

PREVRAČANJE LEDENIH GOR

GASPER JALEN

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Prevračanje ledenih gor je zanimiv pojav, ki ga opazimo v naravi. Na splošno določajo stabilno lego plavajočih teles preprosti fizikalni zakoni, pri čemer pa je sam izračun, tudi pri enostavnih geometrijskih objektih, lahko precej zapleten. Eksperimenti in rezultati, ki jih tovrstni izračuni podajo, nam mnogokrat podajo neintuitivne rezultate in napovedujejo zanimiv vpliv prevračanja ledenih gor na okolico.

ICEBERG CAPSIZE

The capsizing of icebergs is a fascinating natural phenomenon. Finding a stable equilibrium of floating objects is quite complex, even for elementary geometric shapes, despite only accounting for gravitational force and buoyancy. Derived results are often unintuitive and are predicative of an intriguing impact of the iceberg-capsize on its surroundings.

1. Uvod



Slika 1. Umetniški prikaz ledene gore. Vir: [1].

Verjetno je vsem znan izraz „vrh ledene gore”, ki predstavlja nesluteno velikost na prvi pogled majhne stvari. To nazorno prikazuje slika 1, kjer nad gladino opazimo le manjši del ledene gore, večina pa se skriva pod gladino. Ker iz vsakdanjega življenja navadno nimamo razvite intuicije, kako kosi ledu plavajo na vodi, nas postavitev ledene gore na sliki ne zmoti. Da pa je morda s sliko nekaj narobe, lahko ugotovimo po kratkem razmisleku o plavajoči deski ali veji na vodi. Leseni objekti imajo v grobem približno podobno gostoto kot led, pri čemer se spomnimo, da vedno plavajo vzporedno z gladino. Podobno lahko sklepamo iz oblike ladje ali orientacije podmornice, če ta ni popolnoma potopljena. Vsem naštetim objektom je skupno, da jih nikoli ne opazimo v stabilnem stanju z daljšo dimenzijo pravokotno na gladino, ampak vedno vzporedno. S tem razmislekom lahko sklepamo, da bi se podolgovata ledena gora na sliki verjetno prevrnila in plavala na boku.

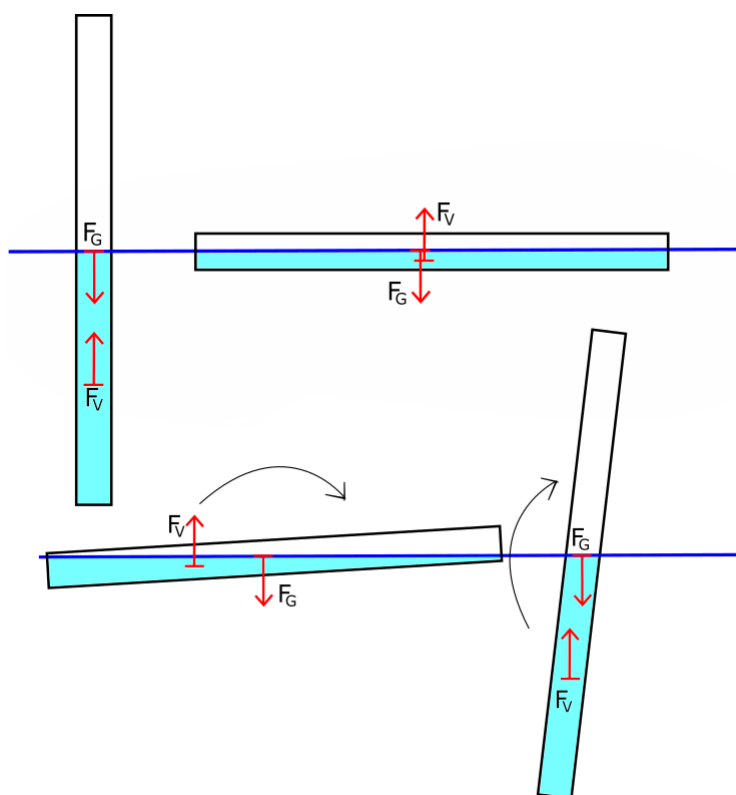
Ker je ravnovesje sil pri plavajočih objektih mogoče najti v različnih orientacijah, se je smiselno vprašati, katere orientacije predstavljajo stabilne lege in kako potekajo prehodi med različnimi legami.

V članku bom na začetku prikazal, kako fizikalno obravnavamo plavajoče objekte. Konkretno bom izračunal stabilnosti za 2D plavajoč pravokotnik, prikazal diagram stabilnosti za plavajoč valj

in primerjal rezultate za obe telesi. Izračune bom primerjal z eksperimentalnimi podatki za stabilnost kvadra in utemeljil ustreznost eksperimenta za simulacijo prevračanja ledenih gor. Preko eksperimenta bom opisal dinamiko samega prevračanja in disipacijo energije pri tem procesu. Pojasnil bom, kako sploh pridemo do situacije, v kateri se plavajoča ledena gora prevrne in omenil možne vplive pojava na okolico. Na koncu bom na kratko razložil, zakaj imamo malo podatkov iz opazovanj pravih ledenih gor.

2. Stabilnost plavajočih teles

Na vsako plavajoče telo delujeta dve sili. To sta sila gravitacije in sila vzgona. Sila vzgona je po Arhimedovem zakonu enaka teži izpodrinjene tekočine. Obravnavamo jo lahko tako, da prijemališče sile postavimo v težišče izpodrinjenega dela tekočine oziroma težišče potopljenega dela telesa. Sila gravitacije seveda prejme v težišču celotnega telesa.



Slika 2. Shema plavajoče palice v različnih legah. V zgornjem delu sta prikazani mirovni legi, v spodnjem pa izmaknjeni mirovni legi. Z ukrivljeno puščico je prikazana smer delovanja navora, z ravnimi pa sta prikazani sila vzgona F_V in sila gravitacije F_G . Razmerje gostot znaša $\rho/\rho_w = 0.5$.

V mirovnih legah v splošnem velja, da je rezultanta vseh sil in navorov na telo enaka 0. Taka situacija je prikazana na zgornjem delu slike 2. Na njem sta obe palici v mirovanju. Razlika med položajema se skriva v stabilnosti leg, kar prikazuje spodnji del slike 2. Če pokončno in ležečo palico rotiramo za majhen kot okoli težišča, se pojavijo navori.

V primeru pokončne palice se potopljeni volumen spremeni le minimalno, pri čemer se njegovo težišče izmakne s premice na kateri leži sila gravitacije. Pojavi se navor, ki palico rotira v smeri začetne rotacije, zato ta lega ni stabilna. Če nagnemo vodoravno palico, pride do spremembe oblike potopljenega volumna, kar prestavi prijemališče sile vzgona. Ponovno se pojavi navor, ki pa palico rotira v nasprotni smeri začetnega odmika. Vodoravni položaj torej predstavlja stabilno lego.

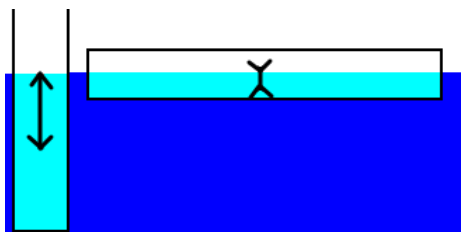
Pri računanju stabilnosti plavajočih teles spremljamo smer navora, ki se pojavi pri majhnem

odmiku iz mirovne lege. Smer navora je v stabilni legi zmeraj nasprotna smeri odmika (rotacije). To pomeni, da moramo za odklik delovati z zunanjim navorom in opraviti neko delo. Energijsko gledano je torej stabilna lega lokalni energijski minimum. Navor izračunamo iz potencialne energije po enačbi

$$M = -\frac{\partial W_p}{\partial \theta} \frac{\theta}{|\theta|}, \quad (1)$$

kjer je θ vektor kota rotacije. Enačba (1) potrди povezavo med navorom in minimumom energije pri stabilni legi. Ničelni prvi in pozitiven drugi odvod potencialne energije pomenita nasprotno smer navora in kota odmika. Za konkreten izračun stabilnosti je zapis energije in iskanje njenih minimumov enostavnejši kot obravnava navorov.

Iz slike 2 lahko vidimo tudi, od kod izvira energijska razlika. Na prvi pogled so vse lege energijsko enakovredne, saj težišče palice pri prevračanju miruje. Vendar je potrebno poleg energije palice obravnavati tudi energijo izpodrinjene tekočine. Ko palico potopimo v bazen, ta iz njega izrine nekaj vode. Preostanek vode se razlije po površju, pri čemer se mu poveča potencialna energija. To dogajanje prikazuje slika 3, na kateri je prikazana sprememba težišča izpodrinjene tekočine v vodoravni in navpični legi palice. Ta energijska sprememba se najboljše opazi ravno pri razmerju gostot $\rho/\rho_w = 0.5$, saj le tedaj težišče telesa pri prevračanju miruje in se spreminja le težišče izpodrinjene tekočine. Kot bomo pokazali kasneje, se razlika energije kaže prav v spremembi razdalje med težiščem celotnega plavajočega telesa in težiščem njegovega potopljenega dela. Energijsko najugodnejši položaj telesa je tisti, pri katerem je razlika med težiščema najmanjša.



Slika 3. Prikaz spremembe višine težišča izpodrinjene tekočine za pokončno in vodoravno palico. Manjša sprememba težišča pomeni manjšo potencialno energijo izpodrinjene tekočine in s tem energijsko ugodnejšo lego. Razmerje gostot znaša $\rho/\rho_w = 0.5$.

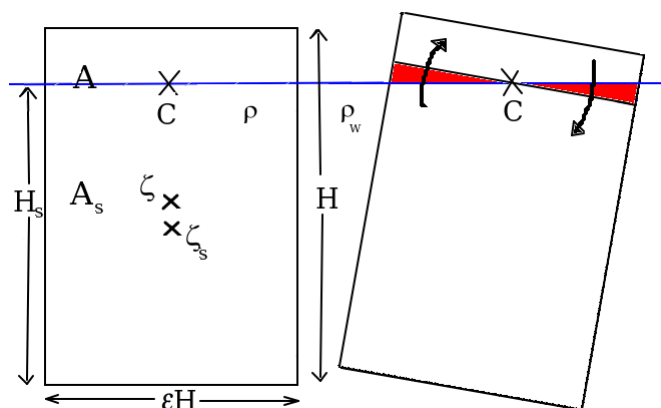
2.1 Kvader

Najenostavneje je stabilnost telesa v vodi izračunati za poseben primer plavajočega kvadra, ki se lahko premika le v ravnini vzporedni z eno od njegovih ploskev. Na začetku definirajmo dimenzije kvadra. Višina kvadra je označena s H , razmerje med širino in višino pa s ε , tako da širino označimo kar z $H\varepsilon$. Dolžino kvadra, ki sicer ne bo igrala velike vloge pri našem izračunu, označimo z L . Presek kvadra po dolžini označimo z A in potopljen del preseka z A_s . Za lažjo predstavbo so označbe prikazane na sliki 4.

Prva zahteva, ki jo moramo upoštevati je ravnovesje gravitacijske sile in sile vzgona $F_g = F_v$, oziroma

$$L\varepsilon H^2 \rho g = L\varepsilon H H_s \rho_w g, \quad (2)$$

pri čemer H_s označuje le višino kvadra pod morskó gladino, ρ in ρ_w pa gostoto kvadra in vode. Enačbo (2) lahko zapišemo tudi v obliki $A\rho = A_s\rho_w$, iz česar je razvidno da mora biti ob različnih premikih kvadra površina potopljenega dela konstanta, če želimo zadostiti ravnovesju sil. Iz slike 4 opazimo tudi, da se ploščina potopljenega dela ne spremeni, če kvader rotiramo okrog točke C,



Slika 4. Shema pokončnega in delno rotiranega plavajočega kvadra. Rdeča barva označuje enaki spremembi ploščine nad in pod gladino pri rotaciji. Točka C predstavlja os okoli katere kvader rotiramo.

vsaj dokler je celotna zgornja ploskev nad gladino. Rotacija okrog točke C je hkrati edini način, da ohranimo enakost sil ob predpostavki, da zgornji rob ni potopljen. Če kvader ob tem pogoju ima stabilno lego, bo gotovo zajeta z rotacijo okrog točke C.

Za obravnavo stabilnosti lege zapišemo potencialno energijo v odvisnosti od kota rotacije. Obravnavo vertikalnih premikov kvadra ni potrebna, saj se v vertikalni smeri očitno nahajamo v energijskem minimumu. Energija je sestavljena iz dveh prispevkov in sicer iz potencialne energije dela kvadra nad gladino in potencialne energije dela kvadra pod gladino. Pri slednjem je potrebno upoštevati tudi prispevek vode, ki jo kvader izpodrine. Dobimo enačbo

$$U = g(\rho - \rho_w)L\zeta_s A_s + g\rho L(\zeta A - \zeta_s A_s), \quad (3)$$

kjer ζ in ζ_s predstavljata višino težišča kvadra in višino težišča potopljenega dela kvadra. Vse višine merimo od gladine vode, s pozitivno smerjo v smeri nad gladino. Zaradi konstantne ploščine potopljenega dela lahko v enačbo (3) vstavimo $A_s = (\rho/\rho_w)\varepsilon H^2$ in dobimo

$$U = g\rho L\varepsilon H^2(\zeta - \zeta_s). \quad (4)$$

Višino težišča kvadra zapišemo z enačbo $\zeta = -H \cos\theta(\rho/\rho_w - 1/2)$. Višino težišča potopljenega dela je nekoliko težje zapisati, zato potopljeni del razdelimo na dva dela, kot prikazuje slika 5, in izračunamo težišče za vsakega posebej

$$\zeta_s = \frac{\zeta_1 A_1 + \zeta_2 A_2}{A_s}. \quad (5)$$

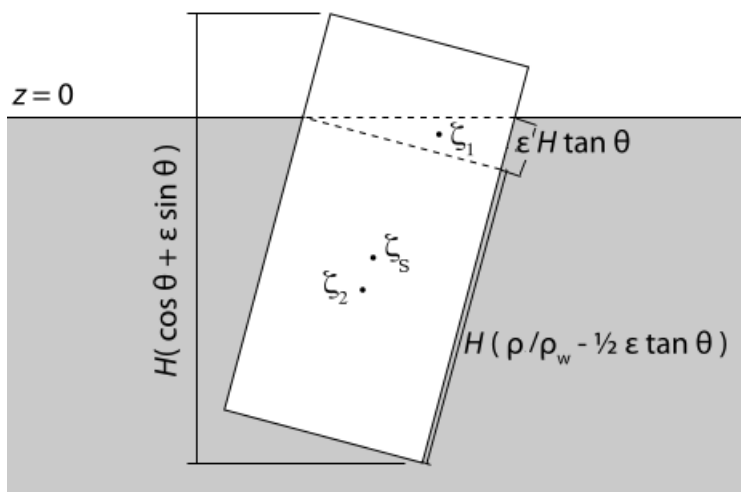
Če razpišemo vse količine v enačbi (5) dobimo izraz za višino težišča potopljenega dela

$$\zeta_s = -\frac{1}{2} \frac{\rho_w}{\rho} H \left[\frac{\varepsilon^2}{12} \frac{1}{\cos\theta} + \left(\left(\frac{\rho}{\rho_w} \right)^2 - \frac{\varepsilon^2}{12} \right) \cos\theta \right].$$

Obe višini težišč lahko vstavimo v enačbo (4) in dobimo

$$U = g\rho L\varepsilon H^3 \left[\frac{\rho_w}{2\rho} \frac{\varepsilon^2}{12 \cos\theta} + \frac{\rho_w}{2\rho} \left(\left(\frac{\rho}{\rho_w} \right)^2 - \frac{\varepsilon^2}{12} \right) \cos\theta - \left(\frac{\rho}{\rho_w} - \frac{1}{2} \right) \cos\theta \right], \quad (6)$$

kar nam poda obnašanje energije v odvisnosti od kota nagiba θ za vrednosti okoli $\theta = 0$. Bolj nazorno nam obnašanje pokaže graf energije za različne vrednosti ε sliki 6.



Slika 5. Shema kvadra rotiranega za kot θ od navpične osi. Potopljeni del razdelimo na s črtkano črto označen trikotnik in spodnji pravokotnik. Vir: [2].

Opazimo, da ima pri vrednostih ε blizu 1 potencial dva minimuma, pri manjših pa le enega. Ker nas zanima, kdaj je kvader stabilen, moramo najti mejno vrednost ε_c , pri kateri bo drugi odvod energije pri $\theta = 0$ ravno enak 0. Rešitev pogoja

$$\left. \frac{d^2U}{d\theta^2} \right|_{\theta=0} = \frac{1}{12} g \rho L \varepsilon H^3 \left(6 - \frac{\varepsilon_c^2 \rho_w}{\rho} - \frac{6\rho}{\rho_w} \right) = 0 \quad (7)$$

nam za gostoto ledu v morski vodi ($\rho/\rho_w = 0.9$) poda vrednost $\varepsilon_c = 0.75$.

2.2 Valj

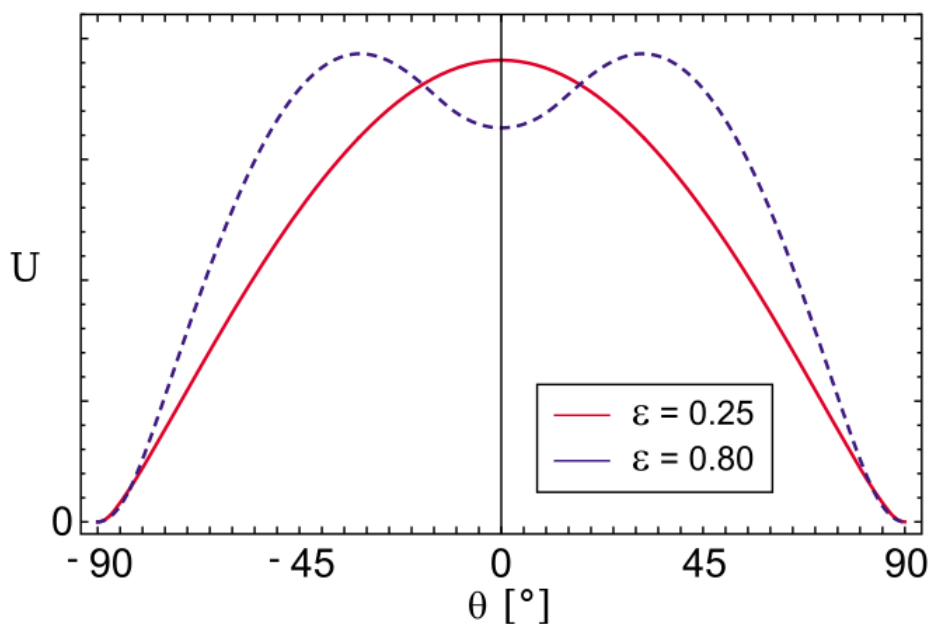
Stabilnost valja lahko zaradi osne simetrije ponovno obravnavamo le za 2D rotacije, vendar se pri rotaciji energije ne izračuna več tako preprosto kot pri kvadru. Razlog za to je seveda bolj zahtevno spreminjanje volumna potopljenega dela pri obračanju valja. V ta namen so za plavajoči valj prikazani le končni rezultati oziroma diagram stabilnosti na sliki 8. Potek izračuna je prikazan v [3]. Višino valja označimo s H in premer s D . Ponovno lahko (kot pri kvadru) valj postavimo v vodo pokonci in na diagramu odčitamo kritično vrednost $\varepsilon_{cv} = D/H$, pri kateri lega ni več stabilna. Za valj ta znaša $\varepsilon_{cv} = 0.85$.

Na prvi pogled je valj nekoliko manj stabilen od kvadra, vendar ε_{cv} nima enakega pomena kot ε_c pri kvadru. Če želimo videti, ali je stabilnejša oblika valj ali kvader, moramo primerjati 3D telesi z enako veliko osnovno ploskvijo. Ugotovitve iz 2D modela prevračanja uporabimo na kvadru s kvadratom za osnovno ploskvijo in predpostavimo, da se lahko prevrne le v ravnini ene izmed ploskev plašča (kvader se ne bo prevračal po diagonali). Glede na to, da se kvader lažje prevrne v smeri krajših dimenzij, se zdi predpostavka smiselna. Pri primerjavi obeh teles le preverimo, katero ima višjo skrajno višino, torej višino pri kateri se prevrne. Velikost ploskev povezuje enačba $a^2 = \pi(D/2)^2$, pri čemer je a stranica osnovne ploskve kvadra. Višino valja je torej

$$H_v = \frac{D}{\varepsilon_{cv}} = \frac{2}{\sqrt{\pi \varepsilon_{cv}}} a = 1.33a,$$

višino kvadra pa $H_k = a/\varepsilon_c = 1.33a$. Za naše predpostavke in omejeno natančnost podatkov sta kritični višini obeh teles presenetljivo isti.

Če se vrnemo k začetni sliki 1, opazimo, da je razmerje med višino in širino ledene gore približno 0.5. Če ledeno goro obravnavamo kot valj, to pomeni razmerje $H/D \approx 2$. To razmerje na diagramu



Slika 6. Potencialna energija kvadra v odvisnosti od kota nagiba, za vrednosti $\rho/\rho_w = 0.9$ in dve različni vrednosti razmerja med višino in širino ε . Naš model opisuje le območje na katerem se zgornji rob kvadra ne potopi. Vir: [2].

stabilnosti valja na sliki 8 ni več prikazano. Vseeno vidimo, da se pri razmerju gostot morske vode in ledu nahaja globoko v območju II, kjer je edina stabilna lega plavanje na boku. Prikazana ledena gora bi se v realnosti pri prči prevrnila. Ledena gora podobne oblike, bi bila v realnosti bolj sploščena, kot je prikazano na sliki 7.



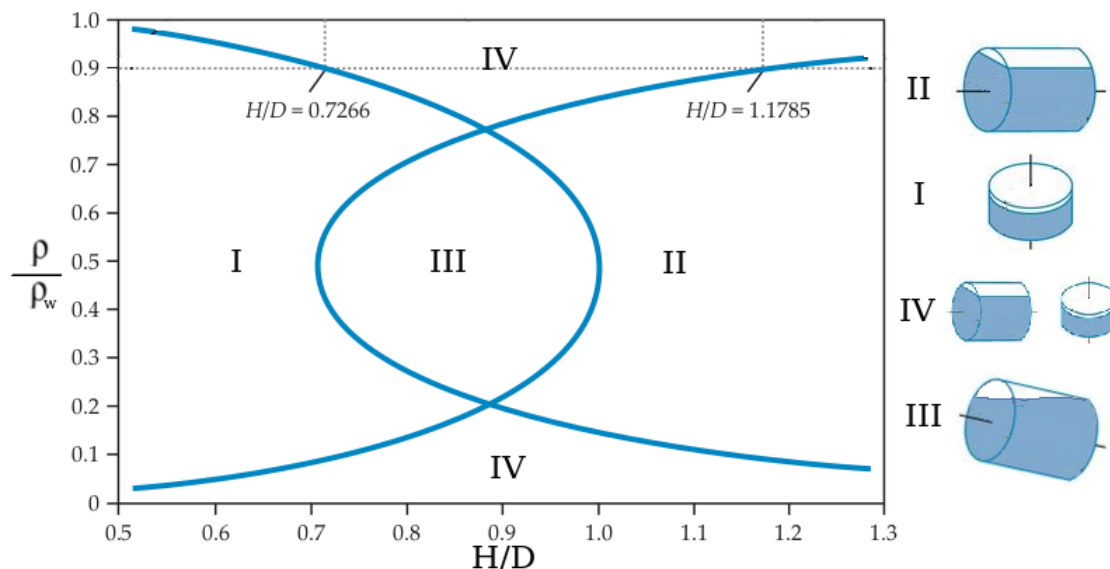
Slika 7. Ledena gora v naravi. Vir: [4].

3. Eksperimentalni rezultati

Teoretične predpostavke iz poglavja 2 je mogoče eksperimentalno preveriti s preprostim opazovanjem plavajočih teles v vodi. Poleg tega lahko z opazovanjem dobimo dodatne rezultate o sami dinamiki prevračanja. Opisane eksperimente ste izvedla J. C. Burton in J. M. Amudson na univerzi v Chicago in so podrobneje razloženi v [2]. Vsi eksperimenti so bili izvedeni za primer kvadra, ki se tako kot pri teoretičnih izračunih lahko obrača vzporedno z eno od svojih ploskev (imamo torej 2D primer prevračanja).

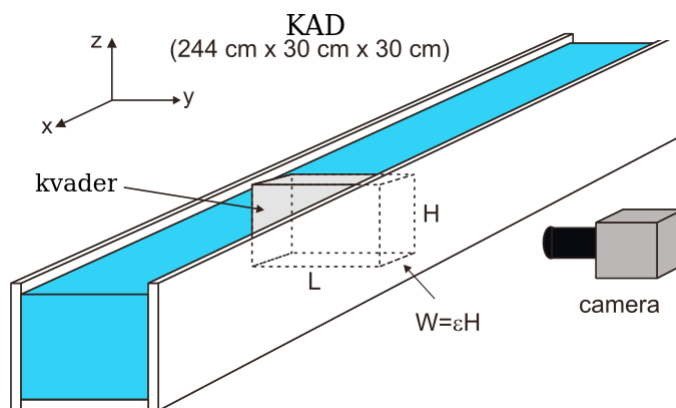
Sama eksperimentalna postavitve je precej preprosta. Sestavljena je iz podolgovate pravokotne

Prevrščanje ledenih gor



Slika 8. Diagram stabilnosti za plavajoči valj gostote ρ , višine H in premera D v vodi gostote ρ_w . Na diagramu so prikazana 4 različna območja z značilnimi orientacijami valja. V območju I valj plava s simetrijsko osjo pravokotno na vodo, v območju II valj plava na boku, s simetrijsko osjo vzporedno z vodo, v območju IV pa sta stabilni obe orientaciji. V območju III plava nagnjen pod nekim kotom med 0 in 90° glede na njegovo simetrijsko os in gladino vode. S črtkano črto je označeno razmerje gostot za morsko vodo in led. Kritična vrednost, pri kateri se pokončni valj prevrne, se nahaja na presečišču črtkane črte in meje med območjema II in IV. Vir: [1].

kadi, v katero postavimo kvadre, ki so le malo ožji kot sama kad, kar je prikazano na sliki 9. To zagotovi gibanje kvadra v želeni ravnini. Različni kvadri pri eksperimentu niso narejeni iz ledu, ampak iz plastike, ki je nekoliko bolj praktična. Vse dogajanje v kadi, ki je prozorna, opazuje tudi kamera. Ta omogoča opazovanje dinamike procesa. Za lažje sledenje so kvadri v vogalih označeni s pikami, ki se jih na kameri lažje razloči.

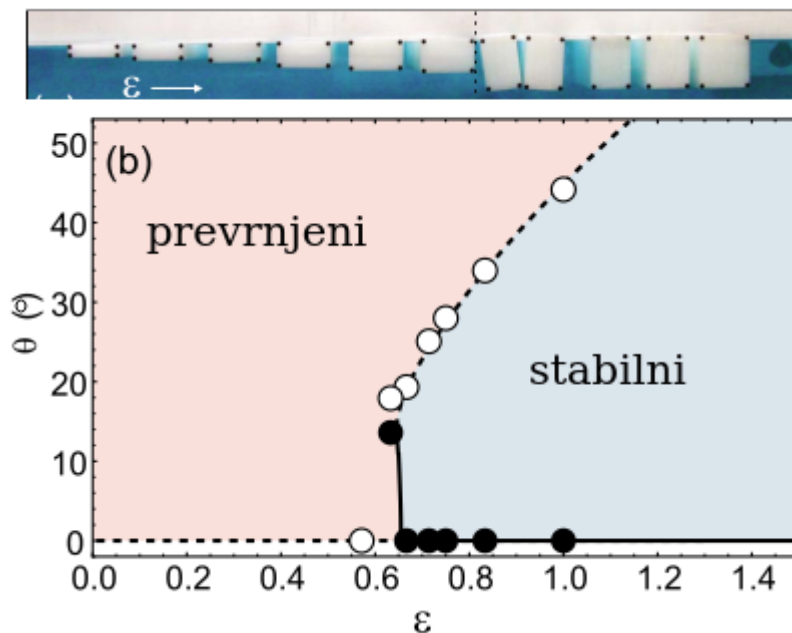


Slika 9. Shema postavitve eksperimenta z dimenzijami kadi. Vir: [2].

Za potrditev teoretičnih napovedi so v vodo v pokončni orientaciji položili več kvadrov in opazovali pri katerem razmerju stranic ε se kvadri prevrnejo. Stabilne kvadre so nato nagnili do kota, pri katerem so se ti prevrnili. Ta kritični kot določa maksimum potencialne energije. Vrednosti kota za različna razmerja ε je mogoče teoretično napovedati z numeričnim reševanjem enačbe (6). To je na sliki 10, ki prikazuje rezultate eksperimenta, prikazano s črtkano črto. Opazimo, da se eksperimentalno določeni kritični koti (bele pike) dobro ujema z napovedjo.

Ker so kvadri plastični, voda pa ni slana, je razmerje gostot nekoliko drugačno kot pri morski

vodi in ledu. Po enačbi (7) znaša za ta materiala $\varepsilon_c = 0.66$. Na grafu na sliki 10 so poleg belih tudi črne pike, ki prikazujejo stabilne energijske minimume za različne kvadre. Za kritično vrednost ε_c vzamemo prvo črno piko pri $\theta = 0$. Eksperimentalno določena vrednost je $\varepsilon_c = 0.65$. Enačba (7) torej ustrezno napove kritične vrednosti razmerij stranic.



Slika 10. V zgornji vrstici je prikazana slika eksperimenta. Prikazanih je več kvadrov z razmerjem ε naraščajočim od leve proti desni. Levo od črtkane črte, ki predstavlja kritično vrednost ε_c , so prikazani prevrnjeni kvadri, desno pa stabilni. V spodnjem delu je prikazan diagram stabilnosti kvadrov za različne vrednosti kota nagiba in razmerij stranic ε . S črnimi pikami so prikazane stabilne lege kvadrov, z belimi pa labilne lege v energijskih maksimumih. Črtkana črta prikazuje teoretično napoved kritičnega kota, polna črta pa povezuje črne pike. Potek črt v okolici ε_c zaradi omejene natančnosti eksperimenta ni točen. Vir: [2].

Pri eksperimentu opazimo tudi anomalijo, pri kateri se blizu kritične vrednosti minimum energije premakne k nekemu od 0 različnemu kotu. Tega minimuma naša teoretična napoved ne napove. Razlog za to je potopljen rob kvadra, pri katerem geometrične predpostavke, povzete s slike 4, ne veljajo več.

4. Podobnost prevračanja kvadrov in ledenih gor

Do sedaj smo pri prevračanju kvadrov upoštevali dve spremenljivki od katerih je stabilnost odvisna in sicer razmerje gostot vode in telesa ter razmerje dolžin stranic. Same dimenzije kvadra, ki so pri pravih ledenih gorah rede velikosti večje kot pri eksperimentu opisanem v poglavju ??, na izračun stabilnosti nimajo vpliva. Če želimo z eksperimentom preučiti dinamiko prevračanja, je potrebno preveriti tudi ostale stvari, ki bi lahko bile pri pravih ledenih gorah drugačne. Za telesa v vodi se lahko fizikalni zakoni spremenijo pri skaliranju. Znan tak primer je zakon upora pri gibanju v tekočinah. Ta je lahko linearno ali kvadratno odvisen od hitrosti, pri čemer režim določa Reynoldsovo število.

Upor bo pri dinamiki prevračanja zadušil gibanje, potrebno pa je preučiti tudi druge načine disipacije energije. Drug pomemben vpliv na dinamiko predstavljajo valovi na gladini vode. Vpliv valov na disipacijo energije lahko določimo z izračunom Froudeovega števila [5] in upoštevanjem disperzijske relacije za površinske valove

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\gamma}{\rho_w} k^2 \right) \tanh Dk, \quad (8)$$

ki vsebuje tudi popravka za površinsko napetost in globino vode [6]. V enačbi (8) je ω frekvenca, g gravitacijski pospešek, $k = 2\pi/\lambda$ valovno število, γ površinska napetost in D globina vode. Privzamemo, da so valovi, ki nastanejo pri prevračanju, podobne dolžine kot kvadri oziroma ledene gore, torej pri našem eksperimentu $\lambda \approx H = 0.1$ m. Ker je globina vode pri eksperimentu večja, kot je dimenzija kvadrov, lahko v enačbi (8) člen s \tanh postavimo na 1. Dodatno je v [8] navedeno, da lahko za valovne dolžine daljše od 0.07 m vpliv površinske napetosti zanemarimo. Člen s površinsko napetostjo v enačbi (8) pri vodi ($\gamma = 75$ mN/m) predstavlja le 1% popravek k frekvenci. Disperzijska relacija se s tem poenostavi v $\omega^2 = gk$.

Za disipacijo energije preko valov je pomembno tudi Froudeovo število. To je brezdimenzijsko število, ki opisuje učinkovitost telesa pri tvorjenju površinskih valov na vodi. Določa torej, koliko se bo gladina vzvalovala pri procesu prevračanja. Število se sicer uporablja za določanje režimov valov pri plovbi čolnov in služi prav za oceno učinkovitosti plovbe. V našem primeru ga določimo kot razmerje karakteristične hitrosti v_{pr} pri prevračanju telesa in hitrosti valov v_{val} . Hitrost v_{pr} ocenimo preko kinetične energije pri prevračanju, ki jo enačimo s spremembo potencialne. Spremembo potencialne energije izračunamo iz enačbe (4), iz razlike za energijo pri pokončnem in prevrnjenem kvadru oziroma gori. Opiše jo enačba

$$E_{pr} = \frac{1}{2} \rho g L H^3 \varepsilon (1 - \varepsilon) \left(1 - \frac{\rho}{\rho_w} \right), \quad (9)$$

hitrost pa ocenimo iz $v_{pr} = \sqrt{2E_{pr}/m}$. Če vstavimo E_{pr} iz enačbe (8), se izraz poenostavi v

$$v_{pr} = \sqrt{\left(1 - \frac{\rho}{\rho_w} \right) g H (1 - \varepsilon)}. \quad (10)$$

Hitrost valov določimo preko disperzijske relacije $v_{val} = \partial\omega/\partial k$. Vrednost k ponovno ocenimo s $k = 2\pi/H$ in dobimo

$$v_{val} = \sqrt{\frac{gH}{8\pi}}.$$

Froudeovo število je torej

$$Fr = \frac{v_{pr}}{v_{val}} = \sqrt{8\pi \left(1 - \frac{\rho}{\rho_w} \right) (1 - \varepsilon)} \quad (11)$$

in je neodvisno od velikosti H . V našem primeru je pri eksperimentu število za približno 10% večje kot v naravi pri ledenih gorah, kar se zgodi zaradi razlike razmerij gostot. Vseeno pričakujemo podoben režim obnašanja valov. V obeh primerih je Froudeovo število približno ena, vendar smo pri računanju hitrosti prevračanja naredili precej grobo oceno, ki predstavlja le zgornjo mejo hitrosti. V resnici je, zaradi sil upora, hitrost prevračanja manjša, ter s tem tudi Froudeovo število manjše od ena. V tem primeru ima tvorba površinskih valov majhen vpliv na disipacijo energije.

Zadnji pomemben vpliv na dinamiko ima Reynoldsovo število [7]. Za majhna Reynoldsova števila je značilen laminaren tok vode, za velika pa turbulenten. Število izračunamo z $Re = H v_{pr} \rho_w / \mu$, kjer je μ viskoznost vode in znaša približno 1.0 mPa.s. Če v enačbo vstavimo hitrost prevračanja iz enačbe (9) in upoštevamo še končno formulo za Froudeovo število (11) dobimo

$$Re = Fr \frac{\rho_w}{\mu} \sqrt{\frac{gH^3}{8\pi}}.$$

Reynoldsovo število ima torej odvisnost od značilne velikosti telesa H in se seveda za prave ledene gore in naš eksperiment precej razlikuje. Za ledeno goro velikosti 1×10^2 – 1×10^3 m znašajo med 1×10^8 in 1×10^{10} , za kvadre pri eksperimentu pa približno 2×10^4 . Kljub veliki razliki lahko iz [9] razberemo, da je tako za kvadre kot ledene gore značilen turbulenten režim.

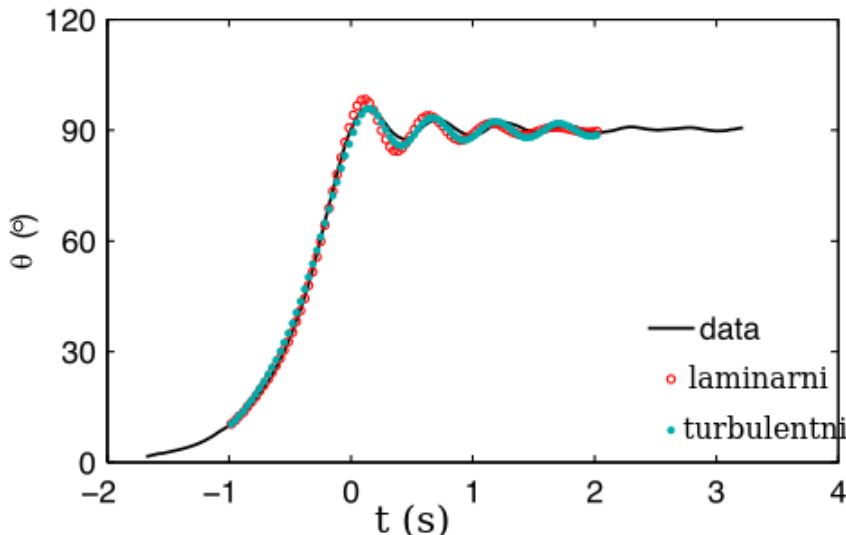
5. Dinamika prevračanja in vpliv na okolico

5.1 Dinamika prevračanja

Iz eksperimenta stabilnosti v poglavju 3 je s pomočjo kamere možno dobiti tudi podatke o dinamiki procesa. Pri tem nas zanimata predvsem spreminjanje kota nagiba kvadra s časom, kar je prikazano na sliki 11, in sprememba energije kvadra, prikazano na sliki 12. Oba grafa nam prikazujeta močno dušeno gibanje, kar se opazi tako pri energiji kot pri kotu. Poleg eksperimentalnih podatkov za spremembo kota sta zraven prikazani dve teoretični napovedi in sicer ena za primer laminarnega toka in druga za turbulenten tok. Teoretični napovedi izhajata iz enačbe

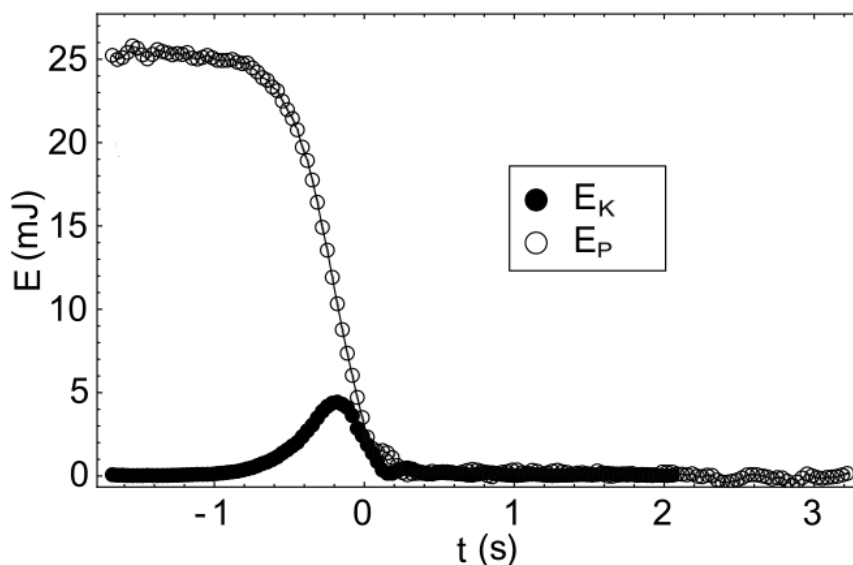
$$I\ddot{\theta} = -\frac{\partial U}{\partial \theta} + \nu_{\theta}|\dot{\theta}|^n \text{sign}\dot{\theta},$$

kjer je I vztrajnostni moment ledene gore okrog njenega težišča, ν_{θ} koeficient dušenja, funkcija sign pa določi ustrezen predznak dušenja. Režim določimo z izbiro potence n . $n = 1$ predstavlja linearen zakon upora (laminaren tok), $n = 2$ pa kvadratičen upor (turbulenten tok). Opazimo, da se podatki precej bolje skladajo s turbulentnim modelom, kar potrjuje naš sklep iz poglavja 4, da pojav poteka v turbulentnem režimu. Po enem nihaju, ko se kotna hitrost ledene gore precej zmanjša, ujemanje ni več dobro. Tedaj je namreč Reynoldsovo število precej manjše in kvadratni zakon upora ne velja več.



Slika 11. Sprememba kota nagiba kvadra v odvisnosti od časa. S črno so prikazani rezultati eksperimenta, z rdečo in zeleno pa laminarni in turbulentni model. Prikazani so rezultati za kvader z $\varepsilon = 0.5$. Vir: [2].

Pri spremembi energije kvadra se potencialna energija le v manjšem delu pretvori v kinetično, ki se prav tako hitro zaduši. S tem smo utemeljili tudi sklepanje iz poglavja 4, da je Froudeovo število zaradi prevelike ocene hitrosti v enačbi (10) res manjše od ena. Zaradi natančnosti omenimo, da kinetična energija tu predstavlja seštevek rotacijske in translacijske kinetične energije, pri prevračanju pa se težišče kvadra tudi nekoliko premakne. Vsa sproščena energija se na koncu absorbira v vodi, kar se pri eksperimentu pozna v majhni spremembi temperature vode. Poleg tega se voda tudi premeša, kar bi lahko imelo v naravi pomembne posledice.



Slika 12. Sprememba energije kvadra ($\varepsilon = 0.5$) v odvisnosti od časa. Prikazani sta potencialna (E_P) in kinetična (E_K) energija. Pike prikazujejo eksperimentalne podatke, črta pa teoretično napoved s turbulentnim modelom. Vir: [2].

5.2 Vpliv prevračanja ledenih gor na okolico

V naravi je celoten proces disipacije energije bolj zapleten kot v laboratoriju. V morju in oceanu ima voda na različnih globinah namreč različno gostoto, temperaturo in slanost. Na večjih globinah (pod 200 m) ima voda temperaturo 4°C , pri kateri je tudi najgostejša. Na gladini je voda hladnejša, temperatura pa je lahko tudi pod lediščem. Pri mešanju vode različnih globin torej opravimo neko delo, saj ima voda različno gostoto. Predvidevamo lahko, da se del energije pri prevračanju ledenih gor porabi za mešanje vode, pri čemer hladno vodo na gladini nadomestimo s toplejšo iz globin. Drugi del energije se, tako kot pri eksperimentu, porabi direktno za segrevanje vode. V nekem smislu torej prevračanje ledenih gor s sproščanjem energije pospešuje taljenje ledu, iz ocen pa lahko sklepamo, kako pomembni so ti vplivi.

Precej preprosto je oceniti vpliv segrevanja vode ali taljenja ledu z energijo prevračanja. Izraz za energijo prevračanja je podan v enačbi (9) in ga lahko izračunamo za ledeno goro poljubne velikosti. Nazorno lahko vpliv prikažemo s primerjavo sproščene energije pri prevračanju in energije, ki jo potrebujemo, da stalimo celotno goro s temperaturo 0°C . Energija taljenja znaša $E_{\text{tal}} = CH^2L\rho$, kjer je C specifična talilna toplota ledu, razmerje energij pa

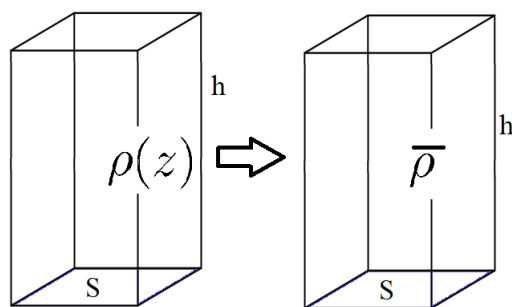
$$\frac{E_{\text{pr}}}{E_{\text{tal}}} = \frac{gH}{2C}\varepsilon(1 - \varepsilon) \left(1 - \frac{\rho}{\rho_w}\right).$$

Za ledeno goro višine $H = 1 \times 10^2$ m in razmerjem $\varepsilon = 0.5$ znaša razmerje le 0.3%. Glede na majhno razmerje energij sklepamo, da je vpliv prevračanja ledenih gor na direktno taljenje ledu zanemarljiv.

Nekoliko bolj težavno je oceniti količine vode, ki jo lahko zmešamo z energijo prevračanja. Če želimo zmešati nek stolpec vode, mora imeti po mešanju konstantno gostoto. Ker se masa stolpca ohrani je končna gostota enaka kar povprečni začetni gostoti. Potek mešanja je prikazan na sliki 13. Energijo, potrebno za mešanje, izračunamo z razliko potencialne energije pred in po mešanju, ki jo opiše enačba

$$E_m = \int_0^h (\bar{\rho} - \rho(z))gSzdz,$$

kjer je $\bar{\rho}$ konstantna končna gostota, $\rho(z)$ začetna gostota odvisna od višine z , h višina stolpca, S pa njegov presek. Za približek bomo vzeli mešanje kilometer visokega stolpca morske vode v katerem



Slika 13. Skica mešanja vodnega stolpca z začetno gostoto $\rho(z)$ in končno gostoto po mešanju $\bar{\rho}$.

gostota enakomerno narašča z višino. Po [10] se gostota takega stolpca res spreminja približno linearno, iz $\rho_1 = 1028 \text{ kg m}^{-3}$ na najgloblji točki na $\rho_2 = 1025 \text{ kg m}^{-3}$ na površini. Energijo za mešanje izračunamo z

$$E_m = \int_0^h \left(\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} - \left(\rho_1 - \frac{z}{h}(\rho_1 - \rho_2) \right) \right) S g z dz,$$

kar se poenostavi v $E_m = Sg(\rho_1 - \rho_2)h^2/12$. Če se vsa energija ledene gore velikosti $H = L = 1000 \text{ m}$ in razmerjem stranic $\varepsilon = 0.5$ porabi za mešanje vode do globine enega kilometra, lahko zmešamo območje veliko

$$S = 6 \frac{\rho}{\rho_1 - \rho_2} \frac{LH^3}{h^2} \varepsilon (1 - \varepsilon) \left(1 - \frac{\rho}{\rho_w} \right) \approx 50 \text{ km}^2.$$

V naravi se verjetno za mešanje porabi le manjši delež sproščene energije, lahko pa sklepamo, da tovrsten pojav precej pripomore h kroženju vode okoli ledenih gor in s tem posledično tudi taljenju.

5.3 Opazovanja ledenih gor v naravi

Vse sklepe o vplivu prevračanj ledenih gor na taljenje bi bilo seveda smiselno potrditi z dejanskimi opazovanji. Kljub temu, da je bil pojav že velikokrat opažen, pa konkretnih meritev nimamo. Prevračanje ledenih gor je nepredvidljiv proces, saj ledene gore stalno spreminjajo obliko zaradi zunanjih vplivov. Odlom dela gore ali večji val lahko goro v trenutku spravita iz neke lokalne stabilne lege, pri čemer se ta prevrne.

Tudi iz meritev taljenja ledu je težko določiti, kakšno vlogo ima pri tem prevračanje gor. Kot je navedeno v [11] se morski tokovi v zalivih z ledeniki spreminjajo iz dneva v dan. So pa opazili, da se poleti, ko se prevrne več ledenih gor, mešanje morske vode pospeši. To je sicer precej pričakovano, saj se taljenje ledu in s tem povezani pojavi dogajajo prav poleti. Pozimi v severnih predelih, kjer ledenike in ledene gore opazujemo, morje namreč zamrzne. Za natančnejšo potrditev domnev o taljenju bi bilo potrebno opraviti mnogo več raziskav, ki pa so precej drage in zahtevne. Navsezadnje je prevračanje ledenih gor, oziroma ledene gore nasploh, precej nevarno za ladje. Poleg tega poznavanje mehanizma taljenja ledu ne bo direktno pripomoglo k njegovi ustavitvi, zato tovrstne raziskave tudi niso nujno potrebne.

6. Zaključek

Energijsko najugodnejša lega plavajočega telesa je vedno z daljšo dimenzijo vzporedno z gladino vode. Taka lega telesa je vedno stabilna. V določenih primerih lahko najdemo tudi druge stabilne lege, ki so le lokalni in ne globalni energijski minimumi. Z zapisom potencialne energije telesa lahko

stabilnost enostavno obravnavamo in izračunamo, pri kakšni obliki in orientaciji so telesa še stabilna. V članku smo izračun izvedli za kvader in prikazali rezultate za valj.

S pomočjo obravnave preprostih teoretičnih in eksperimentalnih modelov se lahko preučuje prave ledene gore, njihovo prevračanje in njegov vpliv na okolico. Pri prevračanju gor, ki je močno dušen proces, se v vodi hipoma absorbira velika količina energije. Ta se lahko pretvori v toploto, kar v naravi nima tako pomembnega učinka, ali se porabi za mešanje morske vode. Prav mešanje bi lahko imelo pomemben vpliv na okolico, saj pri njem toplejša voda iz globine segreje hladnejšo vodo na površini, kar pospeši taljenje ledu. Domnev zaradi pomanjkanja raziskav ni mogoče direktno preveriti.

LITERATURA

- [1] Henry Pollack, *Tip of the iceberg*, Physics Today **72** (2019), 12, 70.
- [2] J. C. Burton et al, *Laboratory investigations of iceberg capsize dynamics, energy dissipation and tsunamigenesis*, Journal of geophysical research **42** (2004), F1.
- [3] D.S. Dugdale, *Stability of a floating cylinder*, International Journal of Engineering Science **42** (2004), 7, 691-698.
- [4] AWeith, *Iceberg in the Arctic with its underside exposed*, https://sl.m.wikipedia.org/wiki/Slika:Iceberg_in_the_Arctic_with_its_underside_exposed.jpg, 2017, Accessed: 2022-05-17.
- [5] *Froude number*, https://en.wikipedia.org/wiki/Froude_number, Wikipedia, 2022, Accessed: 2022-5-17.
- [6] *Dispersion (water waves)*, [https://en.wikipedia.org/wiki/Dispersion_\(water_waves\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Dispersion_(water_waves)), Wikipedia, 2022, Accessed: 2022-03-15.
- [7] *Reynolds number*, https://en.wikipedia.org/wiki/Reynolds_number, Wikipedia, 2022, Accessed: 2022-04-20.
- [8] LIGHTHILL, MJ, *Waves in fluids*, Cambridge University Press (1978).
- [9] Juniper, Matthew P. *Overview*, http://www2.eng.cam.ac.uk/~mpj1001/learnfluidmechanics.org/LFM_L0.html, Learn Fluid Mechanics, Accessed 2022-05-10.
- [10] *Density of Ocean Water*, <https://www.windows2universe.org/earth/Water/density.html>, Windows to the Universe, Accessed: 2022-05-10.
- [11] Sutherland, David A. and Straneo, Fiammetta, *Estimating ocean heat transports and submarine melt rates in Sermilik Fjord, Greenland, using lowered acoustic Doppler current profiler (LADCP) velocity profiles*, International Journal of Engineering Science **53** (2012), 60, 50-58.