DIRICHLETOV PROBLEM ZA ENOTSKI DISK

MATEJ NOVOSELEC

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

35J15, 35J25, 30B40, 42B37

Namen članka je formulirati, ter rešiti Dirichletov problem za enotski disk. Začetni razdelek je namenjen hitri ponovitvi osnovnega predznanja o harmoničnih funkcijah. Po formulaciji v drugem razdelku sledi diskusija, ki nas bo pripeljala do vpeljave pojmov Poissonovega jedra in Poissonovega integrala. Spoznali bomo nekaj ključnih lastnosti vsakega izmed pojmov, ki nam bodo zagotovile obstoj in omogočale zapis rešitve Dirichletovega problema na enotskem disku. V zaključku članka komentiramo obstoj in enoličnost rešitve problema v širšem kontekstu študije harmoničnih funkcij.

DIRICHLET'S PROBLEM FOR THE UNIT DISK

The purpose of the article is to formulate and solve the Dirichlet's problem for the unit disk. The initial section is intended for a quick review of preliminaries related to harmonic functions. After the formulation in the second section, a discussion follows, which will lead us to the introduction of the concepts of Poisson's kernel and Poisson's integral. We will get to know some key properties of each concept, which will provide us with an existence of the solution to the Dirichlet's problem on the unit disk. At the end of the article, we comment on the existence and uniqueness of the solution to the problem in the wider context of the study of harmonic functions.

1. Uvod

Pojem harmonične funkcije bralcu gotovo ni neznan - gre za funkcije, ki zadoščajo Laplaceovi parcialni diferencialni enačbi. Omenimo le, da se bomo za potrebe članka omejili na harmonične funkcije dveh realnih ali ene kompleksne spremenljivke. Ob omenjeni zožitvi navedimo nekaj splošno znanih lastnosti, ki jih bomo znotraj članka večkrat uporabili.

Trditev 1. *Naj bo $U \subseteq \mathbb{C}$ odprta množica. Naj bo $f = u + iv$ holomorfna funkcija, u in v pa realni funkciji, definirani na U. Potem sta funkciji u in v na U harmonični.*

Trditev 2. *Naj bo u realna harmonična funkcija, definirana na zvezdastem območju D. Potem za u na D obstaja harmonična konjugiranka v in je do konstante natančno enolično določena.*

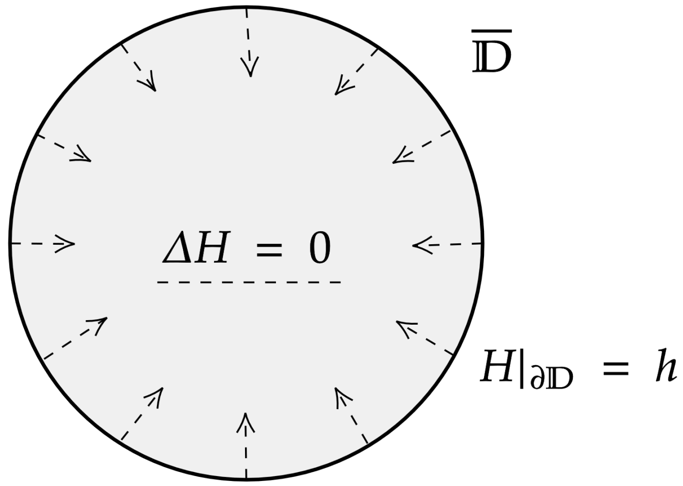
Trditev 3 (Princip maksima za harmonične funkcije). *Naj bo h kompleksna funkcija, definirana na območju D. Naj bo funkcija h na D harmonična in naj obstaja $M \in \mathbb{R}$, da velja $|h(z)| \leq M$ za vsak $z \in D$. Če obstaja $z_0 \in D$, da je $|h(z_0)| = M$, potem je funkcija h na D konstantna.*

Posledica 4. *Naj bo h kompleksna funkcija, definirana na omejenem območju D. Naj bo h zvezna na $\overline{D}$ in naj bo na D harmonična. Če obstaja $M \in \mathbb{R}$, da velja $|h(z)| \leq M$ za vsak $z \in \partial D$, potem velja $|h(z)| \leq M$ za vsak $z \in \overline{D}$.*

2. Formulacija problema

Začnimo s formulacijo problema, ki bo skozi članek motiviral vpeljavo novih pojmov. Pristop je povzet po [2, poglavje 10.1.], bralec pa si lahko nekoliko drugačen pristop ogleda v [3, stran 3 in 4] ali [5, stran 159 in 160].

Naj bo $\mathbb{D}$ enotski disk. Zvezno kompleksno funkcijo h, definirano na $\partial\mathbb{D}$, bi želeli razširiti do funkcije H, ki bo harmonična na $\mathbb{D}$ in zvezna na $\overline{\mathbb{D}}$.



Slika 1. Dirichletov problem za enotski disk, z robnim pogojem h.

Problem je grafično prikazan na sliki 1. Vredno je omeniti, da lahko na Dirichletov problem za enotski disk gledamo tudi iz stališča teorije diferencialnih enačb. Gre za problem iskanja funkcije, ki na notranjosti območja reši Laplaceovo diferencialno enačbo ob robnem pogoju, ki ga določa podana funkcija na robu območja. V našem primeru je notranjost območja kar notranjost enotskega diska, robni pogoj pa podaja zvezna funkcija na enotski krožnici. Navadno se v teoriji parcialnih diferencialnih enačb srečamo s tako imenovanimi dobro postavljenimi matematičnimi problemi. V nadaljevanju se bomo seznanili z njihovo definicijo, ki je navedena v [1, stran 7], ter pokazali, da zgoraj zastavljen Dirichletov problem za enotski disk ustreza definiciji.

Definicija 1 (J. Hadamard). Pravimo, da je matematičen problem parcialnih diferencialnih enačb z robnimi in začetnimi pogoji *dobro postavljen*, če zanj velja

A) rešitev problema obstaja,

B) rešitev problema je enolično določena,

C) rešitev je zvezno odvisna od začetnih podatkov problema.

Lema 5. *Če rešitev za Dirichletov problem na enotskem disku obstaja, je enolično določena.*

Dokaz. Denimo, da obstajata dve različni rešitvi, H_1 in H_2 Dirichletovega problema za enotski disk z začetnim pogojem h. Oglejmo si razliko $H_1 - H_2$. Vemo, da je njuna razlika na $\partial\mathbb{D}$ enaka 0, saj sta tam enaki h. Ker sta funkciji H_1 in H_2 na $\mathbb{D}$ harmonični, je zaradi linearnosti Laplaceovega operatorja tudi njuna razlika harmonična funkcija. Po trditvi 3, oziroma principu maksima za harmonične funkcije sledi, da je $H_1 - H_2 \equiv 0$ tudi na $\mathbb{D}$. Enakost H_1 in H_2 tudi na $\mathbb{D}$ nas pripelje v protislovje. ■

Lema 5 nam pove, da je rešitev problema največ ena, zato se je dovolj posvetiti konstrukciji potencialne rešitve. Opazimo, da lahko točke $z \in \partial\mathbb{D}$ zapišemo kot $z = e^{i\theta}$, kjer $\theta \in [0, 2\pi]$. Funkcijo $h(z),\ z \in \partial\mathbb{D}$ lahko tako pišemo kot kompozitum $h\big(e^{i\theta}\big)\ ,\ \theta \in [0, 2\pi]$.

Poskusimo skonstruirati harmonično razširitev, ki bo zadoščala Dirichletovemu problemu na enotskem disku za zvezno funkcijo h. Za začetek se posvetimo enostavnim primerom in si šele za tem teorijo oziroma konstrukcijo oglejmo v splošnem.

Naravno je za enostavne zvezne funkcije, definirane na $\partial\mathbb{D}$, vzeti kar polinome. Zgornji komentar nam pove, da je polinomska spremenljivka lahko kar $e^{i\theta}$, kjer $\theta \in [0, 2\pi]$. Zaradi linearnosti Laplaceovega operatorja se problem prevede na iskanje rešitve za monome. Zato si oglejmo funkcije oblike $h\big(e^{i\theta}\big) = e^{ik\theta},\ k \in \mathbb{Z}$ ter za njih poskusimo skonstruirati želeno razširitev. Hitro opazimo, da se nam v tem primeru pojavlja preprosta eksplicitna razširitev s predpisom $H\big(re^{i\theta}\big) = r^{|k|}e^{ik\theta}$, za $r \in [0, 1]$ in $\theta \in [0, 2\pi]$. Tako predpisana razširitev je za $k \geq 0$ na $\mathbb{D}$ harmonična, saj je $r^k e^{ik\theta} = z^k$ celo holomorfna funkcija in zato harmonična. Pri $k < 0$ dobimo razširitev $r^{-k}e^{ik\theta} = \overline{z}^{-k}$, ki v splošnem ni holomorfna, a je kljub temu harmonična. Gre namreč za monom v konjugirani spremenljivki, harmoničnost katerega lahko preverimo po definiciji prek parcialnih odvodov. Obenem je za vsak $k \in \mathbb{Z}$ razširitev zvezna na $\overline{\mathbb{D}}$ in se na $\partial\mathbb{D}$ ujema z začetnimi pogoji. Razširitev torej zadošča pogojem za rešitev Dirichletovega problema na enotskem disku, ki je po lemi 5 enolično določena. Ko upoštevamo linearnost Laplaceovega operatorja za začetne funkcije oblike $h\big(e^{i\theta}\big) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{ik\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]$ dobimo harmonično razširitev s predpisom $H\big(re^{i\theta}\big) = \sum_{k=-N}^{N} a_k r^{|k|} e^{ik\theta},\ r \in [0, 1],\ \theta \in [0, 2\pi]$.

Smiselno bi bilo koeficiente a_k izraziti direktno prek funkcije h. V ta namen si oglejmo

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\theta} e^{-ik\theta} d\theta\ , \quad \text{kjer } k, j \in \mathbb{Z}\ .$$

Prek integracije zapisane kompleksne funkcije preverimo tako imenovano ortogonalno relacijo med kompleksnimi eksponenti

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\theta} e^{-ik\theta}\ \frac{d\theta}{2\pi} = \begin{cases} 1\ , & j = k \\ 0\ , & j \neq k \end{cases}.$$

Zgornja relacija nam pri $h\big(e^{i\theta}\big) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{ik\theta}$ omogoča izražavo koeficientov a_k kot

$$a_k = \int_{-\pi}^{\pi} h\Big(e^{i\theta}\Big)\ e^{-ik\theta}\ \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Z uporabo zgornje zveze izrazimo

$$\sum_{k=-N}^{N} a_k r^{|k|} e^{ik\theta} = \sum_{k=-N}^{N} \left(\int_{-\pi}^{\pi} h\big(e^{i\varphi}\big)\ e^{-ik\varphi}\ \frac{d\varphi}{2\pi} \right) r^{|k|} e^{ik\theta}.$$

Zamenjamo vsoto in integral ter množico, po kateri teče indeks vsote, razširimo na vsa cela števila. Pri tem se rezultat ne spremeni, saj je sumand pri dodanih indeksih enak nič. Dobimo ekspliciten zapis

$$\widetilde{h}(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} h\big(e^{i\varphi}\big) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{-ik\varphi} e^{ik\theta} \right) \frac{d\varphi}{2\pi}, \quad re^{i\theta} \in \overline{\mathbb{D}}. \tag{1}$$

Zgornji ekspliciten zapis razširitve je le drugačen zapis že komentirane rešitve Dirichletovega problema na enotskem disku za polinom v spremenljivki $e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Sedaj bomo zgornjo funkcijo, ki smo jo na intuitiven način konstruirali s pomočjo predpostavljene polinomske oblike funkcije h, vzeli za definicijo novega pojma in z njegovo pomočjo prišli do razširitve za splošne zvezne funkcije h.

3. Poissonovo jedro

Osredotočimo se najprej na vrsto v integralu zapisa (1).

Definicija 2. *Poissonovo jedro* je funkcija, definirana s predpisom

$$P_r(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik\theta}, \text{ kjer je } \theta \in [-\pi, \pi] \text{ in } 0 \leq r < 1.$$

Opomba 1. Na Poissonovo jedro lahko gledamo kot na funkcijo dveh spremenljivk, θ in r, ali pa kot na družino funkcij, indeksiranih s parametrom r.

Smiselno se je vprašati, ali za vsako vrednost iz definicijskega območja Poissonovega jedra vrsta na desni strani enakosti v definiciji sploh konvergira. Potencialne strahove pomiri naslednja trditev.

Trditev 6. *Naj bo $\rho < 1$. Vrsta v definiciji Poissonovega jedra konvergira enakomerno na množici $\{(r,\theta) \mid r \in [0,\rho],\ \theta \in [0,2\pi]\}$.*

Dokaz. Na množici $\{(r,\theta) \mid r \in [0,\rho],\ \theta \in [0,2\pi]\}$ velja $|r^{|k|}e^{ik\theta}| \leq \rho^{|k|}$. Ker je $\rho < 1$, številska vrsta $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho^{|k|}$ konvergira. Po Weierstrassovem M-testu zato Poissonovo jedro konvergira enakomerno na množici $\{(r,\theta) \mid r \in [0,\rho],\ \theta \in [0,2\pi]\}$. ■

Poissonovo jedro lahko zapišemo na več načinov. Če vrsto v definiciji Poissonovega jedra razbijemo na tri dele, glede na predznačenost indeksa člena vrste, za $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ dobimo

$$P_r(\theta) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{ik\theta} + \sum_{j=1}^{\infty} r^j e^{-ij\theta} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} z^k + \sum_{j=1}^{\infty} \overline{z}^j. \tag{2}$$

Ker je Poissonovo jedro definirano na notranjosti enotskega diska, kjer je absolutna vrednost kompleksne spremenljivke manjša od ena, obe vrsti v zapisu (2) konvergirata. Ko ju seštejemo s formulo za geometrijsko vrsto, dobimo

$$P_r(\theta) = 1 + \frac{z}{1-z} + \frac{\overline{z}}{1-\overline{z}} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}\,, \qquad z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}. \tag{3}$$

Opazimo, da bi (3) lahko zapisali tudi nekoliko drugače. Velja

$$\begin{aligned} P_r(\theta) &= 1 + \frac{z}{1-z} + \frac{\overline{z}}{1-\overline{z}} = 1 + \left(\frac{z}{1-z}\right) + \overline{\left(\frac{z}{1-z}\right)} \\ &= 1 + 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{z}{1-z}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{1+z}{1-z}\right], \qquad z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}. \end{aligned} \tag{4}$$

Enakost $|1-z|^2 = (\overline{1-z})(1-z) = (1-\overline{z})(1-z) = 1 + r^2 - 2r\cos\theta$ pa nam omogoči zapis

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}\,, \qquad r \in [0,1),\ \theta \in [0,2\pi]. \tag{5}$$

Preden se lotimo uporabe Poissonovega jedra, si s pomočjo zgornjih zapisov oglejmo še nekaj njegovih lastnosti, ki so zbrane v spodnjih trditvah.

Trditev 7. *Poissonovo jedro ima naslednje lastnosti:*

a) kot funkcija spremenljivke θ je periodično s periodo 2π,

b) za vsak $r \in [0,1)$ in vsak $\theta \in [0,2\pi]$ je $P_r(-\theta) = P_r(\theta)$,

c) za vsak $r \in [0,1)$ je funkcija P_r na intervalu $\theta \in [-\pi,0]$ naraščajoča in na intervalu $\theta \in [0,\pi]$ padajoča,

d) za vsak $r \in [0,1)$ in vsak $\theta \in [0,2\pi]$ je $P_r(\theta) > 0$,

e) za vsak $r \in [0,1)$ velja $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\frac{d\theta}{2\pi} = 1$.

Dokaz. Lastnosti a), b) in c) sledijo iz zapisa (5). Opazimo, da je v tem zapisu od θ odvisen le člen s funkcijo kosinus. Ta zagotavlja 2π-periodičnost in sodost ter podaja želen interval naraščanja in padanja Poissonovega jedra v odvisnosti od spremenljivke θ.

Za dokaz točke d) si oglejmo zapis (3). Ker je Poissonovo jedro definirano na notranjosti enotskega diska, je absolutna vrednost v zapisu uporabljene kompleksne spremenljivke manjša od ena. Sledi, da sta števec in imenovalec v zapisu strogo pozitivna, kar dokazuje trditev.

Pri dokazu točke e) si pomagajmo z izpeljavo rešitve za Dirichletov problem na enotskem disku. Za robni pogoj bomo na robu enotskega diska vzeli funkcijo, ki je identično enaka 1. Označimo torej $h(z) = 1,\ z \in \partial\mathbb{D}$. Opazimo, da je $H(z) = 1,\ z \in \overline{\mathbb{D}}$ trivialna rešitev tako postavljenega Dirichletovega problema za enotski disk. Lema 5 nam pove, da je rešitev za tako podan Dirichletov problem enolično določena. Vemo tudi, da je harmonična razširitev eksplicitno podana prek formule (1). Velja torej

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik(\theta-\varphi)} \right) \frac{d\varphi}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - \varphi) \frac{d\varphi}{2\pi} \ .$$

Sedaj v integral uvedemo novo spremenljivko $\tau = \theta - \varphi$. Zaradi periodičnosti Poissonovega jedra velja

$$1 = \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} P_r(\tau)\ \frac{d\tau}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\tau)\ \frac{d\tau}{2\pi},$$

kar smo trdili. ■

Posledica 8. *Za vsak $r \in [0, 1)$ funkcija $\frac{1}{2\pi} P_r$ določa gostoto zvezno porazdeljene slučajne spremenljivke.*

Dokaz. Iz zapisa (5) je jasno, da je pri poljubnem $r \in [0, 1)$ zapisana funkcija v odvisnosti od θ zvezna na intervalu $[-\pi, \pi]$, točki d) in e) trditve 7 pa nam dokazujeta, da je na definicijskem območju funkcija strogo pozitivna in se pointegrira v 1. ■

Trditev 9. *Naj bo $\delta > 0$. Potem je* $\lim_{r\to 1} \max\{P_r(\theta) \mid \delta \leq |\theta| \leq \pi\} = 0$.

Dokaz. Ker je za vsak r Poissonovo jedro v odvisnosti od spremenljivke θ na intervalu $[-\pi, \pi]$ zvezna funkcija, maksimum na kompaktu $[-\pi, \pi]$ gotovo zavzamemo. Točki a) in b) trditve 7 nam povesta, da bomo za vsak r maksimum zavzeli kar v δ. Oglejmo si torej

$$P_r(\delta) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos\delta} \ .$$

Ker je $\delta > 0$, bo imenovalec ulomka strogo pozitiven, števec ulomka pa gre proti 0, ko gre r proti 1. Sledi, da gre $\max\{P_r(\theta) \mid \delta \leq |\theta| \leq \pi\} = P_r(\delta)$ proti 0, ko gre r proti 1. ■

Posledica 10. *Naj bo $\delta > 0$. Potem je*

$$\lim_{r\to 1} \int_{\{\pi \geq |\theta| \geq \delta\}} P_r(\theta)\ \frac{d\theta}{2\pi} = 0 \ .$$

Dokaz. Ker je interval, po katerem integriramo zaprt, Poissonovo jedro pa v odvisnosti od spremenljivke θ zvezna funkcija, za vsak $r \in [0, 1)$ obstaja $c_r \in \mathbb{R}$, da velja $c_r = \max\{P_r(\theta) \mid \delta \leq |\theta| \leq \pi\}$. Zato velja

$$\int_{\{\pi \geq |\theta| \geq \delta\}} P_r(\theta)\ \frac{d\theta}{2\pi} \leq \int_{\{\pi \geq |\theta| \geq \delta\}} c_r\ \frac{d\theta}{2\pi} \leq c_r.$$

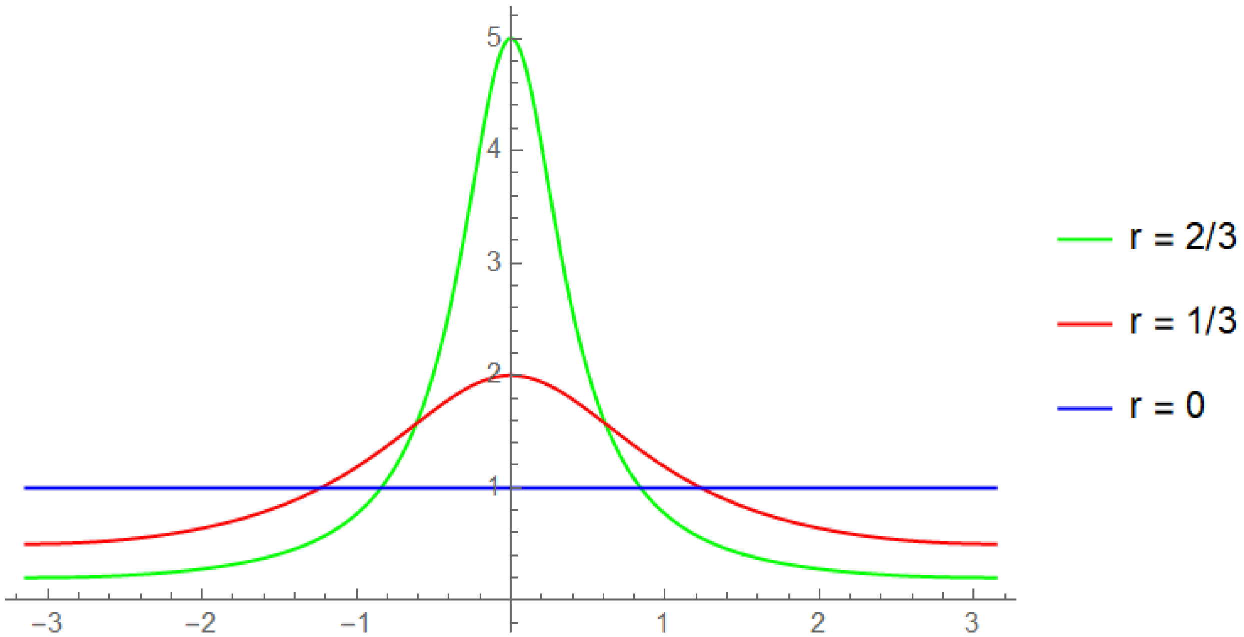
Sedaj uporabimo trditev 9, ki nam pove, da gre c_r proti 0, ko gre r proti 1. Sledi, da gre tudi zapisan integral proti 0, ko gre r proti 1. ■

Oglejmo si lastnosti družine $\left\{\frac{1}{2\pi}P_r \mid r \in [0,1)\right\}$. Trditev 7 nam pove, da za vsak $r \in [0,1)$ velja $\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} P_r = 1$ in $P_r(\theta) > 0$ za vsak $\theta \in [0, 2\pi]$, zato velja tudi $\sup\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} |P_r| \mid r \in [0,1)\right\} = 1$. Družino funkcij, ki obenem zadošča tudi lastnosti iz posledice 10, imenujeno približna enota. Bralec si o tem lahko nekoliko več prebere v [4].

Vredno je, s pomočjo zgoraj zapisanih trditev, komentirati tudi obnašanje funkcije Poissonovega jedra, ko pošljemo r proti 1. Trditev 9 nam pove, da se v odvisnosti od spremenljivke θ vrednosti funkcije, ki so poljubno malo oddaljene od izhodišča, približujejo 0. Zapisano dodatno potrdi tudi posledica 10. Oglejmo si sedaj, kaj se zgodi z vrednostjo funkcije pri $\theta = 0$, ko pošljemo r proti 1. Iz zapisa (5) vemo, da velja

$$P_r(0) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r} = \frac{1-r^2}{(1-r)^2} = \frac{1+r}{1-r}, \quad r \in [0,1).$$

Ko gre r proti 1, gre torej $P_r(0)$ proti ∞. Zapisani opažanji nam skupaj z ugotovitvijo iz točke e) trditve 7 nakazujeta, da se Poissonovo jedro, ko pošljemo r proti 1, približuje tako imenovani Diracovi delti. O tem si bralec več lahko prebere v [7] in [8].



Slika 2. Graf Poissonovega jedra glede na vrednost spremenljivke r.

Navedene lastnosti Poissonovega jedra so tudi dobro razvidne na sliki 2.

Trditev 11. *Poissonovo jedro je na enotskem disku harmonična funkcija.*

Dokaz. Dovolj je pokazati, da lahko Poissonovo jedro zapišemo kot realni del holomorfne funkcije, definirane na enotskem disku. Zapis (4) nam pove, da je Poissonovo jedro realni del funkcije $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$, $z \in \mathbb{D}$. Ker je f na enotskem disku tudi holomorfna, je trditev s tem dokazana. ∎

Ker je enotski disk zvezdasto območje, Poissonovo jedro pa po trditvi 11 harmonična funkcija, obstaja harmonična konjugiranka Poissonovega jedra. Opazimo, da smo v zapisu (4) Poissonovo jedro prikladno zapisali kot realni del holomorfne funkcije, zato se nam ponuja harmonična konjugiranka Poissonovega jedra kot imaginarni del zapisane holomorfne funkcije.

Za $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ velja

$$\operatorname{Im}\left[\frac{1+z}{1-z}\right] = \frac{\frac{1+z}{1-z} - \left(\overline{\frac{1+z}{1-z}}\right)}{2i} = \frac{(1+z)(1-\overline{z}) - (1+\overline{z})(1-z)}{|1-z|^2\ 2i}$$
$$= \frac{2(z-\overline{z})}{|1-z|^2\ 2i} = \frac{2\ \operatorname{Im} z}{|1-z|^2} = \frac{2r\sin\theta}{1+r^2-2r\cos\theta}\ .$$

Prav to je motivacija za naslednjo definicijo.

Definicija 3. *Konjugirano Poissonovo jedro* je funkcija, definirana s predpisom

$$Q_r(\theta) = \frac{2r\sin\theta}{1+r^2-2r\cos\theta}\ , \quad r\in[0,1),\ \theta\in[0,2\pi]. \tag{6}$$

Zapišimo zvezi, ki ju narekujeta zgornji komentar in definicija. Velja

$$P_r(\theta) + i\ Q_r(\theta) = \left(\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}\right) + i\left(\frac{2r\sin\theta}{1+r^2-2r\cos\theta}\right) = \frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\ , \quad re^{i\theta}\in\mathbb{D}.$$

Sedaj se vrnimo k reševanju Dirichletovega problema za enotski disk. Spomnimo se, da smo za polinomske funkcije h skonstruirali predpis razširitve, ki je rešila zastavljen problem. Opazimo, da bi si pri zapisu enačbe (1) lahko pomagali z definiranim pojmom Poissonovega jedra. Zapišemo lahko

$$H(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} h\big(e^{i\varphi}\big)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{-ik\varphi}e^{ik\theta}\right)\frac{d\varphi}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} h\big(e^{i\varphi}\big)\, P_r(\theta-\varphi)\frac{d\varphi}{2\pi}, \quad re^{i\theta}\in\overline{\mathbb{D}}.$$

Zgoraj smo z intuitivno izpeljavo nevede že zapisali funkcijo, ki jo bomo sedaj vzeli za definicijo novega pojma. Pokazali bomo, da to tudi pri splošnih zveznih funkcijah omogoča zapis rešitve Dirichletovega problema na enotskem disku.

4. Poissonov integral

Tako kot smo to storili v prejšnem razdelku, začnimo z definicijo novega pojma.

Definicija 4. Naj bo h zvezna funkcija, definirana na robu enotskega diska. *Poissonov integral* funkcije h, ki ga označimo s $\widetilde{h}$, je funkcija, definirana na notranjosti enotskega diska s predpisom

$$\widetilde{h}(z) = \int_0^{2\pi} h\big(e^{i\varphi}\big)\, P_r(\theta-\varphi)\ \frac{d\varphi}{2\pi}\ , \quad z = re^{i\theta}\in\mathbb{D}.$$

Opomba 2. Če v zgornji integral uvedemo novo spremenljivko $\tau = \theta-\varphi$ ter upoštevamo periodičnost Poissonovega jedra, lahko Poissonov integral funkcije h zapišemo tudi kot

$$\widetilde{h}(z) = \int_0^{2\pi} h\big(e^{i(\theta-\varphi)}\big)P_r(\varphi)\ \frac{d\varphi}{2\pi}\ , \quad z = re^{i\theta}\in\mathbb{D}.$$

Natančneje si opisan postopek, ki pripelje do zgornjega zapisa Poissonovega integrala, bralec lahko ogleda v dokazu točke e) trditve 7.

Oglejmo si še nekoliko drugačen zapis Poissonovega integrala za zvezno funkcijo h. Če definiramo funkcijo $f(w) = h\big(e^{iw}\big)$, $w\in[0,2\pi]$, lahko Poissonov integral zapišemo kot

$$\widetilde{h}(z) = \int_0^{2\pi} h\big(e^{i\varphi}\big)\, P_r(\theta-\varphi)\ \frac{d\varphi}{2\pi} = \int_0^{2\pi} f(\varphi)P_r(\theta-\varphi)\ \frac{d\varphi}{2\pi}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[(f * P_r)(\theta)\right] = \frac{1}{2\pi}\left[(P_r * f)(\theta)\right], \quad z = re^{i\theta},\ \theta\in[0,2\pi],\ r\in[0,1). \tag{7}$$

Opomba 3. Zadnja enakost v zgornjem zapisu je posledica komutativnosti konvolucije ter še na nekoliko drugačen način dokazuje zapis iz opombe 2. Velja namreč

$$\begin{aligned}\widetilde{h}\left(re^{i\theta}\right) &= \frac{1}{2\pi}\left[(P_r * f)(\theta)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\varphi)f(\theta-\varphi)\ d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} h\big(e^{i(\theta-\varphi)}\big)P_r(\varphi)\ \frac{d\varphi}{2\pi},\quad z = re^{i\theta},\ \theta\in[0,2\pi],\ r\in[0,1).\end{aligned}$$

Ogledali smo si alternativni zapis Poissonovega integrala s konvolucijo Poissonovega jedra. Smiselno se je vprašati, kako na zgornji postopek zapisa s konvolucijo vpliva zamenjava Poissonovega jedra s konjugiranim Poissonovim jedrom. Opazimo, da lahko po enakem postopku tudi integral s konjugiranim Poissonovim jedrom izrazimo kot konvolucijo. Ponovno definiramo $f(w) = h\big(e^{iw}\big)$, $w\in[0,2\pi]$, ki nam omogoča zapis

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} h\big(e^{i\varphi}\big)\,Q_r(\theta-\varphi)\ \frac{d\varphi}{2\pi} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)Q_r(\theta-\varphi)\ d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[(f*Q_r)(\theta)\right],\quad z = re^{i\theta},\ \theta\in[0,2\pi],\ r\in[0,1).\end{aligned} \tag{8}$$

Nekoliko se posvetimo še lastnostim Poissonovega integrala.

Trditev 12. *Naj bo Φ preslikava, ki zvezni funkciji h, definirani na robu enotskega diska, prireredi njen Poissonov integral $\widetilde{h}$, tj. $\Phi : h \mapsto \widetilde{h}$. Potem velja*

a) Φ je kompleksno linearna preslikava, tj. za vsaka $h_1, h_2 \in C^0(\partial\mathbb{D})$ in vsaka $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ velja $\Phi(c_1h_1 + c_2h_2) = c_1\Phi(h_1) + c_2\Phi(h_2)$,

b) Φ ohranja omejenost, tj. če za $h\in C^0(\partial\mathbb{D})$ in $M\in\mathbb{R}$ velja $|h(z)|\le M$ za vsak $z\in\partial\mathbb{D}$, potem je $|[\Phi(h)](z)|\le M$ za vsak $z\in\mathbb{D}$.

Dokaz. Dokažimo najprej točko a). Naj bosta h_1 in h_2 poljubni zvezni funkciji, definirani na robu enotskega diska, ter c_1, c_2 poljubni kompleksni števili. Potem je na robu enotskega diska zvezna tudi funkcija $c_1h_1 + c_2h_2$. Oglejmo si sedaj najprej Poissonov integral za zapisano linearno kombinacijo. Velja

$$\begin{aligned}\Phi(c_1h_1+c_2h_2)(z) &= \int_{-\pi}^{\pi}\big([c_1h_1+c_2h_2](e^{i\varphi})\big)\,P_r(\theta-\varphi)\ \frac{d\varphi}{2\pi} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\big([c_1h_1](e^{i\varphi})+[c_2h_2](e^{i\varphi})\big)\,P_r(\theta-\varphi)\ \frac{d\varphi}{2\pi} \\ &= c_1\int_{-\pi}^{\pi} h_1(e^{i\varphi})P_r(\theta-\varphi)\ \frac{d\varphi}{2\pi} + c_2\int_{-\pi}^{\pi} h_2(e^{i\varphi})P_r(\theta-\varphi)\ \frac{d\varphi}{2\pi} \\ &= c_1\widetilde{h_1}(z) + c_2\widetilde{h_2}(z) = [c_1\widetilde{h_1} + c_2\widetilde{h_2}](z)\ ,\quad z\in\mathbb{D}.\end{aligned}$$

Po definiciji preslikave Φ sedaj sledi $\Phi(c_1h_1 + c_2h_2) = c_1\Phi(h_1) + c_2\Phi(h_2)$.

Dokažimo še točko b). Naj bo h poljubna omejena zvezna funkcija, definirana na robu enotskega diska. Naj za $M\in\mathbb{R}$ velja $|h(z)|\le M$ za vsak $z\in\partial\mathbb{D}$. Ponovno si najprej oglejmo Poissonov integral funkcije h in uporabimo zapisano neenakost ter točki d) in e) trditve 7. Dobimo

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{h}(z)\right| &= \left|\int_{-\pi}^{\pi} h\big(e^{i\varphi}\big)\,P_r(\theta-\varphi)\ \frac{d\varphi}{2\pi}\right| \le \int_{-\pi}^{\pi}\left|h\big(e^{i\varphi}\big)\right|P_r(\theta-\varphi)\ \frac{d\varphi}{2\pi} \\ &\le M\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\varphi)\ \frac{d\varphi}{2\pi} = M\ ,\quad z\in\mathbb{D}.\end{aligned}$$

Po definiciji preslikave Φ zato $|[\Phi(h)](z)|\le M$ za vsak $z\in\mathbb{D}$. ■

Trditev 13. *Naj bo u realna zvezna funkcija, definirana na $\partial\mathbb{D}$. Potem je Poissonov integral funkcije u na $\mathbb{D}$ harmonična funkcija.*

Dokaz. Pomagajmo si z zapisom (4). Za $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ lahko zapišemo

$$\begin{aligned}\widetilde{u}(z) = \widetilde{u}(re^{i\theta}) &= \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{i\varphi}) P_r(\theta-\varphi)\frac{d\varphi}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{i\varphi})\ \mathrm{Re}\left[\frac{1+re^{i(\theta-\varphi)}}{1-re^{i(\theta-\varphi)}}\right]\frac{d\varphi}{2\pi} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{i\varphi})\ \mathrm{Re}\left[\frac{e^{i\varphi}+re^{i\theta}}{e^{i\varphi}-re^{i\theta}}\right]\frac{d\varphi}{2\pi} = \ \mathrm{Re}\left[\int_{-\pi}^{\pi} u(e^{i\varphi})\left(\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\right)\frac{d\varphi}{2\pi}\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

Tako smo $\widetilde{u}(z)$ za $z \in \mathbb{D}$ izrazili kot realni del holomorfne funkcije, kar dokazuje harmoničnost Poissonovega integrala funkcije u na notranjosti enotskega diska. ■

5. Rešitev Dirichletovega problema na enotskem disku

Vrnimo se h glavnemu namenu članka. Za preproste zvezne funkcije smo že dokazali, da rešitev Dirichletovega problema na enotskem disku obstaja. To nas je pripeljalo do definicije Poissonovega jedra in Poissonovega integrala, s pomočjo katerih bomo sedaj pokazali, da za poljubno zvezno funkcijo obstaja rešitev Dirichletovega problema na enotskem disku.

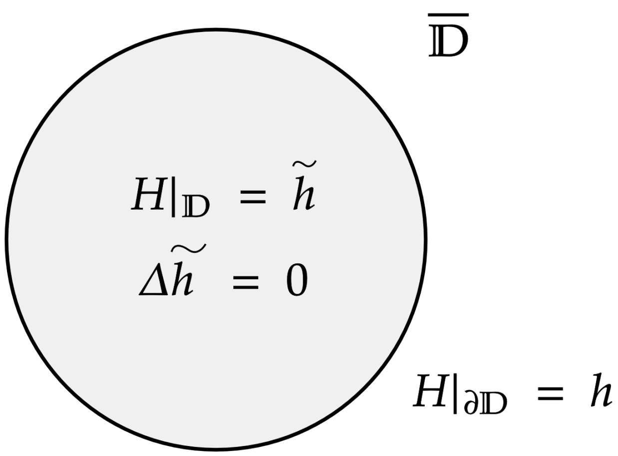
Trditev 14. *Naj bo h zvezna kompleksna funkcija, definirana na $\partial\mathbb{D}$. Rešitev Dirichletovega problema z robnim pogojem h za enotski disk obstaja in je na $\mathbb{D}$ določena kot Poissonov integral funkcije h.*

Opomba 4. Definirajmo funkcijo H na $\overline{\mathbb{D}}$ kot

$$H(z) = \begin{cases} h(z), & z \in \partial\mathbb{D} \\ \widetilde{h}(z), & z \in \mathbb{D} \end{cases},$$

kjer je $\widetilde{h}$ Poissonov integral funkcije.

Zgornja trditev pravi, da je funkcija H rešitev Dirichletovega problema za enotski disk z robnim pogojem h.



Slika 3. Rešitev Dirichletovega problema na enotskem disku, z robnim pogojem h.

Formulacijo problema smo predstavili tudi grafično, slika 3 pa to stori še za rešitev problema.

Dokaz (trditev 14). Trditev bomo dokazali v dveh korakih. Najprej dokažimo, da je Poissonov integral na $\mathbb{D}$ harmonična funkcija. Vemo, da lahko kompleksno funkcijo h razcepimo na njen realni in imaginarni del kot $h = u + iv$, kjer sta u in v realni funkciji. Točka a) trditve 12 nam pove, da velja $\widetilde{h} = \widetilde{u} + i\widetilde{v}$. Ker sta u in v realni zvezni funkciji, definirani na robu enotskega diska, lahko uporabimo trditev 13. Ta nam pove, da sta $\widetilde{u}$ in $\widetilde{v}$ na $\mathbb{D}$ harmonični funkciji. Iz linearnosti Laplaceovega operatorja sledi, da je potem tudi $\widetilde{h} = \widetilde{u} + i\widetilde{v}$ na $\mathbb{D}$ harmonična funkcija.

Za dokaz zveznosti na $\overline{\mathbb{D}}$ se moramo nekoliko bolj potruditi. Alternativen dokaz si lahko bralec ogleda v [6, izrek 11.8. stran 234], tu pa bomo postopali v duhu opombe 4. S H označimo funkcijo, ki se na robu enotskega diska ujema s h, na notranjosti enotskega diska pa je definirana kot Poissonov integral funkcije h. Na $\mathbb{D}$ je $\widetilde{h}$ oziroma H harmonična, zato je tam tudi zvezna. Predpostavka trditve nam pove, da je h zvezna na $\partial\mathbb{D}$, zato je po definiciji taka tudi H. Dovolj je torej dokazati, da je funkcija H zvezna do roba enotskega diska.

Naj bo $\epsilon > 0$. Dovolj je dokazati, da obstaja $\delta > 0$, da za vsak $z \in \mathbb{D}$ in $w \in \partial\mathbb{D}$ iz $|z - w| < \delta$ sledi $|H(z) - H(w)| < \epsilon$. Označimo $z = re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, 1)$ ter $w = e^{i\tau}$, $\tau \in [0, 2\pi]$. Po definiciji funkcije H torej iščemo $\delta > 0$, da bo za $\theta, \tau \in [0, 2\pi]$ in $r \in [0, 1)$ iz $|re^{i\theta} - e^{i\tau}| < \delta$ sledilo $|\widetilde{h}(re^{i\theta}) - h\big(e^{i\tau}\big)\,| < \epsilon$. Pomagajmo si s trikotniško neenakostjo. Velja

$$\begin{aligned} |\widetilde{h}(re^{i\theta}) - h\big(e^{i\tau}\big)\,| &= |\widetilde{h}(re^{i\theta}) - h\Big(e^{i\theta}\Big) + h\Big(e^{i\theta}\Big) - h\big(e^{i\tau}\big)\,| \\ &\leq |\widetilde{h}(re^{i\theta}) - h\Big(e^{i\theta}\Big)\,| + |h\Big(e^{i\theta}\Big) - h\big(e^{i\tau}\big)\,|. \end{aligned} \tag{10}$$

Ocenimo najprej prvi sumand iz zapisa (10). Uporabimo točko e) trditve 7 ter po definiciji Poissonovega integrala zapišimo

$$\left|\widetilde{h}(re^{i\theta}) - h\Big(e^{i\theta}\Big)\right| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} \Big[h\Big(e^{i(\theta-\varphi)}\Big) - h\Big(e^{i\theta}\Big)\Big]\, P_r(\varphi)\, \frac{d\varphi}{2\pi}\right|.$$

Sedaj uporabimo točko d) trditve 7 in ocenimo

$$\left|\widetilde{h}(re^{i\theta}) - h\Big(e^{i\theta}\Big)\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left|h\Big(e^{i(\theta-\varphi)}\Big) - h\Big(e^{i\theta}\Big)\right| P_r(\varphi)\, \frac{d\varphi}{2\pi}.$$

Ker je h zvezna funkcija na kompaktu $\partial\mathbb{D}$, je omejena in enakomerno zvezna. Obstaja torej $M \in \mathbb{R}$, da velja $|h(z)| \leq M$ za vsak $z \in \partial\mathbb{D}$, in $\delta_0 > 0$, da za vsaka $\mu, \lambda \in [0, 2\pi]$ iz $|\mu - \lambda| < \delta_0$ sledi $|h\big(e^{i\mu}\big) - h\big(e^{i\lambda}\big)\,| < \frac{\epsilon}{3}$. Zgornji integral lahko sedaj razdelimo na dva dela, da bomo lahko uporabili enakomerno zveznost funkcije h. Dobimo

$$\begin{aligned} \left|\widetilde{h}\Big(re^{i\theta}\Big) - h\Big(e^{i\theta}\Big)\right| \leq &\int_{-\delta_0}^{\delta_0} \left|h\big(e^{i(\theta-\varphi)}\big) - h\Big(e^{i\theta}\Big)\right| P_r(\varphi)\, \frac{d\varphi}{2\pi} \\ &+ \int_{\delta_0 \leq |\varphi| \leq \pi} \left|h\big(e^{i(\theta-\varphi)}\big) - h\Big(e^{i\theta}\Big)\right| P_r(\varphi)\, \frac{d\varphi}{2\pi}. \end{aligned}$$

Absolutno vrednost znotraj prvega integrala lahko zaradi enakomerne zveznosti funkcije h navzgor ocenimo z $\frac{\epsilon}{3}$, vrednosti znotraj drugega integrala pa lahko zaradi omejenosti funkcije h navzgor ocenimo kar z $2M$. Velja torej

$$\left|\widetilde{h}\Big(re^{i\theta}\Big) - h\Big(e^{i\theta}\Big)\right| < \frac{\epsilon}{3} \int_{-\delta_0}^{\delta_0} P_r(\varphi) \frac{d\varphi}{2\pi} + 2M \int_{\delta_0 \leq |\varphi| \leq \pi} P_r(\varphi) \frac{d\varphi}{2\pi}.$$

Vsakega od integralov lahko sedaj navzgor ocenimo s pomočjo točke e) trditve 7. Velja

$$\left|\widetilde{h}\Big(re^{i\theta}\Big) - h\Big(e^{i\theta}\Big)\right| < \frac{\epsilon}{3} + 2M\, \max\{P_r(\varphi) \mid \delta_0 \leq |\varphi| \leq \pi\}.$$

Trditev 9 nam pove, da obstaja $\delta_1 > 0$, da iz $1 - r < \delta_1$ sledi $\max\{P_r(\varphi) \mid \delta_0 \leq |\varphi| \leq \pi\} < \frac{\epsilon}{6M}$, zato lahko pri zapisanih pogojih ocenimo

$$\left|\widetilde{h}\left(re^{i\theta}\right) - h\left(e^{i\theta}\right)\right| < \frac{2\epsilon}{3}.$$

Ocenimo še drugi sumand, ki smo ga dobili pri (10). Enakomerna zveznost funkcije nam pove, da iz $|\theta - \tau| < \delta_0$ sledi $|h\left(e^{i\theta}\right) - h\left(e^{i\tau}\right)| < \frac{\epsilon}{3}$.

Združimo oceni in konstruirajmo $\delta > 0$, ki bo zadostil pogoju za zveznost. Dokazali smo, da za vsak $\theta, \tau \in [0, 2\pi]$ in vsak $r \in [0, 1)$ iz $|\theta - \tau| < \delta_0$ in $1 - r < \delta_1$ sledi

$$\left|\widetilde{h}(re^{i\theta}) - h\left(e^{i\tau}\right)\right| \leq \left|\widetilde{h}\left(re^{i\theta}\right) - h\left(e^{i\theta}\right)\right| + \left|h\left(e^{i\theta}\right) - h\left(e^{i\tau}\right)\right| < \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Zadošča torej vzeti $\delta = \min\left\{\delta_1, \frac{\delta_0}{4}\right\}$, saj iz $|re^{i\theta} - e^{i\tau}| < \delta$ sledi

$$\delta_1 \geq \delta > |re^{i\theta} - e^{i\tau}| \geq \left||re^{i\theta}| - |e^{i\tau}|\right| \geq |r - 1| \geq 1 - r$$

ter

$$\delta_0 \geq 4\delta > 2\left(\left|e^{i\theta} - re^{i\theta}\right| + \left|re^{i\theta} - e^{i\tau}\right|\right) \geq 2\left|e^{i\theta} - e^{i\tau}\right| \geq |\theta - \tau|,$$

kar dokazuje želeno. ∎

Posledica 15. *Dirichletov problem za enotski disk je dobro postavljen matematični problem.*

Dokaz. Dokažimo, da Dirichletov problem za enotski disk ustreza zahtevam A), B) in C) iz definicije 1. Zahtevo A), oziroma obstoj rešitve za vsako zvezno funkcijo definirano na robu enotskega diska, nam preko eksplicitne konstrukcije zagotavlja trditev 14. Enoličnost rešitve, oziroma zahtevo B), pa nam potrjuje lema 5.

Osredotočimo se na zahtevo C). Naj bo $\epsilon > 0$ poljubno majhen in h zvezna funkcija, definirana na $\partial\mathbb{D}$. Naj bo g poljubna zvezna funkcija, definirana na $\partial\mathbb{D}$, za katero za vsak $z \in \partial\mathbb{D}$ velja $|h(z) - g(z)| < \epsilon$. Definirajmo $f(z) = h(z) - g(z)$. Opazimo, da velja $|f(z)| < \epsilon$ za vsak $z \in \partial\mathbb{D}$. Točka b) trditve 12 nam pove, da potem za vsak $z \in \mathbb{D}$ velja $|\widetilde{f}(z)| < \epsilon$, po točki a) trditve 12 pa sledi $|\widetilde{h}(z) - \widetilde{g}(z)| < \epsilon$ za vsak $z \in \mathbb{D}$. Definirajmo funkciji H in G kot

$$H(z) = \begin{cases} h(z), & z \in \partial\mathbb{D} \\ \widetilde{h}(z), & z \in \mathbb{D} \end{cases} \qquad G(z) = \begin{cases} g(z), & z \in \partial\mathbb{D} \\ \widetilde{g}(z), & z \in \mathbb{D}\ . \end{cases}$$

Trditev 14 nam pove, da je rešitev za Dirichletov problem na enotskem disku z začetnim pogojem h funkcija H, za začetni pogoj g pa funkcija G. Zapisali smo, da se funkciji G in H na $\partial\mathbb{D}$ in $\mathbb{D}$ po absolutni vrednosti razlikujeta za manj kot ϵ. Sledi, da velja $|H(z) - G(z)| < \epsilon$ za vsak $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Ker je bil ϵ poljubno majhen, smo s tem dokazali zvezno odvisnost problema od začetnih pogojev. ∎

6. Zaključek

Dirichletov problem bi lahko formulirali in rešili tudi za splošnejša omejena območja. Obstoj in enoličnost v tem primeru temelji prav na obstoju in enoličnosti rešitve za primer enotskega diska. Dodatno je rešitev Dirichletovega problema za enotski disk osnova za dokaz karakterizacije harmoničnih funkcij s pomočjo lastnosti povprečne vrednosti. Članek zaključimo z navedbo omenjene karakterizacije.

Trditev 16 (Karakterizacija harmoničnih funkcij z lastnostjo povprečne vrednosti). *Naj bo h zvezna funkcija, definirana na območju $U \subseteq \mathbb{C}$. Velja, da je h harmonična funkcija natanko tedaj, ko ima na U lastnost povprečne vrednosti.*

LITERATURA

[1] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations.* American Mathematical Society, Providence Long Island, 2 edition, 2010.

[2] Theodore W. Gamelin. *Complex analysis.* Springer Science+Business Media, New York, 2001.

[3] Paul Garrett. 11. harmonic functions, poisson kernels, 2020.

[4] S. Kumaresan. Approximate identities.

[5] Bojan Magajna. *Uvod v diferencialne enačbe, kompleksno in Fourierovo analizo.* DMFA - Založništvo, 2018.

[6] Walter Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-HiII Book Company, 3 edition, 1987.

[7] Eric W Weisstein. Delta function. From MathWorld–A Wolfram Web Resource.

[8] Wikipedia contributors. Dirac delta function — Wikipedia, the free encyclopedia.