VITALIJEVA NEMERLJIVA MNOŽICA

GAL ZMAZEK

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Članek podrobno obravnava uporabo Lebesgueove mere za določanje mer podmnožic realnih števil, pri čemer naslavlja problematiko Vitalijeve nemerljive množice, ki v tradicionalnih teorijah merjenja ustvari protislovje, če jo predpostavimo za merljivo. Temeljito preučuje merljive in nemerljive množice, σ-algebre in razlikovanje med Borelovimi in Lebesgueovimi merljivimi množicami. Poudarek je na identifikaciji nemerljivih množic, ki niso Borelove, kar nadgradi razumevanje teorije merjenja v matematičnih prostorih.

VITALI NON-MEASURABLE SET

This article delves into the Lebesgue measure's application to define measures for subsets of real numbers, addressing the introduction of Vitali's non-measurable set, which creates a contradiction under traditional measurement theories if assumed measurable. It thoroughly examines measurable and non-measurable sets, σ-algebras, and the differentiation between Borel and Lebesgue measurable sets. The emphasis is on the identification of non-Borel measurable sets, advancing the understanding of measurement theory in mathematical spaces.

1. Uvod

Uvedba koncepta mere je v matematiki ključnega pomena. Tradicionalno v Evklidski geometriji razmišljamo o *velikosti* objektov v smislu dolžine, ploščine in volumna, odvisno od dimenzije prostora. Toda kako se lotimo merjenja neskončnih množic, zlasti v kontekstu realnih števil? Vzemimo interval $[0, 1]$. Intuitivno rečemo, da ima dolžino 1. Interval $[0, 2]$ ima dolžino 2. Toda, če poskušamo meriti te intervale glede na število točk, ki jih vsebujejo, se srečamo s paradoksom: oba intervala vsebujeta enako število točk. Torej, kako lahko natančno določimo njihovo *velikost*? Za rešitev tega problema je francoski matematik Henri Lebesgue razvil koncept Lebesgueove mere. Ta mera je zasnovana tako, da veliki večini množic v prostoru realnih števil dodeli smiselno *velikost*. Z njegovo pomočjo lahko rečemo, da ima interval $[0, 1]$ mero 1 in $[0, 2]$ mero 2, ne da bi se zanašali na število točk na teh intervalih. Žal pa se vsaka lepa teorija sreča s svojimi izzivi. Med raziskovanjem lastnosti Lebesgueove mere je matematik Giuseppe Vitali odkril obstoj posebne množice, ki nas, ob predpostavki, da je merljiva, vodi v protislovje. Vitalijeva nemerljiva množica je podmnožica realnih števil, za katero ni mogoče določiti Lebesgueove mere. To pomeni, da ne glede na to, kako se trudimo, te množice ne moremo umestiti v okvir običajnih geometrijskih intuicij o velikosti. Vitalijevo odkritje je bilo presenetljivo. Kljub obsežnosti in uporabnosti Lebesgueove mere je ta množica pokazala, da obstajajo strukture znotraj realnih števil, ki se upirajo običajnim konceptom merjenja.

2. Mera

Kot pove že naslov članka, obstajajo množice, ki niso merljive. Osredotočimo se na prostore, ki vsebujejo samo merljive množice. Takšnemu prostoru pravimo tudi *merljiv prostor*. Za ta merljiv prostor je bistveno, da ni zgolj omejen na posamične množice, ampak mora imeti strukturo, ki jo bomo opisali v tem poglavju. V tej strukturi bomo imeli tri zahteve. Prvič, če množica pripada našemu prostoru, mora biti tudi njen komplement del tega prostora. To je smiselno, saj če lahko izmerimo velikost določene množice, moramo biti sposobni oceniti tudi velikost njenega komplementa. Drugič, če imamo zaporedje množic, ki so vse del našega merljivega prostora, mora biti tudi njihova unija del tega prostora. Ta zahteva je intuitivna: če znamo določiti mero posameznih množic, bi morali znati določiti tudi mero njihove unije. In tretjič, prazna množica mora biti prav tako merljiva. To je naravna zahteva, saj prazna množica ne vsebuje nobenega elementa, zato je njena mera nič. Dodajmo, da bomo potenčno množico množice X označili s $\mathcal{P}(X)$.

Definicija 1. Naj bo X neprazna množica. Množico $S \subset \mathcal{P}(X)$ imenujemo σ-algebra, če ima naslednje tri lastnosti:

- $\emptyset \in S$;
- $E \in S \implies E^{\complement} \in S$;
- za vsako zaporedje $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ elementov v S velja, da je $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in S$.

Opomba 1. Algebraična struktura σ-algebre je res algebra množic z operacijama presek in unija.

Zgled 1. Naj bo X poljubna množica. Množica $\{\emptyset, X\}$ je σ-algebra.

Zgled 2. Naj bo X poljubna množica. Potenčna množica $\mathcal{P}(X)$ je σ-algebra.

Zgled 3. Naj bo X poljubna množica. Množica vseh $E \subset X$, za katere velja, da je E ali $E^{\complement}$ števna, je σ-algebra.

Dokaz. Preverimo, da zgoraj podana množica zadošča vsem trem aksiomom σ-algebre. Za prva dva je to očitno. Res, prazna množica je števna in zato vsebovana v S, po drugi strani pa za množico E, ki je števna ali pa ima števen komplement, to lastnost izpolni tudi $E^{\complement}$. Preverimo še zadnjo lastnost, s katero imamo malo več dela.
Naj bo $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ zaporedje elementov v S. Če za vsak $i \in \mathbb{N}$ velja, da je E_i števna, potem je tudi $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ števna, saj je števna unija števnih množic spet števna. Če pa obstaja tak $j \in \mathbb{N}$, da E_j ni števna, potem je po definiciji $E_j^{\complement}$ števna. Ko upoštevamo, da je $\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)^{\complement} \subset E_j^{\complement}$, sledi, da je $\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)^{\complement}$ števna, torej je $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in S$.

Trditev 1. *Naj bo X poljubna množica, S neka σ-algebra na X, D in E elementa v S in $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ zaporedje elementov v S. Potem velja $X \in S$, $D \cup E \in S$, $D \cap E \in S$ in $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \in S$.*

Dokaz. Iz zahtev za σ-algebro takoj sledi, da sta X in $D \cup E$ elementa S. Pokažimo, da je $D \cap E \in S$: D je element v S in E je element v S, kar pomeni, da je unija komplementov $E^{\complement}$ in $D^{\complement}$ prav tako element v S. To vodi do zaključka, da je komplement preseka D in E element v S, kar pomeni, da je tudi $D \cap E$ element v S. Enake sklepe lahko posplošimo na števne preseke in tako dokažemo še zadnjo vsebovanost.

Zgornji dokaz je povzet po viru [1, str. 27], kjer si lahko bralec prebere še nekaj več podrobnosti.

Definicija 2. Naj bo X množica.

- *Merljiv prostor* je urejen par (X, S), kjer je S σ-algebra na X.
- Elementom S pravimo *merljive množice.*

Zdaj, ko smo definirali σ-algebro, se lahko vprašamo, ali lahko iz poljubne množice podmnožic neke množice tvorimo najmanjšo σ-algebro, ki vsebuje dano množico podmnožic. Hitro lahko preverimo, da je presek poljubnih σ-algeber spet σ-algebra. Ker je potenčna množica tudi σ-algebra, lahko vedno tvorimo najmanjšo σ-algebro, ki vsebuje to množico podmnožic.
Če vzamemo za našo množico kar množico odprtih množic, nas to pripelje do naslednje definicije.

Definicija 3. Naj bo X topološki prostor in S množica vseh odprtih množic. Najmanjša σ-algebra, ki vsebuje S, se imenuje *Borelova algebra.* Množicam v Borelovi algebri pravimo tudi *Borelove množice.*

Zgled 4. Vsak zaprt interval je Borelova množica za evklidsko topologijo na $\mathbb{R}$. To sledi iz dejstva, da je zaprta množica komplement odprte množice in je zato vsebovana v σ-algebri.

Zdaj lahko zapišemo splošno definicijo funkcije mere.

Definicija 4. Naj bo X poljubna množica in naj bo S neka σ-algebra na X. *Mera* na (X, S) je funkcija $\mu : S \to [0, \infty]$, za katero veljata naslednji lastnosti:

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$ za vsako paroma disjunktno zaporedje E_1, E_2 ... množic iz S.

Da bi pridobili intuicijo o meri si oglejmo dva primera:

Zgled 5. Naj bo X poljubna množica. Mera μ je preštevalna mera, če vsaki končni množici priredi število njenih elementov, in ∞, če je množica neskončna.

Zgled 6. Naj bo X poljubna množica, S σ-algebra na X in $c \in X$. Meri δ_c pravimo Diracova mera, če je

$$\delta_c(E) = \begin{cases} 1 & c \in E \\ 0 & c \notin E \end{cases}$$

3. Zunanja mera

Pri uvedbi mere v eni dimenziji nas običajno vodi koncept dolžine intervala. Vendar pa se v matematiki vedno znova srečujemo s potrebo, da gledamo preko očitnega, da raziskujemo bolj splošno in se sprašujemo: „Kako lahko merimo druge, manj očitne podmnožice $\mathbb{R}$?“ To nas pripelje do zunanje mere in merjenja množic, ki niso nujno samo intervali. Te množice morda nimajo intuitivne ali očitne dolžine v običajnem smislu, vendar pa z zunanjo mero postane možno oceniti njihovo *velikost.* Ko se bomo poglobili v to poglavje, bomo spoznali, kako se definicija zunanje mere lahko uporabi za različne vrste množic. Ta ideja nam bo služila kot most, ki nas bo povezal z bolj kompleksnimi vpeljavami mere v večdimenzionalnih prostorih. Takšna posplošitev mere je ključnega pomena za razumevanje, kako se koncepti, kot je volumen kvadra, lahko uporabljajo v širšem kontekstu. Osnovna ideja zunanje mere bo iskanje najmanjšega pokritja množice z zaprtimi intervali. Tako bomo dobili oceno velikosti, saj vemo, da lahko množici, sestavljeni iz zaprtih intervalov, preprosto priredimo mero. Ravno iz pokritij zato izvira poimenovanje *zunanja mera.*

Definicija 5. Volumen kvadra $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ je enak produktu dolžin stranic $|Q| = (b_1 - a_1)(b_2 - b_2)\dots(b_n - a_n)$.

Definicija 6. Naj bo E poljubna podmnožica $\mathbb{R}^d$. Njena zunanja mera je podana s predpisom

$$m_*(E) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|,$$

kjer je infimum vzet po vseh števnih pokritij množice E z zaprtimi kvadri Q_j.

Opomba 2. Pri definiciji dopuščamo tudi neskončne kvadre, saj je lahko mera množice ∞. Potem infimum obstaja, saj je množica vsot navzdol omejena in ima vsaj en element.

Bralec lahko opazi, da smo se v zgornji definiciji izognili predpisovanju ustrezne σ-algebre oz. da še nismo načeli vprašanja, za katere množice je zunanja mera dobro definirana in ali sploh zadošča aksiomom iz predhodnega poglavja. Vse to bomo obravnavali preko serije trditev, ki sledijo. Začnimo z očitno posledico definicije.

Posledica 2. *Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja pokritje $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$, za katerega velja:*

$$\sum_{j=1}^{\infty} m_* (Q_j) \leq m_* (E) + \varepsilon.$$

Zapišimo nekaj trditev, ki bodo ključne za dokaz obstoja nemerljive množice.

Trditev 3. *Naj bosta E_1, $E_2 \subset \mathbb{R}^d$. Če je $E_1 \subset E_2$, potem je $m_* (E_1) \leq m_* (E_2)$.*

Dokaz. Ker je vsako pokritje množice E_2 tudi pokritje množice E_1, je po definiciji zunanje mere tudi $m_* (E_1) \leq m_* (E_2)$.

Trditev 4. *Naj bo $E_j \subset \mathbb{R}^d$ za vsak $j \in \mathbb{N}$. Če je $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, potem je*

$$m_* (E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_* (E_j).$$

Dokaz. Najprej predpostavimo, da je $m_* (E_j) < \infty$ za vsak j, saj drugače neenakost očitno drži. Po definiciji zunanje mere vemo, da za vsak $\varepsilon > 0$ in za vsak j obstaja pokritje $E_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{k,j}$ z zaprtimi množicami, da velja

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Q_{k,j}| \leq m_* (E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Vemo, da je potem $\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{k,j}$ pokritje množice E, torej je

$$m_* (E) \leq \sum_{j,k} |Q_{k,j}| = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |Q_{k,j}| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(m_* (E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} m_* (E_j) + \varepsilon.$$

Trditev 5. *Če je $E = E_1 \cup E_2$ in je $d(E_1, E_2) > 0$, potem za zunanjo mero velja $m_* (E) = m_* (E_1) + m_* (E_2)$.*

Dokaz. Zaradi prejšnje trditve je dovolj dokazati, da je

$$m_* (E) \geq m_* (E_1) + m_* (E_2).$$

Naj bo najprej δ tak, da je $d(E_1, E_2) > \delta > 0$. Naj bo $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ takšno pokritje z zaprtimi kvadri, da je $\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq m_* (E) + \varepsilon$. Nato stranice kvadrov razpolavljamo, dokler ni najdaljša stranica kvadra v pokritju manjša od $\frac{\delta}{\sqrt{d}}$, kjer je d tak, da je $E \subset \mathbb{R}^d$. Sledi, da vsak od kvadrov seka kvečjemu eno od množic E_1 in E_2. Označimo množico kvadrov, ki sekajo E_1, z J_1 in množico kvadrov, ki sekajo E_2, z J_2. Potem je

$$E_1 \subset \bigcup_{j \in J_1} Q_j \quad \text{in} \quad E_2 \subset \bigcup_{j \in J_2} Q_j.$$

Torej lahko sklepamo, da je

$$m_* (E_1) + m_* (E_2) \leq \sum_{j \in J_1} |Q_j| + \sum_{j \in J_2} |Q_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq m_* (E) + \varepsilon.$$

Ker je ε poljuben, je trditev dokazana.

Osredotočimo se na podmnožice $\mathbb{R}$. Najprej si oglejmo lemo, ki jo bomo potrebovali pri dokazu naslednje trditve.

Lema 6. *Naj bo $t \in \mathbb{R}$ in $A \subset \mathbb{R}$. Potem je $m_*(t+A) = m_*(A)$.*

Dokaz. Naj bo $I_1, I_2, \ldots$ zaporedje odprtih intervalov, katerih unija vsebuje A. Potem je $t+I_1, t+I_2, \ldots$ zaporedje odprtih intervalov, ki vsebujejo $t+A$, torej

$$m_*(t+A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |t+I_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|.$$

V zgornji neenakosti smo uporabili trivialno dejstvo, da je mera odprtega intervala na $\mathbb{R}$ enaka meri zaprtega intervala na $\mathbb{R}$.
Če vzamemo infimum vseh teh različnih zaporedij, sklepamo

$$m_*(t+A) \leq m_*(A).$$

Da dobimo drugo neenakost, uporabimo izpeljano neenakost za množico A, ki jo zapišemo kot $A = -t + (t+A)$, iz česar izpeljemo

$$m_*(A) = m_*(-t + (t+A)) \leq m_*(t+A).$$

Pred naslednjo trditvijo pa ponovimo aksiom izbire. Naj bo $\mathcal{F}$ poljubna družina paroma disjunktnih nepraznih množic. Aksiom izbire trdi, da obstaja taka funkcija $f : \mathcal{F} \to \bigcup \mathcal{F}$, da za vsak $A \in \mathcal{F}$ velja $f(A) \in A$. To pomeni, da za vsako množico v družini $\mathcal{F}$ funkcija f *izbere* en element iz te množice. Obstoj te funkcije bomo uporabili v naslednji trditvi.

Trditev 7. *Obstajata disjunktni množici A in B, da velja $m_*(A \cup B) \neq m_*(A) + m_*(B)$, oziroma, zunanja mera ni aditivna.*

V dokazu, ki sledi, bomo skonstruirali množico, ki ne bo zadoščala aditivnosti. Ker v naši definiciji mere zahtevamo števno aditivnost, bomo takšno množico razglasili za nemerljivo množico. Natančneje, v dokazu te trditve bomo skonstruirali *Vitalijevo nemerljivo množico.*

Dokaz. Naj bo $I = [-1, 1]$ interval. Definiramo relacijo $a \sim b \iff a - b \in \mathbb{Q}$. Dokažimo, da je dana relacija ekvivalenčna relacija. Prvič, relacija je refleksivna, saj za vsako število a velja $a - a = 0$, kar je racionalno število, torej $a \sim a$. Drugič, relacija je simetrična, kar pomeni, da če $a \sim b$, potem je $a - b$ racionalno število. To pa tudi pomeni, da je $-(a-b)$ ali $b - a$ prav tako racionalno število, torej $b \sim a$. Nazadnje je relacija tudi tranzitivna. Če $a \sim b$ in $b \sim c$, potem sta $a - b$ in $b - c$ obe racionalni števili. Seštevanje teh dveh izrazov nam da $a - c$, kar je prav tako racionalno število, torej $a \sim c$.
Vemo, da lahko množico razdelimo na disjunkne ekvivalenčne razrede, ki tvorijo pokritje množice. Po aksiomu izbire vemo, da ima vsaka družina nepraznih množic funkcijo izbire. Z V označimo množico predstavnikov ekvivalenčnih razredov, z $[a]$ pa množico $\{x \in X | x \sim a\}$. Množici V pravimo *Vitalijeva množica.*
Naj bo $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ zaporedje racionalnih števil na intervalu $[-2, 2]$. Potem velja

$$[-1, 1] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (r_k + V),$$

saj za vsak $a \in [-1, 1]$ obstaja $v \in V \cap [a]$, zato je $a = r_k + v$ za nek $k \in \mathbb{N}$, torej je $a \in r_k + V$. Sledi, da je

$$m_*([-1, 1]) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m_*(r_k + V),$$

iz česar lahko sklepamo, da je

$$2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} m_* (V),$$

torej je $m_* (V) > 0$. Dokažimo sedaj, da so $r_1 + V, r_2 + V, \ldots$ paroma disjunktne. Recimo, da obstaja tak t, da je $t \in (r_j + V) \cap (r_k + V)$ za neka j in k. Potem je $t = r_j + v_j = r_k + v_k$ za neka $v_j, v_k \in V$, iz česar sledi

$$v_k - v_j = r_k - r_j \in \mathbb{Q}.$$

Iz naše konstrukcije V sledi, da je $v_k = v_j$, zato $r_j = r_k$, torej $k = j$. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Očitno je

$$\bigcup_{k=1}^{n} (r_k + V) \subset [-3, 3],$$

iz česar lahko sklepamo

$$m_* \left(\bigcup_{k=1}^{n} (r_k + V) \right) \leq 6,$$

ampak velja tudi

$$\sum_{k=1}^{n} m_* (r_k + V) = \sum_{k=1}^{n} m_* (V) = n m_* (V).$$

Vemo, da obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je $n m_* (V) > 6$, torej bi dobili strogo neenakost

$$m_* \left(\bigcup_{k=1}^{n} (r_k + V) \right) < \sum_{k=1}^{n} m_* (r_k + V).$$

Če bi veljalo $m_* (A \cup B) = m_* (A) + m_* (B)$ za vsaka A in B, bi z indukcijo lahko dokazali, da je

$$m_* \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) = \sum_{k=1}^{n} m_* (A_k),$$

kar pa je v protislovju z ravnokar dokazanim.

Sklenili smo torej, da zunanja mera ne bo zadoščala našim definicijam na vseh podmnožicah $\mathbb{R}$. To pa lahko popravimo tako, da za množico S ne vzamemo potenčne množice $\mathbb{R}$, temveč merljive množice omejimo z nekaterimi pogoji. Še vedno bi želeli, da so merljive vse odprte množice in da je množica še vedno σ-algebra. Naša množica merljivih množic mora torej vsebovati *Borelovo algebro*.

4. Lebesgueova mera

V tem razdelku bomo definirali Lebesgueovo merljive množice in preverili, ali res zadoščajo našim pogojem mere in vsebovanosti Borelove algebre.

Definicija 7. Podmnožica E množice $\mathbb{R}^d$ je *Lebesgueovo merljiva*, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja odprta množica O z lastnostma $E \subset O$ in

$$m_* (O - E) < \varepsilon.$$

Lebesgueovo mero definiramo kot zunanjo mero na Lebesgueovih množicah:

$$m (E) = m_* (E).$$

Preveriti moramo torej, ali naša definicija zadošča aditivnosti. Pred tem pa moramo dokazati nekaj pomožnih trditev. Trditve so povzete po viru [2], kjer si lahko bralec prebere več o Lebesgueovi meri. Prva trditev je očitna.

Trditev 8. *Vsaka odprta podmnožica $\mathbb{R}^d$ je Lebesgueovo merljiva.*

Trditev 9. *Števna unija merljivih množic je merljiva.*

Dokaz. Naj bo $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, kjer so E_j merljive. Naj bo $\varepsilon > 0$. Za vsak $j \in \mathbb{N}$ lahko izberemo takšno odprto množico O_j, ki vsebuje E_j, da je $m_*(O_j - E_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}$. Potem je unija odprtih množic $O = \bigcup_{j=1}^{\infty} O_j$ spet odprta, $E \subset O$ in $(O - E) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}(O_j - E_j)$, torej iz lastnosti zunanje mere, ki smo jih dokazali, sledi

$$m_*(O - E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(O_j - E_j) \leq \varepsilon.$$

Trditev 10. *Če je $m_*(E) = 0$, potem je E Lebesgueovo merljiva. Tudi vsaka njena podmnožica je Lebesgueovo merljiva.*

Dokaz. Po lastnostih zunanje mere vemo, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja taka odprta množica O, ki vsebuje E, da je $m_*(O) < \varepsilon$. Ker je $(O - E) \subset O$, sledi

$$m_*(O - E) < \varepsilon,$$

iz česar pa sledi merljivost. Merljivost podmnožic množice E sledi po trditvi 3.

Lema in trditve v nadaljevanju so topološke lastnosti, zato jih bomo navedli brez dokazov, ki so zapisani v viru [2].

Lema 11. *Če je F zaprta, K kompaktna in sta ti dve množici disjunktni, potem je $d(F, K) > 0$.*

Trditev 12. *Zaprte množice so merljive.*

Trditev 13. *Komplement merljive množice je merljiva množica.*

Dokaz. Če je E merljiva množica, potem lahko po definiciji za vsak $n \in \mathbb{N}$ izberemo tako odprto množico O_n, ki vsebuje E, da je $m_*(O_n - E) \leq \frac{1}{n}$. Ker je $O_n^{\complement}$ zaprta (in zato merljiva), je tudi $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n^{\complement}$ merljiva. Ker je $S \subset E^{\complement}$, je $\left(E^{\complement} - S\right) \subset (O_n - E)$, torej je $m_*\left(E^{\complement} - S\right) \leq \frac{1}{n}$ za vsak n. Torej je $m_*\left(E^{\complement} - S\right) = 0$. Sledi, da sta po trditvi 10 množici S in $E^{\complement} - S$ merljivi, torej je merljiva tudi njuna unija, $E^{\complement}$.

Dokazali smo, da Lebesgueovo merljive množice res tvorijo σ-algebro, torej naslednja posledica sledi iz lastnosti σ-algebre.

Posledica 14. *Števni preseki merljivih množic so merljivi.*

Preveriti moramo še glavno lastnost mere, in sicer števno aditivnost.

Izrek 15. *Naj bodo E_j, $j \in \mathbb{N}$, paroma disjunktne merljive množice in naj bo $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$. Tedaj je*

$$m(E) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j).$$

Dokaz. Najprej bomo predpostavili, da je E_j omejena množica za vsak $j \in \mathbb{N}$. Ker vemo, da je $E_j^{\complement}$ merljiva, po definiciji zaprte množice in Lebesgueove mere sledi, da obstaja takšna zaprta množica $F_j \subset E_j$, da je $m_* (E_j - F_j) \leq \frac{\varepsilon}{2^j}$.
Za fiksen N so množice $F_1, \dots, F_N$ kompaktne in disjunktne, torej po lemi 11 in Trditvi 5 sledi, da je

$$m \left(\bigcup_{j=1}^{N} F_j \right) = \sum_{j=1}^{N} m (F_j).$$

Ker je $\bigcup_{j=1}^{N} F_j \subset E$, je

$$m (E) \geq \sum_{j=1}^{N} m (F_j) \geq \sum_{j=1}^{N} m (E_j) - \varepsilon.$$

V zgornjih dveh neenakostih smo najprej uporabili Trditev 4, nato pa še Trditev 3. Ko pošljemo N proti neskončno, sklepamo, da je

$$m (E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} m (E_j).$$

Sedaj moramo trditev dokazati še za primer, ko E_i niso nujno omejeni. Naj bo $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ tako zaporedje kvadrov, da je $Q_k \subset Q_{k+1}$ za vsak $k \geq 1$ in $\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k = \mathbb{R}^d$. Naj bodo $S_1 = Q_1$ in $S_k = Q_k - Q_{k-1}$ za vsak $k \geq 2$. Naj velja

$$E_{j,k} = E_j \cap S_k.$$

Sledi, da je

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{j,k}.$$

Vsaka $E_{k,j}$ je omejena in poljuben par teh množic je disjunkten, zato je

$$m (E) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} m (E_{j,k}) = \sum_{j=1}^{\infty} m (E_j).$$

S tem smo dokazali zgornjo trditev.

5. Neborelova merljiva množica

Sklenili smo, da je Borelova množica vsebovana v množici Lebesgueovo merljivih množic. Ker pa se nismo osredotočili na to, da bi bile med merljivimi le Borelove množice, se vprašamo, ali obstaja kakšna množica, ki je Lebesgueovo merljiva, a ni Borelova množica. V tem poglavju se bomo ukvarjali s kardinalnostjo množic. Zato uvedimo nekaj standardnih oznak: $|\mathbb{N}| = \aleph_0$, $|\mathbb{R}| = \aleph_1$, $|\mathcal{P} (\mathbb{R})| = \aleph_2, \dots$ Naslednjo trditev navedemo brez dokaza, bralec ga najde v viru [3].

Trditev 16. *Kardinalnost Borelove algebre je* $\aleph_1$.

Spet se osredotočimo na množico $\mathbb{R}$. Naš cilj bo pokazati, da je Lebesgueovo merljivih množic strogo več od Borelovih, oziroma, da je kardinalnost Lebesgueovo merljivih množic bistveno večja (enaka moči potenčne množice $\mathcal{P} (\mathbb{R})$). Da pa bi pokazali to neenakost, se najprej spomnimo Cantorjeve množice.

Definicija 8. Naj bo $C_0 = [0,1]$ in naj bo $C_n = \frac{1}{3}\left(C_{n-1} \cup (2 + C_{n-1})\right)$. *Cantorjevo množico* definiramo kot

$$C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Najprej bomo pokazali, da je Cantorjeva množica neštevna.

Trditev 17. *Naj bo C Cantorjeva množica. Potem je $|C| = \aleph_1$.*

Dokaz. Vemo, da velja $|[0,1]| = \aleph_1$. Ker je $C \subset [0,1]$, velja $|C| \leq \aleph_1$. Pokazali bomo še, da je $|C| \geq \aleph_1$ tako, da bomo skonstruirali surjektivno preslikavo $f : C \to [0,1]$. Da bi zapisali to preslikavo, bomo vsako število na intervalu $[0,1]$ zapisali v trojiškem sistemu brez ponavljajočih dvojic. Ko pogledamo C_1, vemo, da so v trojiškem sistemu v C_1 vsa števila, ki imajo za drugo števko ravno 0 ali 2. Podobno ugotovimo, da je tretja števka ponovno 0 ali 2. Z indukcijo ugotovimo, da lahko vsako realno število v Cantorjevi množici zapišemo v decimalnem zapisu le z 0 in 2. Zdaj lahko vsako dvojico v zapisu zamenjamo z enico in dobimo dvojiški zapis. Definiramo funkcijo f tako, da na ravno opisan način vsakemu elementu iz C priredi dvojiški zapis, ki prestavlja neko realno številu na intervalu $[0,1]$. Ker lahko vsako število na intervalu $[0,1]$ zapišemo v dvojiškem sistemu in spet spremenimo enice v dvojice ter dobimo element iz C, je ta preslikava surjektivna.

Naš naslednji cilj bo pokazati, da je $m_*(C) = 0$, saj bomo lahko tako skonstruirali še veliko več Lebesgueovo merljivih množic.

Trditev 18. *Naj bo C Cantorjeva množica. Potem je $m_*(C) = 0$.*

Dokaz. Trivialno je, da je

$$m(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Ker za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $C \subseteq C_n$, po trditvi 3 velja

$$0 \leq m_*(C) \leq m_*(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

zato je $m_*(C) = 0$.

Po prejšnji trditvi lahko slepamo, da so tudi vse podmnožice Cantorjeve množice merljive. Sklenemo lahko torej nasledno trditev.

Trditev 19. *Naj bo L množica Lebesgueovo meljivih množic. Tedaj velja $|L| \geq \mathcal{P}(\aleph_1) = \aleph_2$.*

Posledica 20. *Množica vseh Lebesgueovo merljivih množic strogo vsebuje množico Borelovih množic.*

Posledica 21. *Obstaja množica, ki je merljiva, a ni Borelova.*

Natančna konstrukcija takšne množice je opisana v literaturi [4].

LITERATURA

[1] S. Axler, *Measure, integration and real analysis*, Springer International Publishing, 2020.

[2] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Real analysis: measure theory, integration, and Hilbert spaces*, Princeton University Press, 2005, str. 1-46.

[3] S. M. Srivastava, *A course on Borel sets*, vol. 180., Springer, 1998.

[4] M. Mohanarangan, *A Lebesgue measurable set that is not Borel*, Measure and Integration, zapiski predavanj, ETH Zürich, 2021.