ADJUNGIRANI FUNKTORJI IN DELNO UREJENE MNOŽICE

ANDREJ MATEVC

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

V članku najprej uvedemo osnovne pojme iz teorije kategorij: kategorija, funktor, naravna transformacija, limita, kolimita. Vse te pojme ponazorimo z zgledi. Nato podamo dve definiciji adjungiranosti funktorjev in pokažemo, da sta ekvivalentni. V zadnjem poglavju se posvetimo kategorijam, ki izhajajo iz delno urejenih množic. V njih preučimo spoznane pojme, dokažemo izrek od adjungiranih funktorjih, na koncu pa karakteriziramo zveznost funkcij kot adjungiranost določenega para funktorjev.

ADJOINT FUNCTORS AND PARTIALLY ORDERED SETS

In the article, we first introduce the basic concepts from category theory: category, functor, natural transformation, limit, colimit. All these concepts are illustrated with examples. Then, we provide two definitions of adjoint functors and show that they are equivalent. In the final chapter, we focus on categories that arise from partially ordered sets. We study how the concepts discussed earlier behave in these categories, prove the adjoint functor theorem and in the end, we characterize the continuity of functions as the adjunction of a certain pair of functors.

1. Uvod

Teorija kategorij je veja matematike, ki sta jo v štiridesetih letih prejšnjega stoletja razvila S. Eilenberg in S. Mac Lane. Njun cilj je bil razumeti in natančno definirati idejo naravne transformacije, ki se je v prejšnjih letih vse pogosteje pojavljala na številnih matematičnih področjih. Nastanek in nadaljno preučevanje tega področja je eden od ključnih prelomov v matematiki 20. stoletja. Danes se teorija kategorij uporablja na številnih področjih, od algebre, topologije in geometrije do matematične fizike, računalništva in logike.

Matematika pogosto preučuje različne objekte in povezave med njimi. V algebri obravnavamo različne algebraične strukture in homomorfizme med njimi, pri topologiji topološke prostore in zvezne preslikave. Pogosto se izkaže, da lahko matematične objekte opišemo z njihovimi odnosi z ostalimi objekti. Tako velikokrat študij posvetimo tem povezavam - pri linearni algebri obravnavamo lastnosti linearnih preslikav, pri topologiji topološke prostore pogosto preučujemo preko preslikav v realna števila. Teorija kategorij te ideje posploši.

Pojem adjungiranih funktorjev se je razvil kasneje, leta 1958 ga je uvedel D. M. Kan. Pojavijo se na številnih področjih matematike. Obstoj adjungiranega para funktorjev določa sorodnost med strukturama kategorij.

Številnih ključnih pojmov iz teorije kategorij v temu članku ne definiramo - temeljito obravnavo tega področja lahko bralec najde v [1]. Pri karakterizaciji zveznosti z adjungiranimi funktorji sledimo [2].

2. Kategorije

Definicija 1. *Kategorija* $\mathcal{C}$ je struktura, ki ima

- razred *objektov* $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$,
- razred *morfizmov* $\mathcal{C}\,(x, y)$, elemente katere označujemo kot $f\colon x \to y$, za vsak par objektov $x, y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$;
- *identitetni morfizem* $1_x \in \mathcal{C}\,(x, x)$ za vsak objekt $x \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$;

- operacijo *komponiranja* $\mathcal{C}(y,z) \times \mathcal{C}(x,y) \to \mathcal{C}(x,z)$, $(g,f) \mapsto g \circ f$, za vse trojice objektov $x, y, z \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$.

Pri tem zahtevamo, da velja

$$1_y \circ h = h = h \circ 1_x \text{ in } f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

za vse $x, y, z, w \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$, $f \in \mathcal{C}(z,w)$, $g \in \mathcal{C}(y,z)$ in $h \in \mathcal{C}(x,y)$.

Opomba 1. Če so tako razred objektov kot razredi morfizmov kategorije pravi razredi, pravimo, da je kategorija *velika*. Če so vsi ti razredi množice, pravimo, da je kategorija *majhna*. Če so le razredi morfizmov množice, pravimo, da je kategorija *lokalno majhna*.

Zgled 1. Vsaka matematična struktura, ki ustreza tem lastnostim, je kategorija. Najprej si oglejmo nekaj primerov kategorij, ki smo jih omenili v uvodu. V vseh je operacija kompozituma podana z običajnim kompozitumom funkcij, identitetni morfizem pa je kar identitetna funkcija.

- $\mathcal{S}et$ je kategorija, katere objekti so množice, morfizmi pa funkcije med njimi.

- $\mathcal{V}ect_{\mathbb{F}}$ je kategorija, katere objekti so vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$, morfizmi pa linearne preslikave med njimi. $\mathcal{F}in\mathcal{V}ect_{\mathbb{F}}$ je kategorija, katere objekti so končno razsežni vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$, morfizmi pa linearne preslikave.

- $\mathcal{T}op$ je kategorija, katere objekti so topološki prostori, morfizmi pa zvezne preslikave med njimi.

Vse te kategorije so lokalno majhne. Opazimo, da smo notranjo strukturo obravnavanih objektov povsem zanemarili - v primeru kategorije $\mathcal{S}et$ tako množica z enim elementom kot množica naravnih števil predstavljata le en objekt. Vseeno pa lahko objekte razlikujemo s pomočjo morfizmov: za vsako množico namreč obstaja natanko ena funkcija v množico z enim elementom, funkcij v množico naravnih števil pa je veliko. Objekte v dani kategoriji torej lahko preučujemo preko njihovega odnosa z ostalimi objekti.

Zgled 2. Do sedaj smo videli le zglede kategorij, katerih objekti so množice z dodatno strukturo, morfizmi pa funkcije, ki to strukturo ohranjajo. Pojem kategorije pa je splošnejši. Tako si lahko zamislimo zelo enostavno kategorijo: množica objektov je množica S, edini morfizmi pa zahtevane identitete. Takšnim kategorijam bomo rekli *diskretne kategorije*. Poseben primer je *prazna kategorija*, ki ima prazno množico objektov.

Zgled 3. Za zadnji zgled kategorije si oglejmo sledečo konstrukcijo: naj bo A množica, opremljena z delno urejenostjo $\leq$. Definirajmo kategorijo $\mathcal{A}$, katere objekti naj bodo elementi A, množica morfizmov iz a v b pa naj bo ali enojec $\{*\}$, če velja $a \leq b$, ali prazna množica sicer. Tranzitivnost relacije $\leq$ nam zagotavlja, da je komponiranje vedno definirano. Hitro se prepričamo, da ta konstrukcija ustreza vsem pogojem iz definicije kategorije. Takšni kategoriji bomo rekli *urejenostna kategorija*. Tudi ta kategorija je majhna.

Definicija 2. Morfizem $f\colon x \to y$ v kategoriji $\mathcal{C}$ je *izomorfizem*, če obstaja morfizem $g\colon y \to x$, da velja $g \circ f = 1_x$ in $f \circ g = 1_y$. Če v $\mathcal{C}(x,y)$ obstaja kakšen izomorfizem, pravimo, da sta x in y *izomorfna*.

3. Funktorji

V teoriji kategorij se torej ukvarjamo z matematičnimi objekti in morfizmi med njimi. Ker je kategorija tudi sama matematični objekt, se je naravno vprašati, kaj so morfizmi med kategorijami. To nas pripelje do definicije funktorja.

Definicija 3. Naj bosta $\mathcal{C}$ in $\mathcal{D}$ kategoriji. *Funktor* $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ je podan s preslikavami

- $\mathrm{Ob}\ \mathcal{C} \to \mathrm{Ob}\ \mathcal{D}$, $x \mapsto F(x)$;
- $\mathcal{C}(x, y) \to \mathcal{D}(F(x), F(y))$, $f \mapsto F(f)$, za vsaka $x, y \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$.

Pri tem zahtevamo, da za ti pravili velja

$$F(1_x) = 1_{F(x)} \text{ in } F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$$

za vse $x, y, z \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$ in $f\colon y \to z$, $g\colon x \to y$. Funktorju, katerega domena je majhna kategorija, bomo včasih rekli *diagram*.

Definicija 4. Naj bosta $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ in $F\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funktorja. Njun *kompozitum* $F \circ G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ je funktor, podan s preslikavami $\mathrm{Ob}\ \mathcal{C} \to \mathrm{Ob}\ \mathcal{E}$, $x \mapsto F(G(x))$, in $C(x, y) \to \mathcal{E}(F(G(x)), F(G(y)))$, $f \mapsto F(G(f))$, za vse $x, y \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$.

Opomba 2. Kompozitum funktorjev je spet funktor in operacija komponiranja je asociativna. Poleg tega imamo za vsako kategorijo $\mathcal{C}$ identitetni funktor $1_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, ki je določen z identitetno preslikavo na objektih ter identitetnimi preslikavami na morfizmih. Funktor torej prestavlja morfizem med kategorijami. Tako lahko tvorimo (veliko) kategorijo majhnih kategorij, ki jo označimo s $\mathcal{C}at$. Njeni objekti so majhne kategorije, morfizmi pa funktorji med njimi.

Zgled 4. Naj bosta $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ kategoriji. Vsak objekt $x \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{D}$ določa *konstantni funktor* $\underline{x}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, ki vsakemu objektu $a \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$ priredi x, vsakemu morfizmu $f \in \mathcal{C}(a, b)$ pa identitetni morfizem 1_x.

Zgled 5. Naj bosta $(A, \leq_A)$ in $(B, \leq_B)$ delno urejeni množici ter $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ pripadajoči inducirani kategoriji. Vsak funktor $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ se zoža na funkcijo $f\colon A = \mathrm{Ob}\ \mathcal{A} \to \mathrm{Ob}\ \mathcal{B} = B$, ki ohranja urejenost. Obratno, vsaka funkcija $f\colon A \to B$, ki ohranja urejenost, inducira funktor $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Res, vsaka funkcija določa predpis $\mathrm{Ob}\ \mathcal{A} \to \mathrm{Ob}\ \mathcal{B}$, ohranjanje urejenosti pa zagotavlja, da ta predpis lahko razširimo do funktorja.

Zgled 6. Tvorimo lahko funktor dvojnega duala $(\cdot)^{**}\colon \mathcal{V}ect_{\mathbb{F}} \to \mathcal{V}ect_{\mathbb{F}}$. Ta vektorskemu prostoru V priredi njegov dvojni dual V^{**}, linearni preslikavi $f\colon V \to W$ pa $f^{**}\colon V^{**} \to W^{**}$,

$$f^{**}(\varepsilon)(\varphi) = \varepsilon(\varphi \circ f).$$

Ker velja

$$(f \circ g)^{**}(\varepsilon)(\varphi) = \varepsilon(\varphi \circ f \circ g) = g^{**}(\varepsilon)(\varphi \circ f) = f^{**}(g^{**}(\varepsilon))(\varphi)$$

in $(1_V)^{**}(\varepsilon)(\varphi) = \varepsilon(\varphi)$, predpis $(\cdot)^{**}$ res določa funktor.

Na funktorje pogosto naletimo, ko iz nekega matematičnega objekta naredimo novega, na primer z dodajanjem ali „pozabljanjem“ strukture.

Zgled 7. Pogosti primeri funktorjev so t.i. pozabljivi funktorji. Oglejmo si dva primera.

1. Funktor $\Phi_1\colon \mathcal{V}ect_{\mathbb{F}} \to \mathcal{S}et$, ki vektorskemu prostoru priredi pripadajočo množico, linearni preslikavi pa pripadajočo funkcijo.

2. Funktor $\Psi_1 \colon \mathcal{T}op \to \mathcal{S}et$, ki topološkemu prostoru priredi pripadajočo množico, zvezni preslikavi pa pripadajočo funkcijo.

Hitro se prepričamo, da sta to res funktorja. Zanimivo je, da lahko tvorimo funktorja, ki sta v določenem smislu inverzna:

1. $\Phi_2 \colon \mathcal{S}et \to \mathcal{V}ect_{\mathbb{F}}$, ki množici priredi vektorski prostor nad njo, tj. vektorski prostor z bazo $\{e_a\}_{a \in S}$, funkciji $f \colon S \to S'$ pa inducirano linearno preslikavo, ki bazni vektor e_a prostora $\Phi_2(S)$ slika v bazni vektor $e_{f(a)}$ prostora $\Phi_2(S')$.

2. $\Psi_2 \colon \mathcal{S}et \to \mathcal{T}op$, ki množici priredi diskretni topološki prostor nad to množico, funkciji pa inducirano zvezno preslikavo.

4. Naravne transformacije

Morda je presenetljivo dejstvo, da lahko definiramo tudi morfizem funktorjev, ki je torej morfizem morfizmov kategorij. Imenujemo ga naravna transformacija.

Definicija 5. Naj bosta $F, G \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktorja. Naravna transformacija $\alpha \colon F \Rightarrow G$ je podana z naborom morfizmov $\{\alpha_x \colon F(x) \to G(x)\}_{x \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}}$. Elementom tega nabora pravimo *komponentni morfizmi.* Pri tem zahtevamo, da diagram

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, "\alpha_x"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(x) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(y) \arrow[r, "\alpha_y"'] & G(y) \end{tikzcd}$$

komutira za vse morfizme $f \colon x \to y$ v kategoriji $\mathcal{C}$.

Definicija 6. Naj bodo $F, G, H \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktorji in naj bosta $\alpha \colon G \Rightarrow H$, $\beta \colon F \Rightarrow G$ naravni transformaciji. *Kompozitum naravnih transformacij* $\alpha \circ \beta$ je naravna transformacija, podana z naborom morfizmov $\{\alpha_x \circ \beta_x \colon F(x) \to H(x) \mid x \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}\}$.

Definicija 7. Naj bosta $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ kategoriji. *Kategorija funktorjev* $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ je struktura, podana z razredom objektov

$$\mathrm{Ob}\ [\mathcal{C}, \mathcal{D}] = \{F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D} \mid F \text{ je funktor}\}$$

in z množicami morfizmov

$$[\mathcal{C}, \mathcal{D}](F, G) = \{\alpha \colon F \Rightarrow G \mid \alpha \text{ je naravna transformacija}\}.$$

Opremljena je z operacijo kompozituma, podano v definiciji 6. Za vsak funktor $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ imamo tudi identitetno naravno transformacijo $1_F \colon F \Rightarrow F$, podano z naborom $\{1_{F(x)} \mid x \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}\}$.

Definicija 8. Funktorja $F, G \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ sta *naravno izomorfna*, če sta izomorfna kot objekta funktorske kategorije $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$.

Trditev 1. *Funktorja $F, G \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ sta naravno izomorfna natanko tedaj, ko obstaja naravna transformacija $\alpha \colon F \Rightarrow G$, katere komponentni morfizmi so izomorfizmi.*

Dokaz. Pokažimo najprej implikacijo v desno. Naj bosta F in G naravno izomorfna z izomorfizmom $\alpha\colon F \Rightarrow G$. Tedaj obstaja $\alpha^{-1}\colon G \Rightarrow F$, da je $\alpha \circ \alpha^{-1} = 1_G$ in $\alpha^{-1} \circ \alpha = 1_F$. Sledi, da za vsak komponentni morfizem α_x velja $\alpha_x \circ \alpha_x^{-1} = 1_{G(x)}$ in $\alpha_x^{-1} \circ \alpha_x = 1_{F(x)}$, torej je izomorfizem.

Obratno, naj bo $\alpha\colon \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}$ naravna transformacija in naj bodo vsi njeni komponentni morfizmi izomorfizmi. Dovolj se je prepričati, da je nabor $\alpha^{-1} = \{(\alpha_x)^{-1} \mid x \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}\}$ naravna transformacija $G \Rightarrow F$. Naj bo torej $f\colon x \to y$ morfizem v $\mathcal{C}$. Iz $\alpha_y \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_x$ takoj sledi, da je $F(f) \circ (\alpha_x)^{-1} = (\alpha_y)^{-1} \circ G(f)$, s čimer je trditev dokazana. ■

Zgled 8. V zgledu 6 smo si ogledali funktor $(\cdot)^{**}\colon \mathcal{V}ect_{\mathbb{F}} \to \mathcal{V}ect_{\mathbb{F}}$. Dvojni dual končno razsežnega vektorskega prostora je končno razsežen, zato ta funktor določa funktor

$$\mathcal{F}in\mathcal{V}ect_{\mathbb{F}} \to \mathcal{F}in\mathcal{V}ect_{\mathbb{F}}.$$

Za končno razsežen vektorski prostor V imamo izomorfizem

$$\mu_V\colon V \to V^{**},\ v \mapsto (\varepsilon \mapsto \varepsilon(v)).$$

Sedaj trdimo, da zbirka linearnih preslikav

$$\{\mu_V\colon V \to V^{**} \mid V \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{F}in\mathcal{V}ect_{\mathbb{F}}\}$$

določa naravni izomorfizem med $(\cdot)^{**}$ in identitetnim funktorjem. Vsi elementi zbirke so izomorfizmi. Če pokažemo, da je zbirka naravna transformacija, bo torej iz trditve 1 sledilo želeno. Naj bo $f\colon V \to W$ linearna preslikava. Za vse $v \in V$ in $\varphi \in W^*$ tedaj velja

$$\begin{aligned} f^{**}(\mu_V(v))(\varphi) &= \mu_V(v)(\varphi \circ f) = (\varphi \circ f)(v) \\ &= \varphi(f(v)) = \mu_W(f(v))(\varphi), \end{aligned}$$

zato diagram

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mu_V"] \arrow[d, "f"'] & V^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\ W \arrow[r, "\mu_W"'] & W^{**} \end{tikzcd}$$

komutira in zbirka je res naravna transformacija.

Trditev 2. *Naj bodo $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ in $H\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funktorji, $\alpha\colon F \Rightarrow G$ pa naravna transformacija. Tedaj nabor morfizmov $\{H(\mu_x)\}_{x \in Ob\ \mathcal{C}}$ določa naravno transformacijo $H \circ F \Rightarrow H \circ G$. Označevali jo bomo z $H(\mu)$.*

Dokaz. Za vse $x, y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ ter $f\colon x \to y$ komutira spodnji diagram.

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, "\mu_x"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(x) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(y) \arrow[r, "\mu_y"'] & G(y) \end{tikzcd}$$

Če ga preslikamo s H, dobimo natanko diagram, ki izkazuje, da je $H(\mu)$ naravna transformacija. ■

Zgled 9. Oglejmo si naravne transformacije v primeru, ko je eden izmed funktorjev konstanten. Naj bo torej $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktor in $x \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{D}$ objekt. Komponentni morfizmi $\alpha\colon \underline{x} \Rightarrow F$ so morfizmi $\alpha_a\colon x \to F(a)$, za katere komutira diagram

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, "\alpha_a"'] \arrow[dr, "\alpha_b"] & \\ F(a) \arrow[rr, "F(h)"'] & & F(b) \end{tikzcd}$$

za vse morfizme $h\colon a \to b$ v $\mathcal{C}$. Komponentni morfizmi $\beta\colon F \Rightarrow \underline{x}$ so oblike $\beta_a\colon F(a) \to x$, za katere komutirajo diagrami

$$\begin{tikzcd}
& x & \\
F(a) \arrow[ur, "\alpha_a"] \arrow[rr, "F(h)"'] & & F(b) \arrow[ul, "\alpha_b"']
\end{tikzcd}$$

Če je $y \in \operatorname{Ob} \mathcal{D}$ še en objekt in $f\colon x \to y$ morfizem, lahko iz naravne transformacije $\alpha\colon \underline{y} \Rightarrow F$ dobimo naravno transformacijo $\underline{x} \Rightarrow F$, določeno z naborom morfizmov $\{f \circ \alpha_a\}_{a \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}}$. Označevali jo bomo s $f \circ \alpha$. Sorodno za naravno transformacijo $\beta\colon F \Rightarrow \underline{x}$ dobimo $\beta \circ f\colon F \Rightarrow \underline{y}$.

5. Limite in kolimite

Definicija 9. Naj bo $\mathcal{I}$ majhna kategorija. *Limita* diagrama $D\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ je objekt $\lim D \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$, skupaj z naravno transformacijo $\mu\colon \underline{\lim D} \Rightarrow D$, da za vsak $x \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ in naravno transformacijo $\alpha\colon \underline{x} \Rightarrow D$ obstaja natanko en morfizem $f\colon x \to \lim D$, za katerega je $\alpha = \mu \circ f$. Morfizem f je torej tak, da za vse morfizme $h\colon i \to j$ v $\mathcal{I}$ komutira spodnji diagram.

$$\begin{tikzcd}
& \lim D \arrow[dl, "\mu_i"'] \arrow[dr, "\mu_j"] \arrow[d, dashed, "f"] & \\
& x \arrow[dl, "\alpha_i"] \arrow[dr, "\alpha_j"'] & \\
D(i) \arrow[rr, "D(h)"'] & & D(j)
\end{tikzcd}$$

Zgled 10. Primer limite, ki nam je znan, je *produkt*. To je limita nad diskretno kategorijo. Naj bo torej I množica in $\mathcal{I}$ pripadajoča diskretna kategorija. Naj bo $D\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ funktor. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je injektiven na objektih. Sliko objekta $i \in I$ označimo z x_i. Limito $\lim D$ v tem primeru označujemo z $\prod_{i \in I} x_i$. Pripadajoča naravna transformacija sestoji iz morfizmov $\pi_j\colon \prod_{i \in I} x_i \to x_j$. Ker je kategorija $\mathcal{I}$ diskretna, je diagram iz definicije limite v tem primeru spodnje oblike.

$$\begin{tikzcd}
& \prod_{i \in I} x_i \arrow[dl, bend right, "\pi_j"'] \arrow[dr, bend left, "\pi_\ell"] \arrow[d, dashed, "f"] & \\
& x \arrow[dl, "\alpha_j"] \arrow[dr, "\alpha_\ell"'] & \\
x_j & & x_\ell
\end{tikzcd}$$

Če je $I = \emptyset$, produkt kličemo *začetni objekt*. Zanj velja, da za vsak $x \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ obstaja natanko en morfizem od začetnega objekta do x.

Oglejmo si produkte v $\mathcal{V}ect_{\mathbb{F}}$. Funktor $D\colon \mathcal{I} \to \mathcal{V}ect_{\mathbb{F}}$ je podan z družino vektorskih prostorov $\{V_i\}_{i \in I}$. Trdimo, da je njihov produkt vektorski prostor $\prod_{i \in I} V_i$, katerega elementi so I-terice $(v_i)_{i \in I}$, ki jih seštevamo in množimo s skalarji po komponentah, skupaj z naravno transformacijo $\underline{\prod_{i \in I} V_i} \Rightarrow D$, definirano kot

$$\left\{ \pi_j\colon \prod_{i \in I} V_i \to V_j \right\}_{j \in I},$$

kjer π_i označuje projekcijo na i-to komponento. Opazimo, da za vse $v \in \prod_{i \in I} V_i$ velja $v = (\pi_i(v))_{i \in I}$. Naj bo W vektorski prostor in $\{f_i\colon W \to V_i\}_{i \in I}$ naravna transformacija $\underline{W} \Rightarrow D$. Tedaj za linearno preslikavo $h\colon W \to \prod_{i \in I} V_i$, določeno s predpisom

$$w \mapsto (f_i(w))_{i \in I},$$

velja $\pi_i \circ h = f_i$. Če to velja še za eno preslikavo $\tilde{h}\colon W \to \prod_{i\in I} V_i$, je tedaj za vsak $w \in W$

$$\tilde{h}(w) = (\pi_i(\tilde{h}(w)))_{i\in I} = (f_i(w))_{i\in I} = h(w),$$

zato je $\tilde{h} = h$ in je torej h res enolično določen.

Trditev 3. *Če sta (x, μ) in (x', μ') limiti $D\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$, obstaja natanko en izomorfizem $f\colon x \to x'$, da velja $\mu = f \circ \mu'$.*

Dokaz. Spomnimo se, da je μ naravna transformacija $\underline{x} \Rightarrow D$. Ker je (x', μ') limita diagrama D, obstaja natanko en morfizem $f\colon x \to x'$, da je $\mu = \mu' \circ f$. Simetrično vidimo, da obstaja natanko en morfizem $\tilde{f}\colon x' \to x$, za katerega velja $\mu' = \mu \circ \tilde{f}$. Kompozitum $\tilde{f} \circ f$ je morfizem $x \to x$, za katerega velja $\mu = \mu \circ (\tilde{f} \circ f)$. Ker to velja tudi za 1_x, po enoličnosti sledi $\tilde{f} \circ f = 1_x$. Simetrično vidimo, da je $f \circ \tilde{f} = 1_{x'}$. ■

Definicija 10. Naj bo $\mathcal{I}$ majhna kategorija. *Kolimita* diagrama $D\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ je objekt $\operatorname{colim} D \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$, skupaj z naravno transformacijo $\delta\colon D \Rightarrow \underline{\operatorname{colim} D}$, da za vsak $x \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ in naravno transformacijo $\alpha\colon D \Rightarrow \underline{x}$ obstaja natanko en morfizem $f\colon \operatorname{colim} D \to x$, za katerega je $\alpha = f \circ \delta$. Morfizem f je torej tak, da za vse morfizme $h\colon i \to j$ v $\mathcal{I}$ komutira spodnji diagram.

$$\begin{tikzcd}
 & & \operatorname{colim}\ D & & \\
 & & x \arrow[u, dashed, "f"'] & & \\
D(i) \arrow[uurr, "\mu_i"] \arrow[urr, "\alpha_i"'] \arrow[rrrr, "D(h)"'] & & & & D(j) \arrow[uull, "\mu_j"'] \arrow[ull, "\alpha_j"]
\end{tikzcd}$$

Zgled 11. Primer kolimite, ki nam je znan, je kolimita nad diskretno kategorijo, ki jo imenujemo *koprodukt*. Naj bo torej I množica in $\mathcal{I}$ pripadajoča diskretna kategorija. Naj bo $D\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ funktor. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je injektiven na objektih. Sliko objekta $i \in I$ označimo z x_i. Kolimito colim D v tem primeru označujemo z $\coprod_{i\in I} x_i$. Pripadajoča naravna transformacija sestoji iz morfizmov $\iota_j\colon x_j \to \coprod_{i\in I} x_i$. Ker je kategorija $\mathcal{I}$ diskretna, je diagram iz definicije kolimite v tem primeru spodnje oblike.

$$\begin{tikzcd}
 & \coprod_{i\in I} x_i & \\
 & x \arrow[u, dashed, "f"'] & \\
x_j \arrow[uur, bend left, "\pi_j"] \arrow[ur, "\alpha_j"'] & & x_\ell \arrow[uul, bend right, "\pi_\ell"'] \arrow[ul, "\alpha_\ell"]
\end{tikzcd}$$

Če je $I = \emptyset$, koprodukt kličemo *končni objekt*. Zanj velja, da za vsak $x \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ obstaja natanko en morfizem od x do končnega objekta.

Oglejmo si koprodukte v $\mathcal{V}ect_{\mathbb{F}}$. Funktor $D\colon \mathcal{I} \to \mathcal{V}ect_{\mathbb{F}}$ je podan z družino vektorskih prostorov $\{V_i\}_{i\in I}$. Trdimo, da je njihov koprodukt vektorski prostor $\bigoplus_{i\in I} V_i$, katerega elementi so I-terice $(v_i)_{i\in I}$ z le končno neničelnimi v_i, ki jih seštevamo in množimo s skalarji po komponentah, skupaj z naravno transformacijo $D \Rightarrow \underline{\coprod_{i\in I} V_i}$, definirano kot

$$\left\{\iota_j\colon V_j \to \bigoplus_{i\in I} V_i\right\}_{j\in I},$$

kjer je $\iota_i(v)$ vektor v $\bigoplus_{i\in I} V_i$, katerega edini neničeni element je v na i-ti komponenti. Opazimo, da za vsak $v \in \bigoplus_{i\in I} V_i$, $v = (v_i)_{i\in I}$, velja $v = \sum_{i\in I} \iota_i(v_i)$. Vsota je dobro definirana, saj je le končno mnogo v_i neničelnih. Naj bo W vektorski prostor in $\{f_i \colon V_i \to W\}_{i\in I}$ naravna transformacija $D \Rightarrow \underline{W}$. Preslikava $h\colon \bigoplus_{i\in I} V_i \to W$,

$$(v_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} f_i(v_i),$$

je dobro definirana, saj ima $(v_i)_{i\in I}$ le končno neničelnih v_i. Zanjo velja $h \circ \iota_i = f_i$. Če to velja še za eno preslikavo $\tilde{h}\colon \bigoplus_{i\in I} V_i \to W$, je tedaj za vsak $v \in \bigoplus_{i\in I} V_i$, $v = (v_i)_{i\in I}$,

$$\tilde{h}(v) = \sum_{i\in I} \tilde{h}(\iota_i(v_i)) = \sum_{i\in I} f_i(v_i) = \sum_{i\in I} h(\iota_i(v_i)) = h(v),$$

zato je $\tilde{h} = h$ in je h res enolično določen.

Dokaz naslednje trditve opuščamo, saj je povsem analogen dokazu trditve 3.

Trditev 4. *Če sta (y, δ) in (y', δ') kolimiti $D\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$, obstaja natanko en izomorfizem $g\colon y \to y'$, da velja $\delta = \delta' \circ g$.*

Definicija 11. Naj bo $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktor in $D\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ diagram, katerega limita $(\lim D, \mu)$ obstaja. F *ohranja limito diagrama* D, če velja, da je $(F(\lim D), F(\mu))$ limita $F \circ D\colon \mathcal{I} \to \mathcal{D}$. Pravimo, da F *ohranja limite oblike* $\mathcal{I}$, če F ohranja limito vsakega diagrama $D\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$. F *ohranja limite*, če ohranja limite vseh oblik. V tem primeru pravimo, da je F *zvezen*. Dualno definiramo pojme ohranjanja kolimite diagrama $\mathcal{I} \to \mathcal{C}$, ohranjanja kolimit oblike $\mathcal{I}$ in ohranjanja kolimit, tj. *kozveznost*.

6. Adjungirani funktorji

Definicija 12. *Adjunkcija* med kategorijama $\mathcal{C}$ in $\mathcal{D}$ je par funktorjev $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ in $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, skupaj z naravno transformacijo $\eta\colon 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$, ki jo imenujemo *enota*, in naravno transformacijo $\varepsilon\colon FG \Rightarrow 1_{\mathcal{D}}$, ki jo imenujemo *koenota*, da za vse $x \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ in $y \in \operatorname{Ob} \mathcal{D}$ komutirata spodnja diagrama.

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, "F(\eta_x)"] \arrow[dr, "1_{F(x)}"'] & F(G(F(x))) \arrow[d, "\varepsilon_{F(x)}"] \\ & F(x) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G(y) \arrow[r, "\eta_{G(y)}"] \arrow[dr, "1_{G(y)}"'] & G(F(G(y))) \arrow[d, "G(\varepsilon_y)"] \\ & G(y) \end{tikzcd}$$

Kadar sta F in G dela adjunkcije, pišemo $F \dashv G$. Pravimo, da sta funktorja F in G *adjungirana funktorja*, F je *levi adjungiranec* G in G je *desni adjungiranec* F.

Zgled 12. Pokažimo, da je $\Phi_2 \dashv \Phi_1$ za Φ_1 in Φ_2 definirana v zgledu 7. Najprej moramo razumeti $\Phi_1 \circ \Phi_2$ in $\Phi_2 \circ \Phi_1$. Prvi kompozitum množici S priredi množico vseh vektorjev v vektorskem prostoru nad S. Elementi $\Phi_1(\Phi_2(S))$ so torej linearne kombinacije vektorjev e_a za $a \in S$, obravnavane kot elementi množice. Preslikavi $f\colon S \to S'$ prvi kompozitum priredi preslikavo, ki je le linearna preslikava, na bazi določena z $e_a \mapsto e_{f(a)}$, obravnavana kot navadna preslikava med množicami. Drugi kompozitum vektorskemu prostoru V priredi vektorski prostor z bazo $\{e_v\}_{v\in V}$. Linearni preslikavi $g\colon V \to W$ priredi linearno preslikavo, na bazi določeno s predpisom $e_v \mapsto e_{g(v)}$.

Za komponentni morfizem enote η pri množici S vzemimo preslikavo $\eta_S\colon S \to \Phi_1(\Phi_2(S))$, ki $a \in S$ slika v element $e_a \in \Phi_1(\Phi_2(S))$. Za komponentni morfizem koenote ε pri vektorskem prostoru V vzemimo linearno preslikavo $\varepsilon_V\colon \Phi_2(\Phi_1(V)) \to V$, ki bazni vektor $e_v \in \Phi_2(\Phi_1(V))$ slika v vektor $v \in V$. Najprej premislimo, da komutira levi diagram iz definicije 12. Linearna preslikava $\Phi_2(\eta_S)$ slika bazni vektor $e_a \in \Phi_2(S)$ v $e_{e_a} \in \Phi_2(\Phi_1(\Phi_2(S)))$, tega pa $\varepsilon_{\Phi_2(S)}$ slika v e_a. Torej je kompozitum $\varepsilon_{\Phi_2(S)} \circ \Phi_2(\eta_S)$ enak $1_{\Phi_2(S)}$. V desnem diagramu preslikava $\eta_{\Phi_1(y)}$ slika $v \in \Phi_1(V)$ v $e_v \in \Phi_1(\Phi_2(\Phi_1(V)))$, tega pa $\Phi_1(\varepsilon_V)$ slika v $v \in \Phi_1(S)$. Torej je kompozitum $\Phi_1(\varepsilon_V) \circ \eta_{\Phi_1(S)}$ enak $1_{\Phi_1(V)}$.

Pokazati moramo še, da sta η in ε naravni transformaciji. Želimo torej, da komutirata spodnja diagrama.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\eta_S"] \arrow[d, "f"'] & \Phi_1(\Phi_2(S)) \arrow[d, "\Phi_1(\Phi_2(f))"] \\ S' \arrow[r, "\eta_{S'}"'] & \Phi_1(\Phi_2(S')) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Phi_2(\Phi_1(V)) \arrow[r, "\varepsilon_V"] \arrow[d, "\Phi_2(\Phi_1(g))"'] & V \arrow[d, "g"] \\ \Phi_2(\Phi_1(W)) \arrow[r, "\varepsilon_W"'] & W \end{tikzcd}$$

Izračunamo lahko

$$\begin{aligned} \Phi_1(\Phi_2(f))(\eta_S(a)) = \Phi_1(\Phi_2(f))(e_a) = e_{f(a)} = \eta_{S'}(f(a)), \\ g(\varepsilon_V((e_v)) = g(v) = \varepsilon_W(e_{g(v)}) = \varepsilon_W(\Phi_2(\Phi_1(g))(e_v)), \end{aligned}$$

zato je res $\Phi_2 \dashv \Phi_1$.

Adjungiranost funktorjev lahko definiramo še na drug, ekvivalenten način, ki nam razjasni uporabo izrazov levi in desni adjungiranec.

Definicija 13. *Adjunkcija* med kategorijama $\mathcal{C}$ in $\mathcal{D}$ je par funktorjev $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ in $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, skupaj z bijekcijami

$$\beta_{x,y}\colon \mathcal{D}\left(F\left(x\right), y\right) \to \mathcal{C}\left(x, G\left(y\right)\right),$$

za vse $x \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$, $y \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{D}$, za katere za vse $x, x' \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$, $y, y' \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{D}$, $h\colon x' \to x$, $g\colon y \to y'$ in $f\colon F\left(x\right) \to y$ komutira spodnji diagram.

$$\begin{tikzcd} G(y') & G(y) \arrow[l, "G(g)"'] & \\ & x \arrow[ul, "\beta_{x,y'}(g\circ f)"] \arrow[u, "\beta_{x,y}(f)"'] & x' \arrow[l, "h"] \arrow[ul, "\beta_{x',y}(f\circ F(h))"'] \end{tikzcd}$$

Kadar sta F in G dela adjunkcije, pišemo $F \dashv G$. Pravimo, da sta funktorja F in G *adjungirana funktorja*, F je *levi adjungiranec* G in G je *desni adjungiranec* F.

Zgled 13. Tudi za definicijo 13 velja $\Phi_2 \dashv \Phi_1$ za Φ_1 in Φ_2, definirana v zgledu 7. Res, kot kandidat za bijekcijo med $\mathcal{V}ect_{\mathbb{F}}(\Phi_2(S), V)$ in $\mathcal{S}et(S, \Phi_1(V))$ se nam ponuja predpis $\beta_{S,V}$, ki linearni preslikavi $f\colon \Phi_2(S) \to V$ priredi preslikavo $a \mapsto f(e_a)$. Inverz $\beta_{S,V}^{-1}$ je podan s predpisom, ki funkciji $g\colon S \to \Phi_1(V)$ priredi linearno preslikavo, na bazi določeno s predpisom $e_a \mapsto e_{g(a)}$. Prepričajmo se, da β določa adjunkcijo $\Phi_2 \dashv \Phi_1$. Naj bosta torej S, S' množici, V, V' vektorska prostora, $h\colon S' \to S$ funkcija, $g\colon V \to V'$ in $f\colon \Phi_2(S) \to V$ pa linearni preslikavi. Prepričati se moramo, da komutira spodnji diagram.

$$\begin{tikzcd} \Phi_1(V') & \Phi_1(V) \arrow[l, "\Phi_1(g)"'] & \\ & S \arrow[ul, "\beta_{S,V'}(g\circ f)"] \arrow[u, "\beta_{S,V}(f)"'] & S' \arrow[l, "h"] \arrow[ul, "\beta_{S',V}(f\circ\Phi_2(h))"'] \end{tikzcd}$$

Izračunamo lahko

$$\Phi_1(g)(\beta_{S,V}(f)(a)) = \Phi_1(g)(f(e_a)) = g(f(e_a)) = \beta_{S,V'}(g \circ f)(a),$$
$$\beta_{S,V}(f)(h(b)) = f(e_{h(b)}) = f(\Phi_2(h)(e_b)) = \beta_{S',V}(f \circ \Phi_2(h))(b),$$

zato je res $\Phi_2 \dashv \Phi_1$.

Da se pojma adjungiranosti, podana v definicijah 12 in 13, ujemata v primeru para (Φ_2, Φ_1), ni naključje, kot nam pove spodnja trditev.

Trditev 5. *Adjunkcija med kategorijama $\mathcal{C}$ in $\mathcal{D}$ po definiciji 12 na kanoničen način določa natanko eno adjunkcijo med njima po definiciji 13, in obratno.*

Dokaz. Denimo, da med kategorijama $\mathcal{C}$ in $\mathcal{D}$ obstaja adjunkcija glede na definicijo 12. Torej obstajta funktorja $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ in $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ ter enota $\eta\colon 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ in koenota $\varepsilon\colon FG \Rightarrow 1_{\mathcal{D}}$. Za $x \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$ in $y \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{D}$ definirajmo predpis, ki $f\colon F(y) \to x$ slika v $\beta_{x,y}(f) = G(f) \circ \eta_y$. Inverzen predpis $g\colon y \to G(x)$ slika v $\beta^{-1}_{x,y}(g) = \varepsilon_x \circ F(g)$. Velja

$$G(g) \circ \beta_{x,y}(f) = G(g) \circ G(f) \circ \eta_y = G(g \circ f) \circ \eta_y = \beta_{x,y'}(g \circ f)$$

in

$$\beta_{x,y}(f) \circ h = G(f) \circ \eta_y \circ h = G(f) \circ G(F(h)) \circ \eta_{x'} = G(f \circ F(h)) \circ \eta_{x'} = \beta_{x',y}(f \circ F(h)),$$

zato velja $F \dashv G$ po definiciji 13.

Denimo, da med kategorijama $\mathcal{C}$ in $\mathcal{D}$ obstaja adjunkcija glede na definicijo 13. Torej obstajata funktorja $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ in $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ ter ustrezne bijekcije $\beta_{x,y}$. Komponentne morfizme enote η določimo s predpisom $\eta_x = \beta_{x,F(x)}(1_{F(x)}) \in \mathcal{C}(x, G(F(x)))$, komponentne morfizme koenote pa s predpisom $\varepsilon_y = \beta^{-1}_{G(y),y}(1_{G(y)}) \in \mathcal{D}(F(G(y)), y)$. Ker β določa adjunkcijo $F \dashv G$, za vse morfizme $f\colon x \to x'$ v $\mathcal{C}$ komutira spodnji diagram.

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\beta_{x,F(x)}(1_{F(x)})"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\beta_{x,F(x')}(F(f))" description] & G(F(x)) \arrow[d, "G(F(f))"] \\
x' \arrow[r, "\beta_{x',F(x')}(1_{F(x')})"'] & G(F(x'))
\end{tikzcd}$$

Torej je η naravna transformacija. Podobno se prepričamo, da je ε naravna transformacija. Naj bo $f\colon F(x) \to y$ morfizem v $\mathcal{D}$ in $g\colon x \to G(y)$ morfizem v $\mathcal{C}$. Iz diagrama v definiciji 13, ki mu zadošča β, sledi $\beta_{x,y}(f) = G(f) \circ \eta_x$ in $g = \beta_{x,y}(\varepsilon_y \circ F(g))$, zato velja

$$1_{F(x)} = \beta^{-1}_{F(x),x}(\eta_x) = \varepsilon_{F(x)} \circ F(\eta_x).$$

Podobno vidimo, da velja $1_{G(y)} = G(\varepsilon_y) \circ \eta_{G(y)}$. Torej je $F \dashv G$ po definiciji 12. ■

Ena od ključnih lastnosti adjungiranih funktorjev je, da ohranjajo limite oziroma kolimite.

Izrek 6. *Naj bosta $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ in $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funktorja, da je $F \dashv G$. Tedaj je G zvezen, F pa kozvezen.*

Dokaz. Naj bo $D\colon \mathcal{I} \to \mathcal{D}$ diagram in $(\lim D, \mu)$ njegova limita. Trdimo, da je $(G(\lim D), G(\mu))$ limita diagrama $G \circ D\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$. Naj bo $x \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ in $\alpha\colon \underline{x} \Rightarrow G \circ D$ naravna transformacija. Komponentne morfizme $\alpha_i\colon x \to G(D(i))$ lahko preslikamo z $\beta^{-1}_{x,D(i)}$, da dobimo morfizme $\beta^{-1}_{x,D(i)}(\alpha_i)\colon F(x) \to D(i)$. Naj bo $g\colon i \to j$ morfizem v $\mathcal{I}$. Tedaj velja $\alpha_j = G(D(g)) \circ \alpha_i$. Velja

$$\beta_{x,D(j)}(D(g) \circ \beta^{-1}_{x,D(i)}(\alpha_i)) = G(D(g)) \circ \alpha_i,$$

zato je

$$D(g) \circ \beta^{-1}_{x,D(i)}(\alpha_i) = \beta^{-1}_{x,D(j)}(G(D(g)) \circ \alpha_i) = \beta^{-1}_{x,D(j)}(\alpha_j).$$

Komutira torej spodnji diagram.

$$\begin{tikzcd}
 & F(x) \arrow[dl, "\beta^{-1}_{x,D(i)}(\alpha_i)"'] \arrow[dr, "\beta^{-1}_{x,D(j)}(\alpha_j)"] & \\
D(i) \arrow[rr, "D(g)"'] & & D(j)
\end{tikzcd}$$

Sledi, da nabor $\{\beta^{-1}_{x,D(i)}(\alpha_i)\}_{i \in I}$ določa naravno transformacijo $\widetilde{\alpha}\colon \underline{F(x)} \Rightarrow D$. Ker je $\lim D$ limita, obstaja natanko en morfizem $h\colon F(x) \to \lim D$, da je $\widetilde{\alpha} = \mu \circ f$. Ker komutira spodnji diagram, je $\beta_{x,\lim D}(h)\colon x \to G(\lim D)$ enolični morfizem, za katerega je $\alpha = G(\mu) \circ \beta_{x,\lim D}(h)$.

$$\begin{tikzcd}
G(D(i)) & G(\lim D) \arrow[l, "G(\mu)_i"'] \\
 & x \arrow[ul, "\alpha_i"] \arrow[u, "\beta_{x,\lim D}(h)"']
\end{tikzcd}$$

Dokaz za kozveznost F je dualen. ■

Vprašamo se lahko, če velja obrat te trditve, tj. če so vsi zvezni funktorji desni adjungiranci. Izkaže se, da to velja ob določenih predpostavkah. Eden od izrekov, ki govori o tem, je Freydov izrek o adjungiranih funktorjih, katerega formulacijo in dokaz najdemo v poglavju 5.6 knjige [1].

7. Adjungirani funktorji med urejenostnimi kategorijami

Zgled 14. Poiščimo karakterizacijo parov adjungiranih funktorjev med urejenostnimi kategorijami. Naj bosta $(A, \leq_A)$ in $(B, \leq_B)$ delno urejeni množici, $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ pa pripadajoči kategoriji. Par funktorjev $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ in $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ je adjungiran natanko tedaj, ko za vse $a \in A$ ter $b \in B$ obstaja bijekcija med $\mathcal{B}(F(a), b)$ in $\mathcal{A}(a, G(b))$. To je ekvivalentno spodnji izjavi.

$$\text{Za vse } a \in A \text{ in } b \in B \text{ velja } F(a) \leq_B b \iff a \leq_A G(b). \tag{1}$$

Zgled 15. Sedaj v urejenostnih kategorijah opišimo še limite in kolimite. Naj bo $D\colon \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ diagram in denimo, da obstaja njegova limita $\lim D$. Le-ta je element A, ki je manjši od vseh elementov v sliki D, in če je še kak $a \in A$ manjši od vseh elementov v sliki D, tedaj je $\lim D$ večji od a. Torej je $\lim D$ natanko infimum množice $\{F(i) \mid i \in \operatorname{Ob} \mathcal{I}\}$. Podobno vidimo, da je kolimita diagrama, če obstajaja, supremum te iste množice.

Izrek 7 (izrek o adjungiranih funktorjih). *Če je $\mathcal{A}$ urejenostna kategorija z vsemi kolimitami, potem je $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ levi adjungiranec natanko tedaj, ko je kozvezen. Če je $\mathcal{B}$ urejenostna kategorija z vsemi limitami, je funktor $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ desni adjungiranec natanko tedaj, ko je zvezen.*

Dokaz. Naj kategoriji $\mathcal{A}$ pripada delno urejena množica $(A, \leq_A)$, kategoriji $\mathcal{B}$ pa $(B, \leq_B)$. Implikaciji v desno sledita iz izreka 6. Pokažimo še implikaciji v levo. Denimo, da v $\mathcal{A}$ obstajajo vsi supremumi in naj bo $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funktor, ki ohranja kolimite. Definirajmo $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ s predpisom

$$G(b) = \sup\{a \mid a \in A,\ F(a) \leq_B b\}.$$

Ker v $\mathcal{A}$ obstajajo vsi supremumi, je predpis dobro definiran. Če je $b \leq_B b'$, je

$$\{a \mid a \in A,\ F(a) \leq_B b\} \subset \{a \mid a \in A,\ F(a) \leq_B b'\},$$

zato G ohranja urejenost in je funktor. Pokažimo, da je $F(a_0) \leq_B b_0 \iff a_0 \leq_A G(b_0)$. Če je $F(a_0) \leq_B b_0$, potem je $a_0 \in \{a \mid a \in A,\ F(a) \leq_B b_0\}$, kar pomeni $a_0 \leq_A G(b_0)$. Če je $a_0 \leq_A G(b_0)$, je $F(a_0) \leq_B F(G(b_0))$, zato zadošča pokazati $F(G(b_0)) \leq_B b_0$. Ker F ohranja supremume, je

$$F(G(b_0)) = F(\sup\{a \mid a \in A,\ F(a) \leq_B b_0\}) = \sup\{F(a) \mid a \in A,\ F(a) \leq_B b_0\} \leq_B b_0,$$

zato je res $F \dashv G$. Dokaz za drugi del trditve je dualen. ■

Za konec si oglejmo sledeči primer. Najprej topološkemu prostoru X priredimo delno urejeno množico $(Cl\,(X)\,, \subseteq)$ zaprtih podmnožic X glede na relacijo vsebovanosti. S $\mathcal{C}l(X)$ označimo inducirano kategorijo, kot smo opisali v zgledu 3. Funkciji (ne nujno zvezni) $\phi\colon X \to Y$ med topološkima prostoroma X in Y priredimo funkciji

$$\begin{aligned} &t_\phi\colon Cl\,(X) \to Cl\,(Y),\, U \mapsto \overline{\phi\,(U)},\\ &t^\phi\colon Cl\,(Y) \to Cl\,(X),\, V \mapsto \overline{\phi^{-1}\,(V)}. \end{aligned}$$

Ker za $U \subseteq U'$ velja $\phi(U) \subseteq \phi(U')$, velja tudi $\overline{\phi(U)} \subseteq \overline{\phi(U')}$. Torej t_ϕ ohranja urejenost, zato inducira funktor $T_\phi\colon \mathcal{C}l(X) \to \mathcal{C}l(Y)$. Podobno premislimo, da tudi t^ϕ ohranja urejenost in zato inducira funktor $T^\phi\colon \mathcal{C}l(Y) \to \mathcal{C}l(X)$.

Izrek 8. *Naj bosta X in Y topološka prostora in naj bo $\phi\colon X \to Y$ funkcija. Tedaj je ϕ zvezna natanko tedaj, ko je par $\left(T_\phi, T^\phi\right)$ adjungiran.*

Dokaz. S pomočjo zveze (1) lahko adjungiranost karakteriziramo na sledeči način:

$$\begin{aligned} \left(T_\phi, T^\phi\right) \text{ je adjungiran } &\iff \left(\forall U \in \mathcal{C}l\,(X)\,.\forall V \in \mathcal{C}l\,(Y) : \overline{\phi\,(U)} \subseteq V \iff U \subseteq \overline{\phi^{-1}\,(V)}\right)\\ &\iff \left(\forall U \in \mathcal{C}l\,(X)\,.\forall V \in \mathcal{C}l\,(Y) : \phi\,(U) \subseteq V \iff U \subseteq \overline{\phi^{-1}\,(V)}\right)\\ &\iff \left(\forall U \in \mathcal{C}l\,(X)\,.\forall V \in \mathcal{C}l\,(Y) : U \subseteq \overline{\phi^{-1}\,(V)} \implies \phi\,(U) \subseteq V\right). \end{aligned}$$

Spomnimo se, da je funkcija $\phi\colon X \to Y$ zvezna natanko tedaj, ko za vsak $A \subseteq X$ velja

$$\phi\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{\phi\,(A)}.$$

Pokažimo najprej implikacijo v desno. Naj bo $\phi\colon X \to Y$ zvezna in denimo, da za $U \in \mathcal{C}l(X)$ ter $V \in \mathcal{C}l(Y)$ velja $U \subseteq \overline{\phi^{-1}\,(V)}$. Potem velja

$$\phi\,(U) \subseteq \phi\left(\overline{\phi^{-1}\,(V)}\right) \subseteq \overline{\phi\,(\phi^{-1}\,(V))} \subseteq V,$$

iz česar sledi, da je par (T_ϕ, T^ϕ) adjungiran.

Pokažimo še implikacijo v levo. Naj bo par $\left(T_\phi, T^\phi\right)$ adjungiran in vzemimo poljubno podmnožico $A \subseteq X$. Velja

$$A \subseteq \phi^{-1}\left(\phi(A)\right) \subseteq \phi^{-1}\left(\overline{\phi(A)}\right),$$

zato je

$$\overline{A} \subseteq \overline{\phi^{-1}\left(\overline{\phi\left(A\right)}\right)}.$$

Ker je $\overline{A} \in \mathcal{C}l(X)$ ter $\overline{\phi(A)} \in \mathcal{C}l(Y)$, iz karakterizacije adjungiranosti iz začetka dokaza sledi

$$\phi\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{\phi\left(A\right)}.$$

Torej je ϕ zvezna. ■

LITERATURA

[1] Saunders Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag New York, 1998.

[2] Edward S. Letzter, *Continuity is an adjoint functor*, The American Mathematical Monthly **122** (2014), 70 – 74.