SPINORSKA UPODOBITEV LORENTZOVE GRUPE

VITA MOVRIN

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

V članku je obravnavana spinorska upodobitev Lorentzove grupe rotacij in potiskov. Sprva so navadene osnove matričnih Liejevih grup in teorije upodobitev, nato pa se podrobneje obravnava Lorentzova grupa in pripadajoča Liejeva algebra. Podano je zgodovinsko ozadje Diracove enačbe, ki pravzaprav motivira vpeljavo spinorske upodobitve. Natančneje so opisane transformacije Diracovih spinorjev, njihove nenavadne transformacijske lastnosti pa so pojasnjene z obstojem t.i. spin homomorfizma $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}^+(1,3)$. Na koncu so navedene še vse nerazcepne upodobitve spin grupe Lorentzove grupe.

SPINOR REPRESENTATION OF THE LORENTZ GROUP

This paper discusses the spinor representation of the Lorentz group of rotations and boosts. It begins with a review of the basics of matrix Lie groups and representation theory. Then the Lorentz group and its associated Lie algebra are examined in detail, offering historical context for the Dirac equation, which serves as the primary motivation for introducing the spinor representation. The transformations of Dirac spinors are analyzed in detail, and their unusual transformation properties are explained through the existence of the so-called spin homomorphism $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}^+(1,3)$. The article concludes with a description of all irreducible representations of the spin group of the Lorentz group.

1. Uvod

Spinorska upodobitev Lorentzove grupe (oziroma pripadajoče Liejeve algebre) se naravno pojavi, ko zahtevamo Lorentzovo invariantnost Diracove enačbe. Ugotovimo namreč, da je funkcija ψ, ki nastopa v enačbi, dejansko 4-komponentna kompleksna funkcija, ki ji pravimo *Diracov spinor* oziroma spinorsko polje. Ta se ne transformira kot Lorentzov skalar ali vektor, temveč kot narekuje t.i. *spinorska upodobitev* Lorentzove grupe. Izkaže se, da gre pravzaprav za upodobitev grupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, ki je t.i. *spin grupa* specialne Lorentzove grupe $\mathrm{SO}(1,3)$ in velja $\mathrm{SO}(1,3) \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$.

Ker je grupa $\mathrm{O}(1,3)$ posebej tudi matrična Liejeva grupa, sprva sledimo [1] in [2] in si v 2. poglavju ogledamo nekaj ključnih lastnosti Liejevih grup in Liejevih algeber, nato pa v 3. definiramo ortohrono specialno Lorentzovo grupo $\mathrm{SO}^+(1,3)$. Ogledamo si še pripadajočo algebro $\mathfrak{so}^+(1,3)$, katere bazo tvorijo t.i. generatorji rotacij in potiskov, pri čemer generatorje zapišemo v prikladni indeksni notaciji, kot to storijo v [3]. V 4. poglavju se posvetimo spinorski upodobitvi. Pričnemo z motivacijo, ki izvira iz Lorentzove invariantnosti Diracove enačbe, in uvedemo Diracove spinorje. Pri tem povzemamo [4] in [5]. V nadaljevanju sledimo [6] in [3]: definiramo spinorsko upodobitev, si ogledamo transformacije spinorskega polja in uvedemo še Weylove spinorje. Kratek del razprave namenimo tudi *spin homomorfizmu*, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}^+(1,3)$, pri čemer se opiramo na [1] in [7]. Zaključimo z opisom vseh nerazcepnih upodobitev *spin grupe* Lorentzove grupe, pri čemer izpustimo podrobnosti in izpeljave – te lahko najdemo v [8].

2. Osnove matričnih Liejevih grup in Liejevih algeber

2.1 Matrične Liejeve grupe

Definicija 1. *Matrična Liejeva grupa* je zaprta podgrupa G splošne linearne grupe $n \times n$ obrnljivih kompleksnih matrik $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, pri čemer zaprtost v $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ pomeni sledeče: če je $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ zaporedje elementov iz G, ki konvergira k neki matriki A, potem je bodisi $A \in G$ ali pa A ni obrnljiva, torej ni element $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$.

Zgled 2. Množico vseh $n\times n$ (realnih ali kompleksnih) matrik z determinantno enako ena imenujemo specialna linearna grupa. Označimo jo s $\mathrm{SL}(n,\mathbb{F})$. Očitno je to podgrupa $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, izkaže pa se, da je tudi matrična Liejeva grupa. Res, naj bo $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ konvergentno zaporedje matrik iz $\mathrm{SL}(n,\mathbb{F})$, ki konvergira k matriki A. Ker je determinanta zvezna funkcija, velja

$$\det(A) = \det\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \det(A_n) = 1.$$

Torej je $A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{F})$, od koder sledi, da je $\mathrm{SL}(n,\mathbb{F})$ zaprta podgrupa $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$.

Zgled 3. Naj bosta $n,k \in \mathbb{Z}^+$. Na $\mathbb{R}^{n+k}$ definirajmo simetrično bilinearno formo $[\cdot,\cdot]_{n,k}$ kot

$$[x,y]_{n,k} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n - x_{n+1}y_{n+1} - \cdots - x_{n+k}y_{n+k}.$$

Množica $(n+k)\times(n+k)$ realnih matrik A, za katere velja

$$[Ax,Ay]_{n,k} = [x,y]_{n,k} \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^{n+k},$$

se imenuje posplošena ortogonalna grupa $\mathrm{O}(n,k)$. V nadaljevanju bomo videli, da je $\mathrm{O}(n,k)$ matrična Liejeva grupa. Podgrupo grupe $\mathrm{O}(n,k)$, ki vsebuje matrike z determinanto 1, označimo s $\mathrm{SO}(n,k)$.

Lema 4. *Matrika A je element grupe $\mathrm{O}(n,k)$ natanko tedaj, ko je $gA^Tg = A^{-1}$, kjer je*

$$g \equiv \begin{bmatrix} I_{n\times n} & 0 \\ 0 & -I_{k\times k}\end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}((n+k)\times(n+k),\mathbb{R}).$$

Dokaz. Opazimo, da je $[x,y]_{n,k} = \langle x, gy\rangle$, kjer je $\langle\cdot,\cdot\rangle$ standardni skalarni produkt na $\mathbb{R}^{n+k}$. Sledi:

$$\begin{aligned} A\in \mathrm{O}(n,k) &\iff \langle Ax, gAy\rangle = \langle x, gy\rangle \quad \forall x,y\in\mathbb{R}^{n+k} \\ &\iff \langle x, A^TgAy\rangle = \langle x, gy\rangle \quad \forall x,y\in\mathbb{R}^{n+k} \\ &\iff \langle x, (A^TgA - g)y\rangle = 0 \quad \forall x,y\in\mathbb{R}^{n+k} \\ &\iff A^TgA - g = 0 \iff gA^Tg = A^{-1}. \end{aligned}$$

■

Trditev 5. *$\mathrm{O}(n,k)$ je matrična Liejeva grupa.*

Dokaz. Najprej pokažimo, da je $\mathrm{O}(n,k)$ podgrupa $\mathrm{GL}(n+k,\mathbb{R})$. Naj bosta $A,B\in\mathrm{O}(n,k)$. Opazimo, da je $gg = I_{(n+k)\times(n+k)}$ in $g^T = g$. Torej velja

$$g(AB^{-1})^Tg = g(B^{-1})^TA^Tg = g(gB^Tg)^TA^Tg = BgA^Tg = BA^{-1} = (AB^{-1})^{-1},$$

zato po lemi 4 sledi $AB^{-1}\in\mathrm{O}(n,k)$.

Pokažimo še, da je $\mathrm{O}(n,k)$ zaprta v $\mathrm{GL}(n+k,\mathbb{R})$. Naj bo $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathrm{O}(n,k)$ zaporedje, ki konvergira k $A\in\mathrm{GL}(n+k,\mathbb{R})$. Ker je invertiranje matrik zvezna preslikava, sledi $A_n^{-1}\to A^{-1}$. Definirajmo

$$\begin{gathered} \Omega\colon \mathrm{GL}(n+k,\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}((n+k)\times(n+k),\mathbb{R}), \\ \Omega(X) = gX^Tg - X^{-1}, \end{gathered}$$

kjer je matrika g definirana kot v lemi 4. Preslikava Ω je zvezna in po lemi 4 sledi $\Omega(A_n) = 0$ za vse $n\in\mathbb{N}$. Torej je

$$0 = \lim_{n\to\infty}\Omega(A_n) = \Omega\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \Omega(A) = gA^Tg - A^{-1},$$

zato je $A\in\mathrm{O}(n,k)$. ■

Definicija 6. Matrična Liejeva grupa G je *povezana*, če za vsak par matrik $A, B \in G$ obstaja zvezna pot v G od A do B, tj. zvezna preslikava $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to G$, $t \mapsto \gamma(t)$, za katero velja $\gamma(a) = A$ in $\gamma(b) = B$. *Identitetna komponenta* G_0 matrične Liejeve grupe G je množica vseh $A \in G$, za katere obstaja zvezna pot v G od A do I.

Definicija 7. Matrična Liejeva Grupa G je *enostavno povezana*, če je povezana in če lahko vsako zanko v G zvezno skrčimo v točko v G. Natančneje, G je enostavno povezana, če je povezana in če za vsako zvezno pot $\gamma : [0, 1] \to G$, za katero velja $\gamma(0) = \gamma(1)$, obstaja zvezna preslikava $\Gamma(s, t) : [0, 1] \times [0, 1] \to G$ z naslednjimi lastnostmi:

- $\Gamma(s, 0) = \Gamma(s, 1)$ za vse $s \in [0, 1]$, tj. $\Gamma(s, .)$ predstavlja sklenjeno zanko za vsak s,
- $\Gamma(0, t) = \gamma(t)$ za vse $t \in [0, 1]$, tj. $\Gamma(0, t)$ ustreza začetni zanki oz. poti $\gamma(t)$,
- $\Gamma(1, t) = \Gamma(1, 0)$ za vse $t \in [0, 1]$, tj. pri $s = 1$ pot $\Gamma(1, .)$ predstavlja točko.

Definicija 8. Preslikava $\Phi : H \to G$ med matričnima Liejevima grupama je *homomorfizem matričnih Liejevih grup*, če je homomorfizem grup in zvezna preslikava. Če je $\Phi : H \to G$ še bijekcija, potem je *izomorfizem matričnih Liejevih grup*. Matrični Liejevi grupi G in H sta izomorfni, če obstaja kakšen izomorfizem med njima. Tedaj pišemo $G \cong H$.

Opomba 9. V zgornji definiciji nismo zahtevali zveznosti inverza. Izkaže se namreč, da je inverz bijektivnega homomorfizma matričnih Liejevih grup avtomatično zvezen, torej spet homomorfizem matričnih Liejevih grup.

2.2 Eksponent matrike

Spomnimo se, da za $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$ definiramo *eksponent* matrike A kot

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots . \tag{1}$$

Naslednja trditev podaja lastnosti eksponentne preslikave. Dokaze lahko bralec najde v [1].

Trditev 10. *Vrsta* (1) *konvergira za vse* $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ *in preslikava*

$$\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C}), \;\; A \mapsto e^A$$

je gladka. Nadalje, za poljubni $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *in* $C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ *velja:*

(i) $e^0 = I$ *in* $\left(e^A\right)^\dagger = e^{A^\dagger}$

(ii) $e^A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ *in* $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$

(iii) $\det(A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$

(iv) $e^{A+B} = \lim_{m\to\infty} \left(e^{\frac{A}{m}} e^{\frac{B}{m}}\right)^m$

(v) $e^{(\alpha+\beta)A} = e^{\alpha A} e^{\beta A}$

(vi) $AB = BA \implies e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$

(vii) $e^{CAC^{-1}} = Ce^A C^{-1}$

(viii) $\gamma(t) = e^{At}$ *je gladka pot in* $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} e^{tA} = A$.

Opomba 11. Za matriko $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ z $A^\dagger$ označujemo hermitiranje, tj. transponiranje in konjugiranje. Ekvivalentni zapisi so torej $A^\dagger$, A^H in $\bar{A}^T$.

2.3 Matrične Liejeve algebre

Definicija 12. *Liejeva algebra* nad $\mathbb{F}$ je vektorski prostor $\mathfrak{g}$ nad $\mathbb{F}$, opremljen z $\mathbb{F}$-bilinearno operacijo $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \mapsto [\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$, imenovano *oklepaj*, za katero velja

(i) $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = -[\mathcal{Y}, \mathcal{X}]$ (antisimetričnost) in

(ii) $[\mathcal{X}, [\mathcal{Y}, \mathcal{Z}]] + [\mathcal{Y}, [\mathcal{Z}, \mathcal{X}]] + [\mathcal{Z}, [\mathcal{X}, \mathcal{Y}]] = 0$ (Jacobijeva identiteta)

za vse $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \in \mathfrak{g}$.

Definicija 13. Vektorski podprostor $\mathfrak{h}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je *Liejeva podalgebra*, če je zaprt za oklepaj, tj. če $[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2] \in \mathfrak{h}$ za vse $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in \mathfrak{h}$. Označimo $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$.

Zgled 14. Lahko preverimo, da je komutator matrik $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$, $AB - BA$, antisimetrična bilinearna operacija, ki zadošča Jacobijevi identiteti. Vektorski prostor $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$, z operacijo oklepaj dano kot $[A, B] \equiv AB - BA$, je torej Liejeva algebra nad $\mathbb{F}$.

Definicija 15. Naj bo G matrična Liejeva grupa. *Liejeva algebra* $\mathfrak{g}$ *matrične Liejeve grupe* je množica vseh matrik $\mathcal{X}$, za katere je $e^{t\mathcal{X}} \in G$ za vse $t \in \mathbb{R}$.

Trditev 16. *Naj bo $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra matrične Liejeve grupe G. Za vse $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathfrak{g}$ velja:*

(i) $A\mathcal{X}A^{-1} \in \mathfrak{g}$ *za vse* $A \in G$

(ii) $s\mathcal{X} \in \mathfrak{g}$ *za vse* $s \in \mathbb{R}$

(iii) $\mathcal{X} + \mathcal{Y} \in \mathfrak{g}$

(iv) $\mathcal{X}\mathcal{Y} - \mathcal{Y}\mathcal{X} \in \mathfrak{g}$

Dokaz. (i) Ker je $A \in G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, po trditvi 10 *(vii)* sledi $e^{tA\mathcal{X}A^{-1}} = Ae^{t\mathcal{X}}A^{-1} \in G$.

(ii) Za $t \in \mathbb{R}$ je $e^{t(s\mathcal{X})} = e^{(ts)\mathcal{X}} \in G$, torej $s\mathcal{X} \in \mathfrak{g}$.

(iii) Po trditvi 10 *(iv)* velja $e^{\mathcal{X}+\mathcal{Y}} = \lim_{m\to\infty} \left(e^{\frac{\mathcal{X}}{m}} e^{\frac{\mathcal{Y}}{m}}\right)^m$. Ker je G grupa, je $\left(e^{\frac{\mathcal{X}}{m}} e^{\frac{\mathcal{Y}}{m}}\right)^m \in G$ za vsak $m \in \mathbb{R}$. Limita $e^{\mathcal{X}+\mathcal{Y}}$ je po točki *(ii)* trditve 10 obrnljiva in po definiciji matrične Liejeve grupe zato element G.

(iv) Velja $\frac{d}{dt}\left(\left(e^{t\mathcal{X}}\mathcal{Y}\right)e^{-t\mathcal{X}}\right)\Big|_{t=0} = \mathcal{X}\mathcal{Y} - \mathcal{Y}\mathcal{X}$. Po *(i)* $e^{t\mathcal{X}}\mathcal{Y}e^{-t\mathcal{X}} \in \mathfrak{g}$. Po točkah *(ii)* in *(iii)* je $\mathfrak{g}$ vektorski podprostor $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$, zato je zaprt. Ker je

$$\mathcal{X}\mathcal{Y} - \mathcal{Y}\mathcal{X} = \lim_{h\to o} \frac{e^{t\mathcal{X}}\mathcal{Y}e^{-t\mathcal{X}} - \mathcal{Y}}{h},$$

$\mathcal{X}\mathcal{Y} - \mathcal{Y}\mathcal{X} \in \mathfrak{g}$. ■

Opomba 17. Iz zgleda 14 in trditve 16 posebej sledi, da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ matrične Liejeve grupe G res realna Liejeva algebra, kjer je operacija oklepaj dana s komutatorjem matrik: za $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathfrak{g}$, je $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] \equiv \mathcal{X}\mathcal{Y} - \mathcal{Y}\mathcal{X}$.

Zgled 18. Oglejmo si Liejeve algebre matričnih Liejevih grup $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{F})$ in $\mathrm{O}(n, k)$. S pomočjo lastnosti eksponentne preslikave iz trditve 10 lahko preverimo, da velja:

(i) $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}) = \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F})$

(ii) $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F}) = \{\mathcal{A} \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F}) \mid \mathrm{tr}(\mathcal{A}) = 0\} \leq \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$

(iii) $\mathfrak{o}(n, k) = \{\mathcal{A} \in \mathrm{Mat}((n + k) \times (n + k), \mathbb{R}) \mid g\mathcal{A}^T g = -\mathcal{A}\} \leq \mathfrak{gl}(n + k, \mathbb{R})$, kjer je

$$g = \begin{bmatrix} I_{n\times n} & 0 \\ 0 & -I_{k\times k} \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}((n+k)\times(n+k),\mathbb{R}).$$

Preverimo le (iii). Matrika $\mathcal{M}$ leži v $\mathfrak{o}(n,k)$ natanko tedaj, ko za vse $t\in\mathbb{R}$ velja $e^{t\mathcal{M}} \in \mathrm{O}(n,k)$, torej, po lemi 4, natanko tedaj, ko velja

$$g\left(e^{t\mathcal{M}}\right)^T g = \left(e^{t\mathcal{M}}\right)^{-1}.$$

To enakost lahko z upoštevanjem lastnosti *(i)*, *(ii)* in *(vii)* iz trditve 10 spremenimo v

$$e^{tg\mathcal{M}^T g} = e^{-t\mathcal{M}}$$

in po točki *(viii)* iz trditve 10 dobimo

$$g\mathcal{M}^T g = -\mathcal{M}.$$

Trditev 19. *Identitetna komponenta G_0 matrične Liejeve grupe G (glej definicijo 6) je matrična Liejeva grupa. Njena Liejeva algebra je enaka algebri grupe G.*

Dokaz. Naj bosta $A,B\in G_0$. Potem obstajata poti $\gamma_A\colon A\to I$ in $\gamma_B\colon B\to I$ v G. Tedaj je $\gamma(t)=\gamma_A(t)\gamma_B(t)^{-1}$ zvezna pot v G od AB^{-1} do I, zato je $AB^{-1}\in G_0$. Torej je G_0 podgrupa G.

Očitno je Liejeva algebra $\mathfrak{g}_0$ grupe G_0 vsebovana v Liejevi algebri $\mathfrak{g}$ Liejeve grupe G. Pokažimo še obratno vsebovanost. Za $\mathcal{X}\in\mathfrak{g}$, $s\in\mathbb{R}$, imamo pot $\gamma\colon[0,1]\to G$, $t\mapsto e^{ts\mathcal{X}}$ od I do $e^{s\mathcal{X}}$, zato je $e^{s\mathcal{X}}\in G_0$. Torej velja $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{g}_0$. ■

Definicija 20. Naj bosta $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{h}$ Liejevi algebri nad $\mathbb{F}$. Preslikava $\phi:\mathfrak{h}\to\mathfrak{g}$ je *homomorfizem Liejevih algeber*, če je $\mathbb{F}$-linearna in velja

$$\phi([\mathcal{X},\mathcal{Y}]) = [\phi(\mathcal{X}),\phi(\mathcal{Y})]$$

za vse $\mathcal{X},\mathcal{Y}\in\mathfrak{h}$. Če je $\phi:\mathfrak{h}\to\mathfrak{g}$ še bijekcija, potem je *izomorfizem Liejevih algeber*. Liejevi algebri $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{h}$ sta izomorfni, če obstaja kak izomorfizem med njima.

2.4 Homomorfizmi Liejevih grup in Liejevih algeber ter osnove upodobitev

Izrek 21. *Naj bosta G in H matrični Liejevi grupi z Liejevima algebrama $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{h}$ ter $\Phi\colon G\to H$ homomorfizem Liejevih grup. Tedaj obstaja natanko ena linearna preslikava $\phi\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$, da je*

$$\Phi\left(e^{\mathcal{X}}\right) = e^{\phi(\mathcal{X})} \text{ za vse } \mathcal{X}\in\mathfrak{g}.$$

Za vse $\mathcal{X},\mathcal{Y}\in\mathfrak{g}$ velja še

$$\phi(\mathcal{X}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\Phi\left(e^{t\mathcal{X}}\right)$$

in $\phi([\mathcal{X},\mathcal{Y}])=[\phi(\mathcal{X}),\phi(\mathcal{Y})]$, tj. ϕ je homomorfizem Liejevih algeber.

Opomba 22. Izrek 21 pove, da vsak homomorfizem matričnih Liejevih grup inducira homomorfizem pripadajočih Liejevih algeber. Posebej to velja za upodobitve, kar pove posledica 27.

Definicija 23. *Upodobitev matrične Liejeve grupe G* na končno razsežnem vektorskem prostoru V nad poljem $\mathbb{F}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ je homomorfizem Liejevih grup,

$$\Pi\colon G\to \mathrm{GL}(V).$$

Upodobitev matrične Liejeve grupe je *zvesta*, če je injektivna.

Definicija 24. *Upodobitev Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$ nad $\mathbb{F}$ na končno razsežnem vektorskem prostoru V nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ je homomorfizem Liejevih algeber

$$\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V).$$

Upodobitev Liejeve algebre je *zvesta*, če je injektivna.

Zgled 25. Vsaka Liejeva podgrupa H matrične Liejeve grupe $\mathrm{GL}(V)$ ima standardno upodobitev na V, ki je dana kar z inkluzijo $H \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$, in ta upodobitev je zvesta. Posebej ima torej vsaka matrična grupa $H \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ standardno zvesto upodobitev na vektorskem prostoru $\mathbb{F}^n$. Podobno ima vsaka Liejeva podalgebra $\mathfrak{h}$ Liejeve algebre $\mathfrak{gl}(V)$ standardno zvesto upodobitev na V.

Definicija 26. Naj bo Π upodobitev matrične Liejeve grupe G na končno razsežnem vektorskem prostoru V.

- Podprostor $W \leq V$ je *invarianten*, če je $\Pi(A)w \in W$ za vse $w \in W$ in vse $A \in G$.
- Upodobitev Π je *nerazcepna*, če sta edina invariantna prostora $\{0\}$ in V.

Analogno definiramo nerazcepne upodobitve Liejevih algeber.

Posledica 27. *Naj bo* $\Pi\colon G \to GL(n, \mathbb{R})$ *upodobitev matrične Liejeve grupe* G. *Potem obstaja natanko ena upodobitev* $\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n)$ *pripadajoče Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$, *da je*

$$\Pi\left(e^{\mathcal{X}}\right) = e^{\pi(\mathcal{X})}$$

za vse $\mathcal{X} \in \mathfrak{g}$. *Velja še*

$$\pi(\mathcal{X}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Pi\left(e^{t\mathcal{X}}\right).$$

Dokaz. V izreku 21 vzamemo $H = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\Phi = \Pi$ in $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(n)$. ∎

Opomba 28. Vprašamo se lahko, ali velja tudi obrat izreka 21. Se pravi, ali vsakemu homomorfizmu Liejevih algeber ustreza nek homomorfizem pripadajočih matričnih Liejevih grup? Posebej, ali velja obrat posledice 27 – ali lahko poljubno upodobitev Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ dobimo iz neke upodobitve pripadajoče Liejeve grupe G? Izkaže se, da to zagotovo velja le, če je G enostavno povezana, kar pove izrek 29.

Izrek 29. *Naj bosta* G *in* H *matrični Liejevi grupi z Liejevima algebrama* $\mathfrak{g}$ *in* $\mathfrak{h}$ *ter* $\phi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *homomorfizem Liejevih algeber. Če je* G *enostavno povezana, potem obstaja natanko en homomorfizem Liejevih grup* $\Phi\colon G \to H$, *da velja*

$$\Phi(e^{\mathcal{X}}) = e^{\phi(\mathcal{X})} \text{ za vse } \mathcal{X} \in \mathfrak{g}.$$

3. Lorentzova grupa

3.1 Definicija in komponente za povezanost

Lorentzova grupa je grupa $\mathrm{O}(1,3)$, ki je (po lemi 4) enaka

$$\mathrm{O}(1,3) = \{\Lambda \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R}) \mid \Lambda^T \eta \Lambda = \eta\}, \quad \eta = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1).$$

Po trditivi 5 je $\mathrm{O}(1,3)$ matrična Liejeva grupa, katere Liejeva algebra je po zgledu 18 enaka

$$\mathfrak{o}(1,3) = \{\omega \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R}) \mid \eta\omega + \omega^T \eta = 0\}, \tag{2}$$

po trditvi 19 pa je to tudi Liejeva algebra identitetne komponente – komponente za povezanost, ki vsebuje nevralni element I.

Spomnimo se, vsak tenzor tipa (k, l) ima k kontravariantnih (zgornjih) in l kovariantnih (spodnjih) indeksov. Grški indeksi $(\mu, \nu, \sigma \dots)$ običajno označujejo komponente v 4-dimenzionalnem prostor-času in zavzamejo vrednosti $0, 1, 2, 3$. Pri koordinatni transformaciji $x^\mu \to y^\mu$ se komponente tenzorja transformirajo kot

$$T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l} \to \frac{\partial y^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial y^{\mu_k}}{\partial x^{\alpha_k}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial y^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\beta_l}}{\partial y^{\nu_l}} T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}{}_{\beta_1 \dots \beta_l}.$$

Uporabljamo Einsteinovo sumacijsko konvencijo. To pomeni, da za vsak indeks, ki se pojavi enkrat kot zgornji in enkrat kot spodnji, seštejemo po vseh možnih vrednostih, npr. $a^{\nu\mu} b_\mu c_\sigma = \sum_{\mu=0}^{3} a^{\nu\mu} b_\mu c_\sigma$. Metrika $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ in njen inverz $\eta^{\mu\nu}$ omogočata pretvarjanje med kovariantnimi in kontravariantnimi indeksi, t.i. spuščanje, $\eta_{\mu\nu} v^\nu = v_\mu$, in dviganje, $\eta^{\mu\nu} v_\nu = v^\mu$. Metrika določa tudi skalarni produkt: $v^\mu w_\mu = \eta_{\mu\nu} v^\mu w^\nu = v^0 w^0 - v^1 w^1 - v^2 w^2 - v^3 w^3$. Tako je zapis $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ v definicji Lorentzove grupe ekvivalenten $\Lambda^\sigma{}_\mu \, \eta_{\sigma\rho} \, \Lambda^\rho{}_\nu = \eta_{\mu\nu}$, medtem ko lahko $\eta\omega + \omega^T \eta = 0$ zapišemo kot $\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} = 0$.

Izkaže se, da ima Lorentzova grupa štiri komponente za povezanost:

$$\begin{aligned}
L_+^\uparrow &= \{A \in \mathrm{O}(1,3) \mid \det A = 1,\ A_{00} \geq 1\},\\
L_-^\uparrow &= \{A \in \mathrm{O}(1,3) \mid \det A = -1,\ A_{00} \geq 1\},\\
L_+^\downarrow &= \{A \in \mathrm{O}(1,3) \mid \det A = 1,\ A_{00} \leq -1\},\\
L_-^\downarrow &= \{A \in \mathrm{O}(1,3) \mid \det A = -1,\ A_{00} \leq -1\}.
\end{aligned}$$

Po trditvi 19 je identitetna komponenta $L_+^\uparrow$ matrična Liejeva grupa, torej je Liejeva podgrupa v $\mathrm{SO}(1,3)$. Imenujemo jo *ortohrona specialna Lorentzova grupa* in označimo $L_+^\uparrow \equiv \mathrm{SO}^+(1,3)$. Druge komponente niso niti grupe, saj ne vsebujejo enote I. Vsak element Lorentzove grupe lahko zapišemo kot produkt elementov $\mathrm{SO}^+(1,3)$ in matrik obrata časa, $T = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$, ter inverzije prostora, $P = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$, zato zadošča obravnavati le $\mathrm{SO}^+(1,3)$ ter operaciji T in P.

3.2 Generatorji rotacij in potiskov

Standardna baza šestdimenzionalne Liejeve algebre $\mathfrak{so}^+(1,3)$, ki je po trditvi 19 enaka $\mathfrak{o}(1,3)$, je dana s t.i. *generatorji rotacij in potiskov.*

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Z eksponenciranjem matrik J_i dobimo ravno standardne rotacijske matrike, z eksponenciranjem K_i pa matrike potiskov (ang. *boosts*). Res, oglejmo si npr. eksponenta matrik $-\varphi J_3$ in $-\chi K_3$ za neka

$\varphi, \chi > 0$. V prvem primeru je

$$e^{-\varphi J_3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\varphi J_3)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varphi J_3)^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varphi J_3)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

kjer smo v zadnji enakosti uporabili Taylorjev razvoj funkcij sin in cos, pred tem pa upoštevali enakosti $(J_3)^0 = I$, $(J_3)^{4k+1} = J_3$, $(J_3)^{4k+2} = -\operatorname{diag}(0,1,1,0)$, $(J_3)^{4k+3} = -J_3$ in $(J_3)^{4k+4} = \operatorname{diag}(0,1,1,0)$, kjer je $k \in \mathbb{N}_0$. To lahko enostavno preverimo z množenjem matrik in indukcijo. Vidimo torej, da matrika $e^{-\varphi J_3}$ predstavlja prostorsko rotacijo okrog osi z za kot φ. Podobno dobimo

$$e^{-\chi K_3} = \begin{bmatrix} \cosh\chi & 0 & 0 & -\sinh\chi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\chi & 0 & 0 & \cosh\chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix},$$

kjer smo označili $\beta \equiv v/c = \tanh\chi$ in $\gamma \equiv (1-\beta^2)^{-1/2}$. Tukaj v označuje hitrost, c hitrost svetlobe, parametru χ pa v tem primeru pravimo rapidnost (ang. *rapidity*). Vidimo, da matrika $e^{-\chi K_3}$ predstavlja Lorentzov potisk v smeri z s hitrostjo v, tj. transformacijo iz mirujočega sistema v sistem, ki se giblje s hitrostjo v v smeri osi z.

Generatorje rotacij in potiskov bi lahko označili kot $\mathcal{J}^A$ z $A = 1,2,3,4,5,6$, za bolj uporabno pa se izkaže uvedba oznak $\mathcal{J}^{\rho\sigma}$ s parom antisimetričnih indeksov $[\rho\sigma]$, $\rho, \sigma = 0,1,2,3$. Tako velja npr. $\mathcal{J}^{01} = -\mathcal{J}^{01}$, torej ρ in σ res označujeta šest različnih 4×4 matrik. Sedaj lahko bazo $\mathfrak{so}^+(1,3)$ s pomočjo indeksne notacije kompaktno zapišemo kot

$$(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^{\mu}{}_{\nu} = \eta^{\rho\mu}\delta^{\sigma}{}_{\nu} - \eta^{\sigma\mu}\delta^{\rho}{}_{\nu}, \tag{4}$$

pri čemer velja $\mathcal{J}^{0i} = K_i$ in $\mathcal{J}^{ij} = \epsilon^{ijk} J_k$, kjer ponovljeni rimski indeksi označujejo vsoto po $\{1,2,3\}$ in je ϵ^{ijk} t.i. Levi-Civitajev simbol. Vsak element $\mathfrak{so}^+(1,3)$ lahko razvijemo po bazi $\mathcal{J}^{\rho\sigma}$. Povedano drugače, vsako infinitezimalno Lorentzovo transformacijo lahko zapišemo kot linearno kombinacijo generatorjev rotacij in potiskov,

$$\omega^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2}\Omega_{\rho\sigma}(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^{\mu}{}_{\nu},$$

kjer $\Omega_{\rho\sigma}$, spet s parom antisimetričnih indeksov $[\rho\sigma]$, označuje parametre Lorentzove transformacije. Hitro lahko preverimo, da v izbrani notaciji (4) rotacije opišemo s parametri $\Omega_{ij} = -\epsilon_{ijk}\varphi^k$, kjer φ^k predstavlja kot rotacije okoli osi x^k, potiske pa z $\Omega_{0i} = -\chi_i$. Lorentzovo transformacijo oziroma element $\mathrm{SO}^+(1,3)$ nato dobimo z eksponenciranjem,

$$\Lambda = \exp\left(\frac{1}{2}\Omega_{\rho\sigma}\mathcal{J}^{\rho\sigma}\right).$$

Lahko preverimo, da baza Lorentzove algebre $\mathfrak{so}^+(1,3)$ zadošča komutacijskim relacijam

$$[\mathcal{J}^{\rho\sigma}, \mathcal{J}^{\tau\nu}] = \eta^{\sigma\tau}\mathcal{J}^{\rho\nu} - \eta^{\rho\tau}\mathcal{J}^{\sigma\nu} + \eta^{\rho\nu}\mathcal{J}^{\sigma\tau} - \eta^{\sigma\nu}\mathcal{J}^{\rho\tau}, \tag{5}$$

oziroma ekvivalentno,

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, K_j] = \epsilon_{ijk}K_k, \quad [K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk}J_k.$$

Opazimo, da so generatorji rotacij zaprti za oklepaj. Od tod sledi, da je rotacijska grupa SO(3) Liejeva podgrupa $SO^+(1,3)$. Po drugi strani iz skrajno desne enakosti in definicije 13 sklepamo, da generatorji potiskov K_i sami zase ne določajo Liejeve podalgebre v $\mathfrak{so}(1,3)$, od koder posebej sledi, da množica potiskov $\{e^{-\chi K_i} \mid \chi \in \mathbb{R}, i = 1,2,3\}$ ni Liejeva podgrupa matrične Liejeve grupe $\mathrm{SO}^+(1,3)$.

4. Spinorska upodobitev Lorentzove grupe

4.1 Zgodovinsko ozadje Diracove enačbe

Leta 1927 je na Solvayevi konferenci stekel pogovor med Nielsom Bohrom in Paulom Diracom. Kasneje je Dirac o tem komentiral sledeče:

> *[...] I remember when I was in Copenhagen, that Bohr asked me what I was working on and I told him I was trying to get a satisfactory relativistic theory of the electron, and Bohr said, "But Klein and Gordon have already done that!" That answer first rather disturbed me. Bohr seemed satisfied with Klein's solution, but I was not because of the negative probabilities that it led to. I just kept on with it, worrying about getting a theory which would have only positive probabilities. [4]*

Bohrova izjava se navezuje na Klein–Gordonovo enačbo

$$(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\,\Phi = 0, \tag{6}$$

kjer je Φ kompleksno skalarno polje. Težava, o kateri govori Dirac, je sledeča: če izvrednotimo

$$\begin{aligned} 0 = \Phi^*(6) - \Phi(6)^* &= (\Phi^*\partial_t^2\Phi - \Phi\partial_t^2\Phi^*) - (\Phi^*\nabla^2\Phi - \Phi\nabla^2\Phi^*) = \\ &= \partial_t(\Phi^*\partial_t\Phi - \Phi\partial_t\Phi^*) - \nabla\cdot(\Phi^*\nabla\Phi - \Phi\nabla\Phi^*), \end{aligned}$$

in to enačbo pomnožimo z $\frac{i}{2m}$, dobimo

$$\frac{i}{2m}\partial_t(\Phi^*\partial_t\Phi - \Phi\partial_t\Phi^*) + \nabla\cdot\overbrace{\frac{1}{2im}(\Phi^*\nabla\Phi - \Phi\nabla\Phi^*)}^{\vec{j}} = 0. \tag{7}$$

Če Φ interpretiramo kot valovno funkcijo in (6) kot relativistično valovno enačbo, v drugem členu (7) prepoznamo izraz za gostoto verjetnostnega toka. Tako bi (7) želeli interpretirati kot kontinuitetno enačbo za verjetnostno gostoto, $\partial_t\rho + \nabla\cdot\vec{j} = 0$, kot to storimo v primeru Schrödingerjeve enačbe. Prvi člen torej prepoznamo kot časovni odvod verjetnostne gostote,

$$\rho = \frac{i}{2m}(\Phi^*\partial_t\Phi - \Phi\partial_t\Phi^*). \tag{8}$$

Opazimo, da ρ v tem primeru ni nujno nenegativna funkcija, na kar se je navezoval Dirac s stavkom *„the negative probabilities that it led to"*. Izkaže se, da je v tem primeru ρ ustrezno pojmovati ne kot gostoto verjetnosti za detekcijo delca, temveč kot gostoto naboja skalarnega polja Φ.

Dirac je sklepal, da Klein–Gordonova enačba lahko vodi do negativne verjetnostne gostote, ker (8) vsebuje časovni odvod funkcije Φ. To pa je posledica dejstva, da Φ zadošča diferencialni enačbi (6), ki je drugega reda v času. Tako je želel najti drugo valovno enačbo, ki bi bila prvega reda v času, torej oblike kot nerelativistična Schrödingerjeva enačba,

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi, \tag{9}$$

kjer bi bila ψ valovna funkcija in H neka funkcija krajevnih odvodov. Enačba naj bi bila tudi relativistična, zato je Dirac želel ohraniti relativistično zvezo $E^2 = \vec{p}\cdot\vec{p} + m^2$. Če naj sploh obstaja možnost, da je enačba Lorentzovo invariantna, pa mora biti zaradi linearnosti v časovnih odvodih linearna tudi v krajevnih odvodih. Tako je Dirac predpisal

$$H^2 = (\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z + \beta m)^2 = \vec{p}\cdot\vec{p} + m^2 \tag{10}$$

za neke konstantne α_x, α_y, α_z, β. Ko enakost (10) razpišemo, takoj dobimo zahteve

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1, \quad \{\alpha_i, \alpha_j\} := \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}, \quad \{\alpha_i, \beta\} = 0, \tag{11}$$

za vse $i \in \{1, 2, 3\}$, od koder sklepamo, da morajo biti α_i in β matrike. V fiziki je znano, da zvezi $\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}$ zadoščajo Paulijeve matrike,

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zanje namreč velja

$$[\sigma_i, \sigma_j] = \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}I.$$

Izkaže pa se, da ne obstajajo take štiri 2×2 niti 3×3 matrike α_i in β, za katere bi veljale zgornje zahteve (11). Po nekaj ugibanja in poskušanja najdemo primer takih (neenolično določenih) bločnih matrik,

$$\beta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \quad \alpha_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix},$$

in če celoten lineariziran izraz za H iz enačbe (10) vstavimo v Schrödingerjevo enačbo (9), dobimo

$$i\partial_t\psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)\psi.$$

Če v ta izraz vstavimo operator gibalne količine $\vec{p} = -i\nabla$ iz kvantne mehanike, vidimo, da velja

$$(i\partial_t + i\vec{\alpha} \cdot \nabla - \beta m)\psi = 0. \tag{12}$$

Za lepši zapis lahko definiramo še $\gamma^0 := \beta$ in $\gamma^i := -\beta\alpha_i$, torej

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

ter $\gamma^\mu = \eta^{\mu\nu}\gamma_\nu$. Če enačbo (12) sedaj pomnožimo z leve z β, jo lahko elegantno zapišemo kot

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0. \tag{14}$$

To je Diracova enačba. Četverec ψ kompleksnih funkcij na prostoru Minkowskega imenujemo *Diracov spinor* oziroma spinorsko polje. Če želimo ψ interpretirati kot valovno funkcijo, se izkaže, da moramo prvi par komponent tega četverca interpretirati kot valovno funkcijo delca, drugi par pa kot valovno funkcijo antidelca.

Lahko preverimo, da za matrike γ^μ velja

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}I, \tag{15}$$

kar pomeni, da matrike γ^μ tvorijo upodobitev t.i. *Cliffordove algebre*. Kot že rečeno: izkaže se, da ne obstajajo štiri kompleksne 2 x 2 ali 3 x 3 matrike, ki bi zadoščale zgornji zvezi. Najpreprostejšo (in torej nerazcepno) upodobitev te algebre tako tvorijo 4 x 4 matrike. Če jih izberemo kot v (13), temu pravimo *Diracova upodobitev*, pogosto pa se uporablja tudi t.i. *Weylovo* oz. *kiralno upodobitev*,

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

To bomo v naslednjih poglavjih uporabili za konstrukcijo spinorske upodobitve. Seveda lahko v splošnem tvorimo še mnoge druge upodobitve $\tilde{\gamma}^\mu$ npr. že kot $V\gamma^\mu V^{-1}$, kjer je V poljubna obrnljiva matrika in γ^μ kot v (13) oz. (16). Izkaže pa se, da do te ekvivalence natančno obstaja natanko ena nerazcepna upodobitev Cliffordove algebre (15).

4.2 Diracova enačba in spinorska upodobitev Lorentzove algebre

Zanima nas, kako se četverec kompleksnih funkcij oziroma polje ψ, ki nastopa v Diracovi enačbi, transformira pri Lorentzovih transformacijah. V splošnem se lahko polje transformira kot

$$\phi^a(x) \mapsto \Pi(\Lambda)^a{}_b\, \phi^b(\Lambda^{-1}x), \tag{17}$$

kjer je Π *upodobitev* Lorentzove grupe, kar pomeni, da velja

$$\Pi(\Lambda_1)\Pi(\Lambda_2) = \Pi(\Lambda_1\Lambda_2)$$

in torej $\Pi(\Lambda^{-1}) = \Pi(\Lambda)^{-1}$ ter $\Pi(I) = I$. V transformaciji (17) $\Lambda^{-1}x$ zagotovi, da polje izvrednotimo v isti točki prostora kot pred transformacijo, faktor $\Pi(\Lambda)^a{}_b$ pa predstavlja delovanje Lorentzove grupe na interne komponente polja, npr. spinorske indekse ali vektorske komponente.

Zahtevamo, da je Diracova enačba kot relativistična enačba invariantna na Lorentozve transformacije. To pomeni: če je ψ rešitev Diracove enačbe, mora biti tudi Lorentzovo transformirano polje ψ' rešitev iste enačbe. Denimo torej, da se pri poljubni Lorentzovi transformaciji $\Lambda \in \mathrm{SO}^+(1,3)$ spinorsko polje transformira kot $\psi(x) \mapsto \psi'(x) = S\psi(\Lambda^{-1}x)$, kjer je $S = \Pi(\Lambda)$. Če označimo $y := \Lambda^{-1}x$, lahko pišemo

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial y^\nu} = [\Lambda^{-1}]^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial y^\nu}. \tag{18}$$

Če ψ pred transformacijo zadošča Diracovi enačbi,

$$\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right)\psi(x) = 0, \tag{19}$$

potem po transformaciji polja ψ dobimo

$$\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right) S\psi(\Lambda^{-1}x) = 0, \tag{20}$$

kar lahko s pomočjo zveze (18) prepišemo kot

$$\begin{aligned}\left(i\gamma^\mu[\Lambda^{-1}]^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial y^\nu} - m\right) S\psi(y) &= SS^{-1}\left(i\gamma^\mu[\Lambda^{-1}]^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial y^\nu} - m\right) S\psi(y) \\ &= S\left(iS^{-1}\gamma^\mu S[\Lambda^{-1}]^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial y^\nu} - m\right)\psi(y) = 0.\end{aligned}$$

Če naj torej Lorentzovo transformirano polje $\psi'(x) = S\psi(\Lambda^{-1}x)$ zadošča enačbi (19), od tod vidimo, da mora veljati $S^{-1}\gamma^\mu S[\Lambda^{-1}]^\nu{}_\mu = \gamma^\nu$ oziroma, ekvivalentno,

$$S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu. \tag{21}$$

Denimo, da je Λ oblike

$$\Lambda = \exp(\mathcal{X}) = \exp\left(\frac{1}{2}\Omega_{\rho\sigma}\mathcal{J}^{\rho\sigma}\right),$$

za nek $\mathcal{X} \in \mathfrak{so}^+(1,3)$, ki ga razpišemo po bazi $\mathcal{J}^{\rho\sigma}$, tj. generatorjih rotacij in potiskov. Iz posledice 27 sledi, da lahko iz upodobitve Lorentzove grupe Π pripadajočo upodobitev Liejeve algebre dobimo kot

$$\pi(\mathcal{X}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Pi\left(e^{t\mathcal{X}}\right).$$

Če v zvezo (21) vstavimo $\Lambda = \exp(t\mathcal{X})$ in $S = \Pi(\Lambda) = \Pi\left(\exp(t\mathcal{X})\right)$ ter obe strani enakosti odvajamo pri $t = 0$, pri čemer na levi odvajamo produkt in upoštevamo, da je $S^{-1} = \Pi\left(\exp(-t\mathcal{X})\right)$ in $\pi(-\mathcal{X}) = -\pi(\mathcal{X})$, dobimo

$$-\pi(\mathcal{X})\gamma^\mu + \gamma^\mu\pi(\mathcal{X}) = \mathcal{X}^\mu_{\ \nu}\gamma^\nu. \tag{22}$$

Ko vstavimo še razvoj po bazi, $\mathcal{X} = \frac{1}{2}\Omega_{\rho\sigma}\mathcal{J}^{\rho\sigma}$ in pripadajočo upodobitev $\pi(\mathcal{X}) = \frac{1}{2}\Omega_{\rho\sigma}\pi(\mathcal{J}^{\rho\sigma})$, se (22) prepiše v

$$-\left[\mathcal{S}^{\rho\sigma}, \gamma^\mu\right] = (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu_{\ \nu}\gamma^\nu, \tag{23}$$

kjer smo uvedli $\mathcal{S}^{\rho\sigma} := \pi(\mathcal{J}^{\rho\sigma})$. Z uporabo enakosti (4) vidimo, da je desna stran enaka

$$(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu_{\ \nu}\gamma^\nu = (\eta^{\rho\mu}\delta^\sigma_{\ \nu} - \eta^{\sigma\mu}\delta^\rho_{\ \nu})\gamma^\nu = \eta^{\rho\mu}\gamma^\sigma - \eta^{\sigma\mu}\gamma^\rho.$$

Enačbi (23), in posledično Lorentzovi invariantnosti Diracove enačbe, torej zadostimo, če najdemo upodobitev Lorentzove algebre π, da $\mathcal{S}^{\rho\sigma}$ zadoščajo sledeči zvezi

$$[\mathcal{S}^{\rho\sigma}, \gamma^\mu] = \eta^{\sigma\mu}\gamma^\rho - \eta^{\rho\mu}\gamma^\sigma.$$

Z upoštevanjem lastnosti $\{\gamma^\rho, \gamma^\sigma\} = 2\eta^{\rho\sigma}I$ Cliffordove algebre (15) in nekaj poskusi lahko hitro ugotovimo, da zvezi zadosti

$$\mathcal{S}^{\rho\sigma} = \left\{\begin{matrix} \frac{1}{2}\gamma^\rho\gamma^\sigma & \rho \neq \sigma \\ 0 & \rho = \sigma \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\gamma^\rho\gamma^\sigma - \frac{1}{2}\eta^{\rho\sigma} = \frac{1}{4}[\gamma^\rho, \gamma^\sigma]. \tag{24}$$

Trditev 30. *Preslikava* $\pi\colon \mathfrak{so}^+(3,1) \to \mathfrak{gl}(4)$*, določena s predpisom na bazi*

$$\pi(\mathcal{J}^{\mu\nu}) \equiv \mathcal{S}^{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

je upodobitev Liejeve algebre Lorentzove grupe, tj. za vse $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathfrak{so}^+(1,3)$ *je* $\pi([\mathcal{X}, \mathcal{Y}]) = [\pi(\mathcal{X}), \pi(\mathcal{Y})]$.

Dokaz. Zahtevano enakost zadošča preveriti na bazi, saj so vsi ostali elementi linearne kombinacije baznih, komutator pa je bilinearen. Ker za bazo $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ veljajo komutacijske relacije (5), moramo torej preveriti, da je

$$[\mathcal{S}^{\mu\nu}, \mathcal{S}^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho}\mathcal{S}^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}\mathcal{S}^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\mathcal{S}^{\nu\rho} - \eta^{\nu\sigma}\mathcal{S}^{\mu\rho}.$$

Za $\mu \neq \nu$ izračunamo

$$\begin{aligned} [\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\rho] &= \frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu, \gamma^\rho = \frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho - \frac{1}{2}\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu \\ &= \frac{1}{2}\gamma^\mu\{\gamma^\nu, \gamma^\rho\} - \frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu - \frac{1}{2}\{\gamma^\rho, \gamma^\mu\}\gamma^\nu + \frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu \\ &= \gamma^\mu\eta^{\nu\rho} - \gamma^\nu\eta^{\rho\mu}. \end{aligned}$$

Od tod za $\rho \neq \sigma$ sledi

$$\begin{aligned} [\mathcal{S}^{\mu\nu}, \mathcal{S}^{\rho\sigma}] &= \frac{1}{2}[\mathcal{S}^{\mu\nu}, \gamma^\rho\gamma^\sigma] = \frac{1}{2}[S^{\mu\nu}, \gamma^\rho]\gamma^\sigma + \frac{1}{2}\gamma^\rho[S^{\mu\nu}, \gamma^\sigma] \\ &= \frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\sigma\eta^{\nu\rho} - \frac{1}{2}\gamma^\nu\gamma^\sigma\eta^{\rho\mu} + \frac{1}{2}\gamma^\rho\gamma^\mu\eta^{\nu\sigma} - \frac{1}{2}\gamma^\rho\gamma^\nu\eta^{\sigma\mu}. \end{aligned}$$

Sedaj uporabimo izraz (24), da prepišemo $\gamma^\mu\gamma^\sigma = 2\mathcal{S}^{\mu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}$ in od tod dobimo

$$[\mathcal{S}^{\mu\nu}, \mathcal{S}^{\rho\sigma}] = \mathcal{S}^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho} - \mathcal{S}^{\nu\sigma}\eta^{\rho\mu} + S^{\rho\mu}\eta^{\nu\sigma} - \mathcal{S}^{\rho\nu}\eta^{\sigma\mu}.$$ ∎

4.3 Spinorska upodobitev in transformacije spinorskega polja

Iz ugotovitev prejšnjega poglavja vidimo, da se pri Lorentzovi transformaciji spinorsko polje transformira kot

$$\psi^\alpha(x) \mapsto S^\alpha_{\ \beta}\, \psi^\beta(\Lambda^{-1}x),$$

kjer je

$$\Lambda = \exp\left(\frac{1}{2}\Omega_{\rho\sigma}\mathcal{J}^{\rho\sigma}\right),$$

$$S = \Pi(\Lambda) = \exp\left(\pi\left(\frac{1}{2}\Omega_{\rho\sigma}\mathcal{J}^{\rho\sigma}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\Omega_{\rho\sigma}\pi\left(\mathcal{J}^{\rho\sigma}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\Omega_{\rho\sigma}\mathcal{S}^{\rho\sigma}\right). \tag{25}$$

Tako dobljene 4×4 matrike S imenujemo *spinorska upodobitev* Lorentzove grupe. Podrobneje si oglejmo, kako se spinorsko polje transformira pri rotacijah in potiskih. Za matrike γ^μ bomo uporabljali Weylovo oz. kiralno upodobitev, definirano v (16).

4.3.1 Potiski

V poglavju 3.2 smo videli, da potiskom ustrezajo generatorji $\mathcal{J}^{0i}$, parametre pa pri tem zapišemo kot $\Omega_{0i} = -\chi_i$, kjer $\chi_i = \operatorname{arctanh}(v_i/c)$ imenujemo rapidnost. Za spinorsko upodobitev v primeru potiskov iz enačbe (24) izračunamo

$$\mathcal{S}^{0i} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix},$$

kjer smo matrike γ^μ predstavili v kiralni upodobitvi. Od tod sledi

$$S = \exp\left(\frac{1}{2}\Omega_{\rho\sigma}\mathcal{S}^{\rho\sigma}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\chi_i\begin{bmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e^{\vec{\chi}\cdot\vec{\sigma}/2} & 0 \\ 0 & e^{-\vec{\chi}\cdot\vec{\sigma}/2} \end{bmatrix}. \tag{26}$$

4.3.2 Rotacije

Generatorje rotacij predstavljajo $\mathcal{J}^{ij}$, parametre pa zapišemo kot $\Omega_{ij} = -\epsilon_{ijk}\varphi^k$, npr. $\Omega_{12} = -\varphi^3$. Za spinorsko upodobitev iz enačbe (24) za $i \neq j$ dobimo $\mathcal{S}^{ij} = \frac{1}{2}\gamma^i\gamma^j$, kar v kiralni upodobitvi ustreza

$$\mathcal{S}^{ij} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{bmatrix} = -\frac{i}{2}\epsilon^{ijk}\begin{bmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{bmatrix}.$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned} S &= \exp\left(\frac{1}{2}\Omega_{\rho\sigma}\mathcal{S}^{\rho\sigma}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\varphi^k\mathcal{S}^{ij}\right) = \exp\left(\frac{i}{4}\epsilon_{ijk}\epsilon^{ijl}\varphi^k\begin{bmatrix} \sigma_l & 0 \\ 0 & \sigma_l \end{bmatrix}\right) \\ &= \exp\left(\frac{i}{2}\varphi^k\begin{bmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e^{i\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}/2} & 0 \\ 0 & e^{i\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}/2} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{27}$$

kjer smo upoštevali $\epsilon_{ijk}\epsilon^{ijl} = 2\delta^l_m$ in je δ^l_m Kroneckerjeva delta.

Oglejmo si poseben primer, in sicer, kako se spinorsko polje transformira pri rotaciji za 2π, npr. okoli osi $x^3 = z$. V tem primeru je $\vec{\varphi} = (0, 0, 2\pi)$ in imamo

$$S = \begin{bmatrix} e^{i\pi\sigma_3} & 0 \\ 0 & e^{i\pi\sigma_3} \end{bmatrix} = -I,$$

kjer smo upoštevali, da je $\sigma_3 = \sigma_z = \operatorname{diag}(1, -1)$, in izračunali

$$e^{i\pi\sigma_3} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^\infty \frac{(i\pi)^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^\infty \frac{(-i\pi)^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Izračunamo še
$$\Lambda = \exp\left(\frac{1}{2}\Omega_{\rho\sigma}\mathcal{J}^{\rho\sigma}\right) = \exp\left(-2\pi\mathcal{J}^{12}\right) = \exp\left(-2\pi J^3\right) = I,$$
kjer smo pri eksponenciranju uporabili izračun (3). Ugotovimo torej, da se pri rotaciji 2π spinorsko polje transformira kot
$$\psi(x) \mapsto S\psi(\Lambda^{-1}x) = -\psi(x).$$
Zanimivo. To se razlikuje od transformacije poljubnega vektorskega polja V, ki je po Lorentzovi transformaciji enako $\Lambda V(\Lambda^{-1}x)$ in zato v primeru rotacije za 2π dobimo $V(x) \mapsto V(x)$.

4.4 Spin grupa Lorentzove grupe

Pozoren bralec je morda opazil, da rotacija za 2π stopinj okoli osi z določa transformacijo $\Lambda = I$, to pa lahko parametriziramo tudi kot rotacijo za $\vec{\varphi} = (0, 0, 0)$. Če še enkrat izračunamo S in tokrat Λ predstavimo kot $\exp(0)$ namesto $\exp\bigl(-2\pi\mathcal{J}^{12}\bigr)$, dobimo
$$S = \begin{bmatrix} e^{i\cdot 0\cdot\sigma_3} & 0 \\ 0 & e^{i\cdot 0\cdot\sigma_3} \end{bmatrix} = I.$$
Torej predpis (25) za upodobitev Π sploh ni dobro definiran. Problem ni omejen le na rotacijo za 2π. Če namreč poljuben $\Lambda \in \mathrm{SO}(1,3)$ predstavimo kot eksponent
$$\Lambda = \exp\left(\frac{1}{2}\Omega_{\rho\sigma}\mathcal{J}^{\rho\sigma}\right),$$
potem sprememba katerega koli od parametrov Ω_{ij} za 2π ne spremeni matrike Λ, lahko pa izračunamo, da se matrika $S \equiv \Pi(\Lambda)$ pri tem spremeni za faktor -1. Torej $S \equiv \Pi(\Lambda)$ ni odvisna le od transformacije Λ, ampak tudi od izbire parametrov Ω_{ij}, s katerimi zapišemo (isto) transformacijo Λ. To pomeni, da dobimo različne matrike S, odvisno od izbire elementa Liejeve algebre, z eksponenciranjem katerega dobimo dano transformacijo Λ.

Razlog za to odvisnost je topološki. V splošnem za poljubno upodobitev ϕ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ namreč ne obstaja upodobitev Φ matrične Liejeve grupe G, za katero bi veljalo $\Phi(e^{\mathcal{X}}) = e^{\phi(\mathcal{X})}$, kot smo komentirali v opombi 28. Vemo, da ta zagotovo obstaja le, če je grupa G enostavno povezana, kot smo navedli v izreku 29. Izkaže se, da $\mathrm{SO}^+(1,3)$ ni enostavno povezana in da dejansko ne obstaja upodobitev $\Pi\colon \mathrm{SO}^+(1,3) \to \mathrm{GL}(4,\mathbb{R})$, za katero bi veljalo $\Pi(e^{\mathcal{X}}) = e^{\pi(\mathcal{X})}$, kjer je π upodobitev $\mathfrak{so}(1,3)$ iz trditve 30. Nadalje, obstaja surjektiven homomorfizem Liejevih grup, t.i. *spin homomorfizem*,
$$\mathrm{Spin}\colon \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}^+(1,3)$$
z jedrom $\ker(\mathrm{Spin}) = \{I, -I\} \cong \mathbb{Z}_2$. To pomeni, da preslikava Spin v vsak element Λ grupe $\mathrm{SO}^+(1,3)$ slika natanko dva elementa: A in $-A$, za nek $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Pravimo, da je $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ *dvolistni krov* $\mathrm{SO}^+(1,3)$. Imamo torej izomorfizem
$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2 \cong \mathrm{SO}^+(1,3),$$
zato je $\mathrm{SO}^+(1,3)$ *lokalno* izomorfna $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Od tod sledi, da je Liejeva algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ izomorfna Liejevi algebri $\mathfrak{so}(1,3)$. Z upoštevanjem tega izomorfizma lahko upodobitev π algebre $\mathfrak{so}(1,3)$ iz trditve 30 obravnavamo kot upodobitev algebre $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Izkaže se, da je grupa $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ enostavno povezana, zato po izreku 29 obstaja natanko ena upodobitev $\Gamma\colon \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$, za katero je $\Gamma(e^{\mathcal{X}}) = e^{\pi(\mathcal{X})}$ za vse $\mathcal{X} \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, kar prikazuje spodnji diagram.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{GL}(4,\mathbb{R}) & \mathrm{SO}^+(1,3) \arrow[l, phantom] & \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \arrow[l, "\mathrm{Spin}"] \arrow[ll, bend right, "\Gamma"'] \\
\mathfrak{gl}(4,\mathbb{R}) \arrow[u, "\exp"] & \mathfrak{so}(1,3) \arrow[l, "\pi"'] \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, leftrightarrow, "\cong"] & \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \arrow[u, "\exp"']
\end{tikzcd}$$

Tako smo z enačbo (25), ob upoštevanju izomorfizma $\mathfrak{so}(1,3) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, dejansko določili upodobitev Γ Liejeve grupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, ki je oblike

$$\Gamma(A) := \begin{pmatrix} A & \\ & (A^\dagger)^{-1} \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Dejansko je preslikava Γ t.i. *spinorska upodobitev*, Liejevi grupi $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ pa pravimo *spin grupa* (ortohrone specialne) Lorentzove grupe in jo navadno označimo s $\mathrm{Spin}(1,3)$.

4.5 Diracovi in Weylovi spinorji

Standardno upodobitev grupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ na prostoru $\mathbb{C}^2$, tj. inkluzijo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ glede na standardno bazo $\mathbb{C}^2$, označimo z $D^{(1/2,0)}$. Imamo še njej *konjugirano dualno* upodobitev,

$$D^{(0,1/2)} \colon \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}), \quad D^{(0,1/2)}(A) := (A^\dagger)^{-1}.$$

To je res upodobitev, saj za vse $A, B \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ velja $((AB)^\dagger)^{-1} = (B^\dagger A^\dagger)^{-1} = (A^\dagger)^{-1}(B^\dagger)^{-1}$. Nadalje, upodobitvi $D^{(1/2,0)}$ in $D^{(0,1/2)}$ nista izomorfni. Res, če bi obstajala matrika $T \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$, da bi veljalo $TAT^{-1} = (A^\dagger)^{-1}$ za vse $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, bi od tod sledilo $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}((A^\dagger)^{-1})$ za vse $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. To pa na primer ne velja za matriko $A = \mathrm{diag}(2i, -i/2)$. Iz predpisa (28) vidimo, da je spinorska upodobitev torej direktna vsota dveh nerazcepnih upodobitev,

$$\Gamma = D^{(1/2,0)} \oplus D^{(0,1/2)}.$$

To je tudi očitno v kiralni upodobitvi γ^μ, v kateri so matrike spinorskih transformacij S, ki ustrezajo rotacijam in potiskom, (27) in (26), bločno diagonalne. Torej že od tod vidimo, da je spinorska upodobitev razcepna in jo lahko torej razstavimo na dve upodobitvi, ki delujeta na dvokomponentne spinorje. V kiralni upodobitvi lahko zaradi bločno diagonalne oblike matrik S torej zapišemo *Diracov spinor* ψ kar kot

$$\psi = \begin{bmatrix} u_+ \\ u_- \end{bmatrix},$$

kjer $u_\pm$ imenujemo *Weylova spinorja* oz. *kiralna spinorja*. Tako se dvo-komponetni spinor u_+ transformira glede na upodobitev $D^{(1/2,0)}$, u_- pa glede na $D^{(0,1/2)}$. Iz (27) in (26) vidimo, da se pri rotacijah transformirata na enak način,

$$u_\pm \mapsto e^{i\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}/2} u_\pm,$$

pri potiskih pa ravno nasprotno,

$$u_\pm \mapsto e^{\pm\vec{\chi}\cdot\vec{\sigma}/2} u_\pm.$$

V splošnem lahko izberemo kakšno drugo upodobitev γ^μ Cliffordove algebre (15) in tedaj S ni več nujno bločno diagonalna. Izkaže pa se, da lahko kljub temu na Lorentzovo invarianten način definiramo kiralna spinorja. To storimo tako, da najprej uvedemo matriko γ^5, in sicer kot

$$\gamma^5 := -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3.$$

Hitro lahko preverimo, da je $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ in $(\gamma^5)^2 = I$. Nadalje lahko od tod izračunamo, da je $[\mathcal{S}_{\mu\nu}, \gamma^5] = 0$, kjer je $\mathcal{S}_{\mu\nu} \equiv \pi(\mathcal{J}_{\mu\nu})$ in je π upodobitev Liejeve algebre (trditev 30). Od tod sledi, da se γ^5 transformira kot Lorentzov skalar, tj. je invariantna na Lorentzove transformacije. Lahko torej definiramo Lorentzovo invariantna projektorja

$$P_\pm = \frac{1}{2}(I \pm \gamma^5).$$

Iz lastnosti $(\gamma^5)^2 = I$ sledi, da sta to res projektorja, torej, da je ${P_+}^2 = P_+$ in ${P_-}^2 = P_-$ ter da sta komplementarna, v smislu, da velja, $P_+ P_- = 0$ in $P_+ + P_- = I$. V kiralni upodobitvi (16) dobimo

$$\gamma^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

od koder vidimo, da je $P_\pm \psi = u_\pm$. Sedaj lahko za splošno upodobitev Cliffordove algebre uporabimo matriko γ^5 oz. projektorja $P_\pm$, da definiramo kiralna dvo-komponentna spinorja

$$\psi_\pm = P_\pm \psi,$$

ki se transformirata glede na dve nerazcepni upodobitvi Lorentzove grupe (oziroma dejansko spin grupe Lorentzove grupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$), to je $D^{(1/2,0)}$ in $D^{(0,1/2)}$. Spinor ψ_+ navadno imenujemo desnoročni spinor in označimo s ψ_R, ψ_- pa levoročni spinor ter označimo s ψ_L. Hitro lahko vidimo, da sta $\psi_\pm$ lastna vektorja matrike γ^5 z lastnima vrednostima $+1$ in -1, tj. $\gamma^5 \psi_\pm = \pm\psi_\pm$. Pravimo, da ima ψ_R *kiralnost* enako 1, ψ_L pa kiralnost -1.

4.6 Nerazcepne upodobitve $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$

Brez izpeljave omenimo še, da je vsaka končno-razsežna nerazcepna upodobitev Liejeve grupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ izomorfna upodobitvi $D^{(j_1,j_2)}$ za neka $j_1, j_2 \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2 \ldots\}$, kjer je $D^{(j_1,j_2)} \colon \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(S^{(j_1,j_2)})$ definirana kot zožitev upodobitve

$$\overbrace{D^{(1/2,0)} \otimes \ldots \otimes D^{(1/2,0)}}^{2j_1} \otimes \overbrace{D^{(0,1/2)} \otimes \ldots \otimes D^{(0,1/2)}}^{2j_2}, \tag{29}$$

na vektorski prostor tenzorjev, simetričnih na prvih $2j_1$ in zadnjih $2j_2$ mestih,

$$S^{(j_1,j_2)} := \mathrm{Sym}(\overbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}^2}^{2j_1}) \otimes \mathrm{Sym}(\overbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}^2}^{2j_2}).$$

Dimenzija te upodobitve je enaka

$$\dim_{\mathbb{C}} S^{(j_1,j_2)} = \binom{2j_1+1}{2j_1}\binom{2j_2+1}{2j_2} = (2j_1+1)(2j_2+1).$$

Število $j_1 + j_2$ imenujemo *spin upodobitve* $D^{(j_1,j_2)}$. Lahko preverimo, da zaradi števila $2j_1 + 2j_2$ faktorjev v tenzorskem produktu (29) velja enakost:

$$D^{(j_1,j_2)}(-I) = (-1)^{2j_1+2j_2} I,$$

pri čemer pa je $\mathrm{Spin}(-I) = I$ in $\mathrm{Spin}(I) = I$. Torej lastnost, da pri transformaciji, ki ustreza rotaciji za 2π, polje oziroma funkcija pridobi predznak -1, kar smo za spinorje videli v poglavju 4.3.2 , velja za vse upodobitve grupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ z $2j_1 + 2j_2 \in \{1, 3, 5 \ldots\}$, tj. za vse upodobitve s spinom $j_1 + j_2 \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots\right\}$.

5. Zaključek

V začetku smo uvedli oziroma ponovili osnove matričnih Liejevih grup in njihovih upodobitev ter se še posebej posvetili Lorentzovi grupi. Ugotovili smo, da spinorska upodobitev naravno izhaja iz zahteve po Lorentzovi invariantnosti Diracove enačbe, ter podrobneje preučili njene lastnosti. Uvedli smo *spin grupo* Lorentzove grupe in *spin homomorfizem* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}^+(1,3)$. S tem smo vzpostavili osnovo za razumevanje transformacij spinorskih polj, ki je ključnega pomena v kvantni teoriji polja in pri opisu fermionov nasploh.

LITERATURA

[1] Brian C. Hall, *Lie groups, lie algebras, and representations*, 2nd ed., Springer, 2015.
[2] Janez Mrčun, *Liejeve grupe*, 2013, [Ogled: 10. 12. 2024].
[3] David Tong, *Quantum field theory*, 2006, [Ogled: 10. 12. 2024].
[4] Steven Weinberg, *The quantum theory of fields: Volume 1, foundations*, Cambridge University Press, 2005.
[5] Lewis H. Ryder, *Quantum field theory*, Cambridge University Press, 1996.
[6] Michael E. Peskin, *An introduction to quantum field theory*, CRC Press, 2018.
[7] T. Bröcker and T. tom Dieck, *Representations of compact lie groups*, Springer, 2013.
[8] Gregory L Naber, *The geometry of minkowski spacetime*, Springer New York, New York, 2012.