GOLDSTONEOV TEOREM

LARA KRAŠOVEC

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Goldstoneov teorem igra ključno vlogo pri razumevanju spontanega zloma simetrije v kvantni teoriji polja. Na njegove posledice naletimo tudi v sistemih kondenzirane snovi, kot so superfluidi in feromagneti. Osnovna ideja teorema je preprosta: pri spontanem zlomu zvezne simetrije se v sistemu pojavijo brezmasni Goldstoneovi bozoni. V članku po kratkem pregledu definicij sledi natančnejša formulacija Goldstoneovega teorema. Predstavljena sta dva dokaza, prvi v kontekstu klasične, drugi pa kvantne teorije polja. Na koncu je navedenih nekaj primerov uporabe Goldstoneovega teorema, ki nakazujejo na potrebo po njegovih posplošitvah.

GOLDSTONE THEOREM

The Goldstone theorem plays a crucial role in understanding spontaneous symmetry breaking in quantum field theory. Its implications are also found in condensed matter systems, such as superfluids and ferromagnets. The basic idea of the theorem is simple: spontaneous breaking of a continuous symmetry implies the existence of massless Goldstone bosons. In the article, after a brief review of definitions, a more precise formulation of the Goldstone theorem follows. Two proofs are presented, the first in the context of classical field theory and the second in quantum field theory. Finally, several examples of the application of the Goldstone theorem are provided, indicating the need for its generalizations.

1. Kratek pregled definicij

V nadaljevanju se bomo sklicevali na različne tipe simetrij, ki so pojasnjeni v naslednjih odsekih. Ukvarjali se bomo predvsem z globalnimi zveznimi simetrijami in njihovim spontanim zlomom.

Simetrijo določene teorije oziroma sistema lahko obravnavamo v kontekstu simetrijske grupe vseh transformacij, na katere je sistem invarianten.

1.1 Diskretne in zvezne simetrije

Zvezne simetrije lahko v nasprotju z *diskretnimi* opišemo z zveznimi grupami, ki so parametrizirane z zveznim parametrom. V naslednjih poglavjih bomo zato imeli v mislih Liejeve grupe. Obravnavali bomo predvsem sisteme, ki so invariantni na transformacije polja ϕ:

$$\phi \to \phi' = e^{i\varepsilon^i T^i}\phi, \tag{1}$$

kjer so T^i generatorji grupe, ki zadoščajo Liejevi algebri s strukturnimi konstantami C^{ijk}:

$$[T^i,\, T^j] = iC^{ijk}T^k.$$

Z razvojem transformacije (1) za majhne grupne parametre ε^i dobimo:

$$\phi' \approx \phi + i\varepsilon^i T^i \phi.$$

Primer diskretne simetrije je simetrija na zrcaljenje $\phi \to -\phi$. Goldstoneov teorem se nanaša zgolj na zvezne simetrije; zlom diskretne simetrije ne pomeni pojava Goldstoneovih bozonov.

1.2 Globalne in lokalne simetrije

- *Globalne simetrije* opišemo s parametrom, ki je za vsako točko prostor-časa enak: $\varepsilon \neq \varepsilon(x^\mu)$,
- v primeru *lokalnih simetrij* pa je parameter funkcija koordinat in torej deluje lokalno: $\varepsilon = \varepsilon(x^\mu)$.

Standardni model v fiziki osnovnih delcev temelji na zahtevi po t.i. umeritveni invarianci – invarianci pod lokalnimi transformacijami, zato lokalne simetrije imenujemo tudi *umeritvene simetrije.* V takšnih umeritvenih teorijah vsakemu generatorju umeritvene simetrijske grupe ustreza (vektorsko) *umeritveno polje*: gluone npr. lahko tako povežemo z osmimi generatorji $\mathrm{SU}(3)_{barva}$.

1.3 Interne simetrije in simetrije prostor-časa

Z invarianco sistema pravzaprav mislimo invarianco *akcije*, ki sistem opisuje. Ta je definirana kot

$$S = \int d^4x \mathcal{L}, \tag{2}$$

kjer je $\mathcal{L}$ Lagrangeeva gostota – v nadaljevanju Lagrangian. Tudi če ta ne ostane nespremenjen pri določeni transformaciji, to ne spremeni nujno akcije sistema. Če lahko spremembo Lagrangiana zapišemo kot totalni odvod $\Delta\mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu$, bo tak člen v izrazu (2) zaradi robnih pogojev ob integraciji izničen in bo akcija invariantna, čeprav Lagrangian ni.

Lagrangian je v teoriji polja funkcija polj in njihovih odvodov, pri čemer so polja funkcije koordinat prostor-časa:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\phi_a, \partial_\mu \phi_a\right), \qquad \phi_a = \phi_a(x^\mu).$$

Tako ločimo:

- Če je sistem invarianten na transformacijo samega polja, npr. $\phi_a \to e^{i\varepsilon}\phi_a$, gre za *interno simetrijo.* V tem primeru je že sam Lagrangian invarianten in velja $F^\mu = 0$.
- Če je simetrijska transformacija sprememba koordinat, npr. v primeru translacije $x^\mu \to x^\mu + a^\mu$, temu rečemo *simetrija prostor-časa.*

1.4 Spontani in eksplicitni zlom simetrije

Do *spontanega zloma simetrije* pride, kadar stanja sistema z najnižjo energijo (osnovna stanja) ne odražajo simetrije celotnega sistema. V teoriji polja, za katero lahko definiramo Lagrangian

$$\mathcal{L} = T - V \tag{3}$$

s kinetičnim členom T, to pomeni, da lahko najdemo minimum potenciala V z nižjo simetrijo od celotnega potenciala. Stanjem, ki minimizirajo potencial, rečemo *vakuum.* Začetna simetrija Lagrangiana (3) je z razvojem v okolici tega minimuma prikrita. V podpoglavju 2.1.1 si bomo spontani zlom simetrije ogledali na konkretnem zgledu.

Nasprotno lahko simetrijo zlomimo tudi *eksplicitno* z dodajanjem členov v Lagrangian, ki pokvarijo začetno invarianco.

2. Goldstoneov teorem

Izrek 1 (Goldstoneov teorem). *Lorentzovo invariantna teorija polja za vsak spontano zlomljen generator globalne zvezne simetrije vsebuje brezmasni skalarni delec – Nambu-Goldstoneov bozon [1, 2].*

Goldstoneov teorem bomo najprej razložili s preprostim zgledom.

2.1 Goldstoneov teorem v klasični teoriji polja

2.1.1 Primer: Linearni model sigma

Obravnavamo Lagrangian linearnega modela sigma, ki vsebuje N realnih skalarnih polj ϕ^i; $i = 1, ..., N$; $N > 1$:

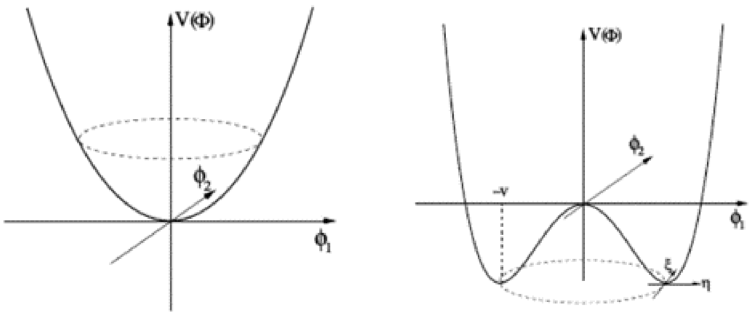
$$\mathcal{L} = \sum_i \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi^i\right)^2 + \frac{1}{2}\mu^2 \left(\phi^i\right)^2 - \frac{\lambda}{4} \left(\phi^i\right)^4 . \tag{4}$$

Pri tem sta μ in λ realna parametra potenciala $V(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2 \left(\phi^i\right)^2 + \frac{\lambda}{4}\left(\phi^i\right)^4$. Vsota po vseh poljih i je v tem in sledečih izrazih implicitna. Definiramo lahko $\phi = \left(\phi^1, ..., \phi^N\right)$ in torej $\left(\phi^i\right)^2 = \phi^T \phi$. Opazimo, da je Lagrangian (4) invarianten na rotacije med polji ϕ^i, kar ponazorimo z :

$$\phi^i \to R^{ij}\phi^j : \qquad \phi \to R\phi, \quad \phi^T \to \phi^T R^T \tag{5}$$

za poljubne ortogonalne $N \times N$ matrike R, ki tvorijo grupo $\mathcal{O}(N)$. Lagrangian ima torej $\mathcal{O}(N)$ simetrijo, ki jo bomo v nadaljevanju spontano zlomili z razvojem okrog minimuma potenciala [1].

Oblika potenciala je odvisna od parametrov μ^2 in λ. Smiselna je izbira $\lambda > 0$, saj v nasprotnem primeru v takšni teoriji ne bi obstajala spodnja meja za energijo sistema [3]. Spontani zlom simetrije je možen le za $\mu^2 > 0$, kar je ponazorjeno na sliki 1. Tedaj so v potencialu prisotni minimi, med katerimi lahko prehajamo s simetrijsko transformacijo. Pri tem se torej posamezen minimum ne preslika sam vase, kot bi se to zgodilo v primeru minimuma levega potenciala na sliki 1. Tako govorimo o minimumih, ki niso invariantni na transformacije pod $\mathcal{O}(N)$.



Slika 1. Potencial $V(\phi)$ v primeru dveh realnih skalarnih polj ϕ_1, ϕ_2 ($N = 2$), narisan za dve različni konfiguraciji parameterov: $\mu^2 < 0$ (levo) in $\mu^2 > 0$ (desno). Leva ponazoritev ne omogoča spontanega zloma simetrije, v desnem potencialu pa so prisotni minimumi, v okolici katerih ne opazimo enake simetrije, kot jo ima celoten potencial. Vir: [4].

Pri izbiri minimuma se lahko brez izgube splošnosti odločimo za

$$\phi_0 = (0, 0, ..., 0, v) ; \qquad v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}, \tag{6}$$

in pripravimo razvoj v okolici te konfiguracije polj:

$$\phi(x) = \Big(\pi^k(x), v + \sigma(x)\Big) ; \qquad k = 1, ..., N-1. \tag{7}$$

Izraz (7) vstavimo v Lagrangian (4) in dobimo razvoj Lagrangiana v okolici minimuma potenciala:

$$\mathcal{L} = \sum_k \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \pi^k\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \sigma\right)^2 - \mu^2\sigma^2 - \sqrt{\lambda}\mu\sigma^3 - \sqrt{\lambda}\mu\left(\pi^k\right)^2\sigma - \frac{\lambda}{4}\sigma^4 - \frac{\lambda}{2}\left(\pi^k\right)^2\sigma^2 - \frac{\lambda}{4}\left(\pi^k\right)^4 . \tag{8}$$

Lagrangian v tej obliki nima več opazne $\mathcal{O}(N)$ simetrije – invarianten je zgolj na rotacije med polji π^k. Začetna simetrija je bila spontano zlomljena zaradi možnosti izbire minimuma potenciala z neničelno *vakuumsko pričakovano vrednostjo (vev)* $\phi^N = v$ in ostala je le še podgrupa $\mathcal{O}(N-1)$. Hkrati opazimo tudi, da teorija sedaj poleg polja σ z maso $m = \sqrt{2}\mu$ vsebuje tudi $N-1$ brezmasnih skalarnih polj (π^k), kar lahko interpretiramo kot Nambu-Goldstoneove bozone, ki so se pojavili ob spontanem zlomu simetrije.

Število zlomljenih generatorjev lahko določimo kot razliko generatorjev začetne simetrije in simetrije po spontanem zlomu [1]. Iz pogoja ortogonalnosti sledi, da ima grupa $\mathcal{O}(N)$ $\frac{1}{2}N(N-1)$ generatorjev. Tako dobimo:

$$\#\text{zlom. gen.} = \#\text{gen. } \mathcal{O}(N) - \#\text{gen. } \mathcal{O}(N-1) = \frac{1}{2}N(N-1) - \frac{1}{2}(N-1)(N-2) = N-1, \quad (9)$$

kar točno ustreza številu brezmasnih skalarnih polj v teoriji po spontanem zlomu simetrije, tako kot to predvideva Goldstoneov teorem.

2.1.2 Skica dokaza Goldstoneovega teorema

Pred bolj poglobljeno obravnavo Goldstoneovega teorema v kontekstu kvantne teorije polja si lahko najprej ogledamo dokaz za primer klasične skalarne teorije, kar bo nazorneje pojasnilo do sedaj vpeljane koncepte.

Obravnavamo poljuben Lagrangian, ki je funkcija klasičnih skalarnih polj $\phi^a(x)$:

$$\mathcal{L} = (\text{odvodi}) - V(\phi). \quad (10)$$

Konstantno polje ϕ_0^a minimizira potencial, če velja

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \phi^a}\right)_{\phi_0^a} = 0. \quad (11)$$

Potencial razvijemo okrog minimuma, pri čemer člen, linearen v odvodu, po definiciji minimuma (11) odpade in preostane:

$$V(\phi) = V(\phi_0) + \frac{1}{2}(\phi-\phi_0)^a(\phi-\phi_0)^b\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^a\partial\phi^b}\right)_{\phi_0} + ... \quad (12)$$

Če tako definiran potencial vstavimo v začetni Lagrangian (10) in to primerjamo s Klein-Gordonovim Lagrangianom za skalarno polje ϕ z maso m,

$$\mathcal{L}_{KG} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2, \quad (13)$$

opazimo, da drugi (kvadratični) člen v (12) za $a = b$ predstavlja masni člen, ki ustreza polju $\tilde{\phi}^a = (\phi-\phi_0)^a$. Tako lahko definiramo masno matriko, katere lastne vrednosti podajo mase skalarnih polj:

$$m_{ab}^2 = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^a\partial\phi^b}\right)_{\phi_0}. \quad (14)$$

Ta matrika je simetrična in pozitivno semi-definitna [1]. Pokazati moramo, da vsaki zvezni simetriji začetnega Lagrangiana, ki ni simetrija minimuma potenciala (vakuuma), ustreza ničelna lastna vrednosti masne matrike m_{ab}^2. Poljubno zvezno transformacijo skalarnega polja ϕ lahko zapišemo kot

$$\phi^a \to \phi^a + i\varepsilon^i T^i_{ab}\phi^b, \quad (15)$$

kjer je ε^i infinitezimalni parameter, povezan z i-tim generatorjem T^i. Upoštevamo, da je začetni Lagrangian invarianten na takšno transformacijo. Za konstantna polja členi z odvodi odpadejo in zadošča, da zahtevamo invariantnost potenciala [1]:

$$V(\phi^a) = V(\phi^a + i\varepsilon^i T^i_{ab}\phi^b) = V(\phi^a) + i\varepsilon^i T^i_{ab}\phi^b \frac{\partial V}{\partial \phi^a} \qquad \longrightarrow \qquad T^i_{ab}\phi^b \frac{\partial V}{\partial \phi^a} = 0. \tag{16}$$

Zadnji izraz odvajamo po ϕ^c in izvrednotimo v minimumu $\phi = \phi_0$, kjer $\left(\frac{\partial V}{\partial \phi^a}\right)_{\phi_0} = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial \phi^c}\left(T^i_{ab}\phi^b \frac{\partial V}{\partial \phi^a}\right)_{\phi_0} = \frac{\partial}{\partial \phi^c}\left(T^i_{ab}\phi^b\right)\left(\frac{\partial V}{\partial \phi^a}\right)_{\phi_0} + T^i_{ab}\phi^b_0\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^a \partial \phi^c}\right)_{\phi_0} = T^i_{ab}\phi^b_0 m^2_{ac} = 0 \tag{17}$$

Dobili smo pogoj

$$m^2_{ac}\left(T^i\phi_0\right)_a = 0, \tag{18}$$

ki je izpolnjen, če velja ena od naslednjih trditev:

- $T^i\phi_0 = 0$, kar pomeni, da je vakuum invarianten in torej upošteva simetrijo Lagrangiana.
- T^i je generator spontano zlomljene simetrije, kar pomeni $T^i\phi_0 \neq 0$, in je $T^i\phi_0$ lastni vektor masne matrike m^2 pri ničelni lastni vrednosti.

Pokazali smo, da lahko za vsak spontano zlomljen generator zvezne simetrije najdemo ničelno lastno vrednost masne matrike, kar implicira prisotnost brezmasnega skalarnega polja [1].

Opomba: S formalizmom efektivne akcije bi lahko gradili na tej klasični obravnavi in Goldstoneov teorem na ta način pokazali tudi za kvantno teorijo polja, kar je razloženo v poglavju 11 knjige *An Introduction to Quantum Field Theory* (Peskin, Schroeder) [1] in v poglavju 19.2 knjige *The Quantum theory of fields, Vol.2* (Weinberg) [5]. V nadaljevanju si bomo ogledali kvantni dokaz Goldstoneovega teorema brez formalizma efektivne akcije, ki temelji predvsem na obravnavi v knjigi *Gauge Theory of Elementary Particle Physics* (Cheng, Li) [6]. Bolj rigorozen dokaz je naveden v Weinbergovi knjigi.

2.2 Goldstoneov teorem v kvantni teoriji polja

2.2.1 Noetherin teorem in ohranjen naboj

Izrek 2 (Noetherin teorem). *Če je akcija invariantna na zvezno transformacijo $\phi_a \to \phi_a + \alpha\Delta\phi_a$ in se pri tem Lagrangian transformira kot $\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \alpha\partial_\mu J^\mu$, potem sledijo ohranitveni zakoni:*

$$\partial_\mu j^\mu = 0; \qquad j^\mu = \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi_a\right)}\Delta\phi_a - J^\mu, \qquad \textit{ohranjeni tok} \tag{19}$$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0; \qquad Q(t) = \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, j^0(x), \qquad \textit{ohranjeni naboj.} \tag{20}$$

Oglejmo si posledice Noetherinega teorema v primeru interne simetrije Lagrangiana. Obravnavamo zvezno transformacijo $\phi_i \to \phi_i + i\varepsilon^a t^a_{ij}\phi_j$, ki pusti Lagrangian invarianten: $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$. Iz tega sledi $\Delta\phi_i = it^a_{ij}\phi_j$ in $J^\mu = 0$, kar v skladu z enačbama (19) in (20) poda:

$$\begin{aligned} j^a_\mu &= -i\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\mu \phi_i\right)} t^a_{ij}\phi_j \qquad \text{in} \\ Q^a &= \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, j^a_0(x) = -i\int \mathrm{d}^3\vec{x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^0 \phi_i\right)} t^a_{ij}\phi_j = -i\int \mathrm{d}^3\vec{x}\,\pi_i(x) t^a_{ij}\phi_j. \end{aligned} \tag{21}$$

Pri tem je $\pi(x)$ konjugirani moment, ki zadošča kanonični komutacijski relaciji

$$[\pi_i(\vec{x},t),\ \phi_j(\vec{y},t)] = -i\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\delta_{ij}. \tag{22}$$

Iz tega po nekaj računanja sledi

$$[Q^a(t),\ Q^b(t)] = -i\int \mathrm{d}^3\vec{x}\pi(\vec{x},t)[t^a,\ t^b]\phi(\vec{x},t) = iC^{abc}Q^c(t),$$

kjer smo upoštevali, da matrike t^a zadoščajo Liejevi algebri: $[t^a,\, t^b] = iC^{abc}t^c$. Pokazali smo, da tudi ohranjeni naboji Q^a, asociirani s posameznimi generatorji transformacije t^a, tvorijo Liejevo algebro, zato jih lahko obravnavamo kot generatorje simetrijske grupe [6]. Upoštevajoč enačbe (21) in (22) lahko pokažemo še naslednjo komutacijsko relacijo, ki se bo v nadaljevanju izkazala za uporabno:

$$[Q^a,\ \phi_i] = it^a_{ij}\phi_j. \tag{23}$$

2.2.2 Spontano zlomljena simetrija

Pogoj za spontani zlom simetrije je ne-invariantnost vakuuma:

$$U|\,0\,\rangle \neq |\,0\,\rangle. \tag{24}$$

Upodobitev U lahko zapišemo z generatorji kot $U = e^{i\varepsilon^a Q^a}$, zato lahko zgornjo izjavo prevedemo v

$$Q^a|\,0\,\rangle \neq 0 \qquad \rightarrow \qquad \text{ohranjeni naboj ne izniči vakuuma.} \tag{25}$$

Iz tega dejstva in komutatorja (23) sledi, da obstajajo operatorji polja ϕ_j z neničelnimi vakuumski pričakovanimi vrednostmi (vev) [6]:

$$\langle 0|\,\phi_j\,|0\rangle \neq 0. \tag{26}$$

Že v podpoglavju 2.1.1 smo opazili, da je bilo ključno dejstvo, da je potencial dosegel minimum v točki z $vev \neq 0$. V dokazu Goldstoneovega teorema, ki sledi, bo torej lastnost (26) kot eden od pogojev za spontani zlom simetrije igrala pomembno vlogo.

2.2.3 Dokaz Goldstoneovega teorema

Iz zvezne simetrije Lagrangiana po Noetherinem teoremu sledi obstoj ohranjenega toka. Dokaz Noetherinega teorema temelji na invarianci Lagrangiana in ne zahteva invariance vakuuma [7], zato tudi v primeru spontano zlomljene simetrije sledi ohranitveni zakon $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$ in lahko zapišemo:

$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathrm{d}^3\vec{x}[\partial_\mu j^\mu(x),\ \phi(0)] = \partial_0\int \mathrm{d}^3\vec{x}[j^0(x),\ \phi(0)] + \int \mathrm{d}^3\vec{x}\vec{\nabla}[\vec{j}(x),\ \phi(0)] = \\ &= \partial_0[Q(t),\ \phi(0)] + \int \mathrm{d}^2\vec{S}[\vec{j}(x),\ \phi(0)]. \end{aligned} \tag{27}$$

Za dovolj veliko površino $S \to \infty$ drugi člen izgine [6] in ostane

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[Q(t),\ \phi(0)] = 0. \tag{28}$$

Vakuumska pričakovana vrednost tega komutatorja je zato neodvisna od časa. V primeru spontano zlomljene simetrije je neničelna, saj tedaj obstajajo polja z neničelno vev (26). Zapišemo:

$$\langle 0|\,[Q(t),\ \phi(0)]|\,0\,\rangle = \eta \neq \eta(t) \neq 0. \tag{29}$$

Razpišemo zgornji komutator in v oba člena vstavimo identiteto $\mathbb{1} = \sum_n |n\rangle \langle n|$:

$$\sum_n \langle 0| Q(t) |n\rangle \langle n| \phi(0) |0\rangle - \langle 0| \phi(0) |n\rangle \langle n| Q(t) |0\rangle = \eta. \tag{30}$$

Na tej točki predpostavimo, da je teorija Poincaréjevo invariantna, torej je vakuum invarianten na translacije [8]:

$$e^{i\hat{P}x}|\,0\,\rangle = |\,0\,\rangle.$$

Z uporabo operatorja translacije lahko razpišemo še

$$j_0(x) = e^{i\hat{P}x} j_0(0) e^{-i\hat{P}x}.$$

To vstavimo v enačbo (30) in z upoštevanjem definicije ohranjenega naboja Q dobimo:

$$\begin{aligned}
&\sum_n \int \mathrm{d}^3\vec{x} \left(\langle 0| e^{i\hat{P}x} j_0(0) e^{-i\hat{P}x} |n\rangle \langle n| \phi(0) |0\rangle - \langle 0| \phi(0) |n\rangle \langle n| e^{i\hat{P}x} j_0(0) e^{-i\hat{P}x} |0\rangle \right) = \\
&= \sum_n \int \mathrm{d}^3\vec{x} \left(\langle 0| j_0(0) |n\rangle \langle n| \phi(0) |0\rangle \, e^{-iE_n t + i\vec{p}_n \vec{x}} - \langle 0| \phi(0) |n\rangle \langle n| j_0(0) |0\rangle \, e^{+iE_n t - i\vec{p}_n \vec{x}} \right) = \\
&= \sum_n (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}_n) \left(\langle 0| j_0(0) |n\rangle \langle n| \phi(0) |0\rangle \, e^{-iE_n t} - \langle 0| \phi(0) |n\rangle \langle n| j_0(0) |0\rangle \, e^{+iE_n t} \right) = \eta
\end{aligned} \tag{31}$$

Desna stran je časovno neodvisna in neničelna, torej mora biti takšna tudi leva. Temu je zadoščeno le, če obstaja stanje $|n\rangle$, za katero pri $\vec{p}_n = 0$ velja $E_n = 0$ [6], iz česar sledi:

$$m_n = \sqrt{E_n^2 - |\vec{p}_n|^2} = 0,$$

kar pomeni, da je to stanje brezmasno. Preverimo še, da je skalarno. Ena od predpostavk teorema je, da je teorija Lorentzovo invariantna in da simetrija, ki je zlomljena, ni Lorentzova. Vakuum je zato invarianten na Lorentzove transformacije: $M|0\rangle = |0\rangle$. Za polje ϕ_j z neničelno vev lahko zapišemo

$$\langle 0| \phi_j |0\rangle = \langle 0| M^\dagger \phi_j M |0\rangle = \langle 0| \phi_j' |0\rangle,$$

iz česar sledi, da se operator polja ϕ_j transformira kot skalar. Enačba (31) določa, da $\langle 0| \phi_j |n\rangle \neq 0$, kar je mogoče le, če je tudi stanje $|n\rangle$ skalarno.

Pogoj (29) velja za vsak zlomljen generator zvezne simetrije Q^a, ki mu torej ustreza Goldstoneov bozon, s čemer smo dokazali Goldstoneov teorem.

Opomba: Zaradi spontanega zloma simetrije integral, ki podaja Q, ni dobro definiran. V dokazu smo zato zgolj predpostavili, da obstaja komutator $[Q, \phi]$ [6]. Veliko bolj rigorozna obravnava dokaza je ponujena v članku *Broken Symmetries* (Goldstone, Salam, Weinberg; 1962) [7]. Poleg tega iz izraza (31) ne sledi očitno, da vsakemu zlomljenemu generatorju ustreza *natanko en* Goldstoneov bozon. Razmisliti bi morali, kaj bi se zgodilo, če bi bilo $|n\rangle$ večdelčno stanje, kar komentira Weinberg v knjigi [5].

3. Posledice in posplošitve Goldstoneovega teorema

S spontanim zlomom simetrije lahko opišemo številne procese v naravi in v skladu z Goldstoneovim teoremom z njimi povežemo (brezmasne) skalarje. Kot navidez preprosta primera lahko navedemo fazni prehod iz paramagneta v feromagnet s pojavom magnonov in zlom translacijske simetrije v izotropni snovi, kjer lahko fonone obravnavamo kot Goldstoneove bozone.

V resnici situacija ni tako enostavna. V obeh zgoraj navedenih primerih gre za pojave, ki jih opisujejo nerelativistične teorije. Število Goldstoneovih bozonov tedaj ni vedno enako številu zlomljenih generatorjev in je potrebna bolj previdna obravnava.

3.1 Spontani zlom simetrije v teorijah brez Lorentzove invariance

V teorijah, ki niso Lorentzovo invariantne, Goldstoneov teorem v obliki, ki smo jo obravnavali v okviru tega članka, ne velja. Spomnimo se, da smo na več točkah dokaza predpostavili Lorentzovo invarianco. Ta zahteva se skriva tudi v dokazu Noetherinega teorema. Iz obstoja ohranjenega toka $\partial_\mu j^\mu = 0$ ohranitev naboja $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = 0$ sledi le, če robni pogoji odpravijo integral po neskončni površini:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \int \mathrm{d}^3\vec{x}\partial_0 j^0(x) = -\int \mathrm{d}^3\vec{x}\vec{\nabla}\vec{j}(x) = -\int \mathrm{d}^2\vec{S}\vec{j}(x) = 0.$$

To je mogoče samo v manifestno Lorentzovo invariantnih teorijah, kjer komutatorji izven svetlobnega stožca izginejo [9]. Podoben argument smo implicitno uporabili tudi ob izvrednotenju izraza (27) [6].

Posledično ne moremo tako enostavno povezati neodvisnih Goldstoneovih načinov z zlomljenimi generatorji. Izkaže se [10], da lahko ločimo Nambu-Goldstoneove bozone (NGB)

- *tipa A* z linearno disperzijsko relacijo, $w \propto |k|$, in
- *tipa B* s kvadratično disperzijsko relacijo, $w \propto k^2$.

Za njihovo število ob spontanem zlomu simetrije velja:

$$n_{BG} = n_A + 2n_B, \tag{32}$$

kjer je n_{BG} število zlomljenih generatorjev, $n_{A(B)}$ pa število NGB tipa A(B). Pri feromagnetu pride do zloma simetrije $\mathrm{O}(3) \to \mathrm{O}(2)$, iz česar sledi $n_{BG} = 2$. Namesto dveh Goldstoneovih bozonov, ki bi ju pričakovali v Lorentzovo invariantni teoriji, tu dobimo le en NGB tipa B, kar ustreza enačbi (32).

3.2 Spontani zlom ne-eksaktne simetrije

Če spontano zlomljena simetrija ni eksaktna, ampak je hkrati zlomljena tudi eksplicitno, Goldstoneovi bozoni niso brezmasni. Takšen primer so pioni, ki jih lahko opišemo s spontanim zlomom ne-eksaktne *kiralne simetrije* $\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{SU}(2)_R$ [1]. Fermionski del Lagrangiana kvantne kromodinamike

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{u}i\not{D}u + \bar{d}i\not{D}d - m_u\bar{u}u - m_d\bar{d}d$$

lahko zapišemo z levo- in desno-ročnimi polji kvarkov:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{u}_R i\not{D}u_R + \bar{u}_L i\not{D}u_L + \bar{d}_R i\not{D}d_R + \bar{d}_L i\not{D}d_L - (\text{masni členi}).$$

Za brezmasne kvarke $q = u, d$ so masni členi enaki 0 in je $\mathcal{L}_{QCD}$ invarianten na unitarne transformacije

$$q_L \to U_L q_L, \qquad q_R \to U_R q_R.$$

Pravimo, da ima $\mathcal{L}_{QCD}$ kiralno simetrijo. Ta je v resnici eksplicitno zlomljena z masnimi členi [11], ki so oblike:

$$m\bar{q}q = m\bar{q}_L q_R + m\bar{q}_R q_L.$$

Ker kvarki niso brezmasni, kiralna simetrija ni eksaktna. Ob njenem zlomu se pojavijo *pseudo-Goldstoneovi bozoni*, ki imajo majhno maso. V tem primeru so to trije pioni [1].

3.3 Spontani zlom umeritvene simetrije

Kot smo omenili že v uvodu, je večina danes uporabljenih kvantnih teorij polja (npr. Standardni model) umeritvenih teorij, ki slonijo na zahtevi po invarianci pod lokalnimi transformacijami. Umeritvena simetrija Standardnega modela je $\mathrm{SU}(3)_C \times \mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$, pri čemer se simetrijska umeritvena grupa $\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$ nanaša na elektrošibko interakcijo. *Ad hoc* dodani masni členi umeritvenih bozonov eksplicitno kršijo umeritveno invarianco, brez katere teorija ni renormalizabilna. V primeru QCD z brezmasnimi gluoni to ne predstavlja težave, zaplete pa se pri opisu masivnih vektorskih bozonov šibke interakcije: $W^{\pm}$ in Z^0. Rešitev je spontani zlom umeritvene simetrije. Če je ta zlomljena spontano in ne eksplicitno, je teorija renormalizabilna, hkrati pa vektorski bozoni dobijo maso. Tej generaciji mase umeritvenih bozonov prek zloma umeritvene simetrije rečemo *Higgsov mehanizem* [1].

V skladu z Goldstoneovim teoremom se ob spontanem zlomu simetrije v teoriji pojavijo brezmasni skalarji, ki pa jih v naravi ne opazimo, kar je predstavljalo oviro pri formulaciji Higgsovega mehanizma [2]. Rešitev se skriva v tem, da umeritvene teorije v določenih umeritvah[1] niso manifestno Lorentzovo invariantne in se lahko Goldstoneovemu teoremu izognemo [2, 6, 9].

V primeru spontanega zloma umeritvene simetrije ne dobimo Goldstoneovih bozonov, temveč t.i. *would-be-Goldstoneovi bozoni* postanejo longitudinalna polarizacija umeritvenih bozonov, ki ob tem dobijo maso [6].

3.4 Spontani zlom Poincaréjeve simetrije

Tudi v primeru Lorentzovo invariantnih teorij, kjer pride do spontanega zloma simetrij prostorčasa, npr. translacijske ali rotacijske simetrije, za napoved števila brezmasnih načinov ne moremo uporabiti Goldstoneovega teorema v obliki 1 in so za ta namen potrebne posplošitve [12].

LITERATURA

[1] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*, Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.

[2] Peter W. Higgs, *Nobel Lecture: Evading the Goldstone theorem*, Rev. Mod. Phys. **86** (2014), no. 3, 851.

[3] H. Bertle, *Goldstone boson and higgs mechanism*, Ph.D. thesis, 05 2018.

[4] Ö. Özdal, *The higgs boson and right-handed neutrinos in supersymmetric models*, Ph.D. thesis, 07 2016.

[5] Steven Weinberg, *The quantum theory of fields. Vol. 2: Modern applications*, Cambridge University Press, 8 2013.

[6] Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford University Press, Oxford, UK, 1984.

[7] Jeffrey Goldstone, Abdus Salam, and Steven Weinberg, *Broken symmetries*, Phys. Rev. **127** (1962), 965–970.

[8] Oscar Delicaat, *The goldstone theorem and spontaneous breaking of conformal symmetry*, 2016.

[9] Tom Kibble, *History of electroweak symmetry breaking*, 2014.

[10] Haruki Watanabe and Hitoshi Murayama, *Unified description of nambu-goldstone bosons without lorentz invariance*, Physical Review Letters **108** (2012), no. 25.

[11] Witold Nazarewicz, *Qcd*, 2016.

[12] Ian Low and Aneesh V. Manohar, *Spontaneously broken spacetime symmetries and goldstone's theorem*, Physical Review Letters **88** (2002), no. 10.

[1] V drugih umeritvah pa padejo nekateri drugi aksiomi standardnih teorij polja, ki prav tako spodkopljejo Goldstoneov teorem [6].