1] Augustin-Louis Cauchy, *Exercices de mathématiques*, zv. Seconde Année, De Bure frères, Libraires du roi et de la bibliothèque du roi, Paris, 1827.
- [2] *Teoria dell'elasticità*, Spletna stran: https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Teoria_dell%27elasticit%C3%A0&oldid=136876466, ogled: oktober 2024.
- [3] *Augustin-Louis Cauchy*, Spletna stran: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Augustin-Louis_Cauchy&oldid=1242922610, ogled: oktober 2024.
- [4] Arnold Sommerfeld, *Mechanics of deformable bodies*, Lectures on Theoretical Physics, zv. 2, Academic Press Inc., New York, 1950.
- [5] Ervin Prelog, *Elasto in plastomehanika*, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 1978.
- [6] ———, *Metoda končnih elementov*, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za arhitekturo, gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana, 1975.
- [7] Marko Škerlj, *Trdnost*, Mehanika, Univerza Edvarda Kardelja v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 1988.
- [8] G. P. Sendeckyj (ur.), *Mechanics of composite materials*, Composite materials, zv. 2, Academic Press, 1974.
- [9] R. M. Christensen, *Mechanics of composite materials*, Krieger Pub. Co, Malabar, Fla, 1991.
- [10] Robert M. Jones, *Mechanics of composite materials*, 2. izd., Taylor & Francis, Philadelphia, PA, 1999.
- [11] Nicolaie Dan Cristescu, Eduard-Marius Craciun, in Eugen Soós, *Mechanics of elastic composites*, Chapman & Hall/CRC, 2004.
- [12] Lev Davidovič Landau in Evgenij M. Lifšic, *Theory of elasticity*, 2. izd., Course of theoretical physics, Pergamon Press, Oxford, 1986.
- [13] Ivan Kuščer in Alojz Kodre, *Matematika v fiziki in tehniki*, 3. izd., Matematika-fizika: zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij, DMFA - založništvo, Ljubljana, 2016.
- [14] Teodor M. Atanackovic in A. Guran, *Theory of elasticity for scientists and engineers*, Birkhäuser, Boston, 2000.