HOLOGRAFSKI PRINCIP

NATAN DOMINKO KOBILICA

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

V članku je podana fizikalna intuicija za holografski princip, razumevanje katerega zahteva znanje o termodinamiki črnih lukenj. Začne se z običajno termodinamiko in definicijo nastopajočih količin ter zakonov. Nato so podane osnovne lastnosti črnih lukenj in iz njih izpeljani zakoni, ki so analogni zakonom termodinamike. Argumentirana je združljivost zakonov termodinamike s črnimi luknjami, ter prikazane zanimive posledice, ki vodijo do zgornje meje za entropijo. Pojasnjena je povezava med entropijo in informacijo, kar vodi do definicije holografskega principa.

THE HOLOGRAPHIC PRINCIPLE

An intuition for the holographic principle is given. As black hole thermodynamics is a prerequisite, the greater portion of the paper is spent expounding the analogy between thermodynamical quantities and quantities describing black holes. The analogy between equations describing black holes and the laws of thermodynamics is shown and then some interesting consequences are discussed, one of which is the spherical entropy bound. The relation between entropy and information leads to the holographic principle.

1. Uvod

Intuitivno bi rekli, da je količina informacije v poljubnem prostoru sorazmerna njegovi prostornini. Izkaže pa se, da je količina informacije, ki jo lahko spravimo v neko prostornino, navzgor omejena s površino roba te prostornine. To presenetljivo dejstvo, ki sledi iz obravnave črnih lukenj, imenujemo holografski princip.

Najprej podamo osnove termodinamike, nato pa iz osnovnih lastnosti črnih lukenj (masa, Schwarzschildov radij, dogodkovno obzorje in površinska težnost) izluščimo zakone, ki so po obliki analogni termodinamskim. V naslednjem poglavju se posvetimo posledicam vpeljane analogije, posebej zgornji meji za entropijo. Argumentiramo ekvivalenco entropije in količine informacije ter tako prispemo do holografskega principa. Na koncu še na kratko diskutiramo posledice in bolj rigorozne pristope.

Kot navdih in najpomembnejši vir navajamo [1].

2. Termodinamika črnih lukenj

2.1 Osnove termodinamike

Termodinamika se je razvila kot fenomenološka veda in je ena izmed najbolje uveljavljenih področij fizike. Opisuje poljubno telo snovi oziroma sevanja (*termodinamski sistem*) z uporabo *termodinamskih spremenljivk*. To so funkcije stanja sistema. Za njih velja, da so odvisne zgolj od trenutnega stanja sistema in ne od poti, po kateri smo do stanja prišli. Primeri termodinamskih spremenljivk so za idealne pline tlak, volumen in temperatura T, za raztegljivo palico sila, raztezek in temperatura, za dielektrične sisteme pa na primer električno polje, električni dipolni moment in temperatura.

Vsaka funkcija termodinamskih spremenljivk je tudi sama termodinamska spremenljivka. Pomemben primer je notranja energija E, torej skupna energija termodinamskega sistema. V primeru idealnega plina je notranja energija linearna funkcija temperature $E = mc_V T$, kjer je m masa plina, c_V pa specifična toplota pri konstantni prostornini.

Ločimo dva prispevka k spremembi notranje energije termodinamskega sistema: delo W in toploto Q. Delo je tisti del spremembe notranje energije, pri katerem sistem preko makroskopske sile interagira z okolico, toplota pa je preostanek. Za reverzibilne spremembe, pri katerih ni opravljenega dela, definiramo entropijo S kot $\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}E}{T}$. Entropija je funkcija stanja in opazimo, da velja $\mathrm{d}Q = T\,\mathrm{d}S$.

Za vsak termodinamski sistem veljajo štirje *zakoni termodinamike*:

- **Ničti zakon** pravi, da je v termodinamskem sistemu, ki je v ravnovesju, temperatura konstantna.
- **Prvi zakon** (*energijski zakon*) pravi, da je sprememba notranje energije E enaka dovedeni toploti Q in opravljenemu delu W. Pogosto se ga zapiše v diferencialni obliki:
$$\mathrm{d}E = \mathrm{d}Q + \mathrm{d}W = T\,\mathrm{d}S + \mathrm{d}W. \tag{1}$$
- **Drugi zakon** (*entropijski zakon*) pravi, da se entropija izoliranega sistema s časom ne zmanjšuje,
$$\mathrm{d}S \geq 0,$$
za sistem, ki ne izmenjuje toplote z okolico. V nadaljevanju bo za nas ta zakon še posebej pomemben, saj v mnogo miselnih eksperimentih obravnavamo izolirane sisteme.
- **Tretji zakon** pravi, da je katerikoli termodinamski sistem v končno korakih nemogoče ohladiti na temperaturo $T = 0$.

Tako smo definirali pravila, ki določajo obnašanje kateregakoli termodinamskega sistema. Ta pravila povezujejo fizikalno merljive količine (to so termodinamske spremenljivke) z energijo, ki jo lahko sistem prejema/oddaja v obliki dela in toplote. V nadaljevanju želimo na primeru črnih lukenj prepoznati zakone termodinamike in tako podati termodinamski opis črnih lukenj.

Omenimo še, da pogosto lahko preko ostalih fizikalnih razmislekov povežemo termodinamske spremenljivke v enačbo stanja. S tem efektivno zmanjšamo število termodinamskih spremenljivk potrebnih za opis sistema. Na primeru idealnega plina lahko iz ohranitve produkta tlaka, volumna in inverzne temperature iz poljubnih dveh spremenljivk izračunamo tretjo.

2.2 Črne luknje

Črne luknje nastanejo ob zgostitvi velikih količin mase zaradi gravitacijskega privlaka. Lahko si predstavljamo, da se v najenostavnejših črnih luknjah masa nahaja v eni točki, to je singularnost, drugje pa je vakuum. Take sferično simetrične črne luknje imenujemo Schwarzschildove črne luknje in v tej razpravi se osredotočimo samo na tak tip črnih lukenj.

Velikost črne luknje določa njen *Schwarzschildov polmer* r_S, kajti iz krogle z radijem r_S zaradi gravitacije ne mora uiti niti svetloba. Schwarzschildov radij je odvisen zgolj od mase črne luknje M
$$r_\mathrm{S} = \frac{2G}{c^2}M.$$
Ta rezultat izpeljemo z uporabo splošne relativnosti v sferno simetričnem prostoru.

Schwarzschildov radij črne luknje z maso Sonca bi bil na primer slabe tri kilometre, črna luknja z maso Zemlje pa bi imela Schwarzschildov radij slabih devet milimetrov. V vesolju pa najdemo črne luknje z radiji vse od nekaj deset kilometrov pa tudi do nekaj deset milijonov kilometrov.

Sferi s Schwarzschildovim radijem rečemo dogodkovno obzorje (angl. *event horizon* - EH). Njena površina je
$$A_\mathrm{EH} = 4\pi r_\mathrm{S}^2 = \frac{16\pi G^2}{c^4}M^2. \tag{2}$$

Še zadnja pomembna količina, ki jo bomo potrebovali za opis termodinamike črnih lukenj, pa je površinska težnost κ (angl. *surface gravity*). Za Schwarzschildovo črno luknjo velja:
$$\kappa = \frac{GM}{r_\mathrm{S}^2} = \frac{c^4}{4G}\frac{1}{M}. \tag{3}$$

To je količina, ki je v klasični sliki enaka gravitacijskemu pospešku. Na površju Zemlje je tako $\kappa = \frac{GM_{\text{Zemlja}}}{R^2_{\text{Zemlja}}} \approx 10\,\text{m/s}^2$.

Zanimivo je, da imajo težje črne luknje manjšo površinsko težnost, kar je posledica večanja Schwarzschildovega radija linearno sorazmerno z maso. Za črno luknjo z maso Zemlje bi bila površinska težnost okoli $10^{19}\,\text{m/s}^2$, za črno luknjo z maso Sonca pa le okoli $3 \times 10^{13}\,\text{m/s}^2$. Tipične črne luknje v vesolju imajo površinsko težnost vsaj okoli $10^7\,\text{m/s}^2$, torej še vedno bistveno večjo kot je gravitacijski pospešek na Zemlji. Omenimo še, da je za Schwarzschildove črne luknje po vsem dogodkovnem obzorju κ konstanten zaradi sferične simetrije.

Opisali smo Schwarzschildove črne luknje kot objekte, ki imajo maso M, ki je zbrana natanko v eni točki. Zaradi gravitacijskega privlaka obstaja radij (to je Schwarzschildov radij r_S), izven katerega ne mora uiti niti svetloba, zato vidimo črne luknje kot črne. Poleg tega smo definirali tudi površino dogodkovnega obzorja A_EH, to je sfera pri Schwarzschildovem radiju, in površinsko težnost κ, to je gravitacijski pospešek pri Schwarzschildovem radiju.

2.3 Zakoni termodinamike za črne luknje

Z odvajanjem enačbe (2) ugotovimo, kako se površina dogodkovnega obzorja spreminja ob spreminjanju mase črne luknje

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A_\text{EH} &= \frac{16\pi G^2}{c^4} 2M\,\mathrm{d}M, \\ \frac{\kappa}{8\pi G}\,\mathrm{d}A_\text{EH} &= \mathrm{d}M. \end{aligned}$$

V drugi vrstici smo uporabili definicijo površinske težnosti iz enačbe (3). Ta rezultat velja zgolj za Schwarzschildove črne luknje. Iz splošne relativnosti pa bi dobili rezultat

$$\mathrm{d}M = \frac{\kappa}{8\pi G}\,\mathrm{d}A_\text{EH} + \frac{1}{c^2}\,\mathrm{d}W,$$

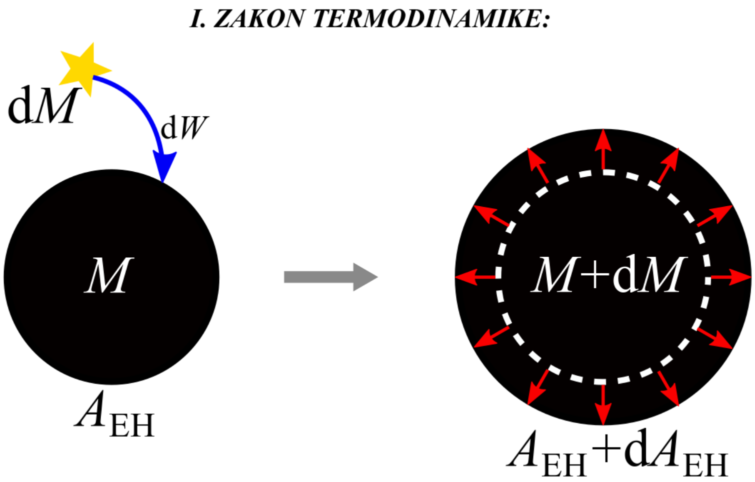
kjer je W delo, ki vključuje spremembo vrtilne količine in naboja črne luknje. Na tem mestu se spomnimo prvega zakona termodinamike (1) in opazimo podobnost (glej tudi sliko 1):

$$c^2\,\mathrm{d}M = \frac{\kappa c^2}{8\pi G}\,\mathrm{d}A_\text{EH} + \mathrm{d}W,$$

kar nakazuje povezave med količinami $E \leftrightarrow M$, $T \leftrightarrow \kappa$ in $S \leftrightarrow A_\text{EH}$. Določimo tudi ujemajoče enote. Levi strani enačb se že ujemata po enotah, na desni pa z dimenzijsko analizo ugotovimo, da je edina možna izbira z osnovnimi konstantami naslednja:

$$\begin{aligned} E_\text{BH} &= Mc^2, \\ T_\text{BH} &= \frac{1}{2\pi}\frac{\hbar}{k_\text{B}c}\kappa, \qquad (4) \\ S_\text{BH} &= \frac{1}{4}k_\text{B}\frac{c^3}{G\hbar}A_\text{EH}. \qquad (5) \end{aligned}$$

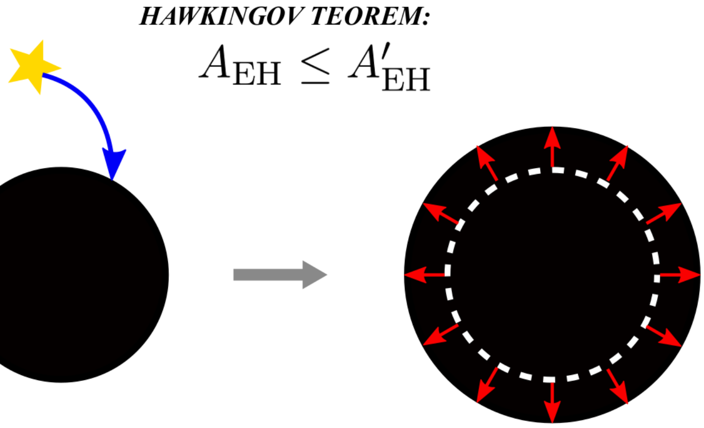
V enačbah indeks BH označuje črne luknje (angl. *black hole*). Zaenkrat še nimamo dobrega argumenta, zakaj smo številski faktor $\frac{1}{8\pi}$ razdelili na $\frac{1}{2\pi}$ in $\frac{1}{4}$ ravno na tak način. V nadaljevanju pokažemo, da tako definirane spremenljivke upoštevajo tudi ostale zakone termodinamike.



Slika 1. Prvi zakon termodinamike črnih lukenj shematsko. Ko se masa črne luknje poveča za $\mathrm{d}M$ pri površinski težnosti κ, se površina dogodkovnega obzorja poveča za $\mathrm{d}A_{\mathrm{EH}}$, s členom $\mathrm{d}W$ pa upoštevamo še povečanje mase na račun narejenega dela.

Glede na to, da nič ne uide iz notranjosti dogodkovnega obzorja, je intuitivno, da se črnim luknjam masa v času zgolj povečuje. Upoštevajoč zvezo (2) se jim torej povečuje tudi površina dogodkovnega obzorja. Opomnimo, da zveza velja zgolj za Schwarzschildove črne luknje. Hawking je pokazal, da se površina dogodkovnega obzorja A_{EH} v času nikoli ne zmanjšuje [5], kar potrjuje prej definirano povezavo z entropijo (glej tudi sliko 2):

$$\mathrm{d}A_{\mathrm{EH}} \geq 0.$$



Slika 2. Hawkingov teorem predstavljen shematsko; ko nekaj mase, na primer bližnja zvezda, pade v črno luknjo, se površina dogodkovnega obzorja vedno poveča.

Hawkingov rezultat o večanju dogodkovnega obzorja črnih lukenj je analogen drugemu zakonu termodinamike. Ker smo analogijo s prvim zakonom že predstavili, si poglejmo še preostala dva zakona.

Ničti zakon zahteva, da je temperatura sistema v ravnovesju konstantna. V zvezi (4) smo temperaturo enačili s površinsko težnostjo. In res, kot smo že omenili, je na dogodkovnem obzorju površinska težnost konstantna. Za Schwarzschildove črne luknje lahko to dejstvo argumentiramo s sferično simetrijo, izkaže pa se, da to velja za vse stacionarne črne luknje.

Tretji zakon termodinamike zahteva, da je termodinamski sistem nemogoče ohladiti na temperaturo 0, kar v analogiji črnih lukenj pomeni, da nobena črna luknja ne more imeti površinske težnosti enake 0. S pogledom na enačbo (3) vidimo, da bi morala imeti takšna (Schwarschildova) črna luknja neskončno maso, kar v končnem vesolju ni mogoče.

Pokazali smo, da za termodinamske spremenljivke M, κ in A_{EH} veljajo vsi štirje zakoni termodinamike. Sedaj pa si poglejmo nekaj posledic, ki bodo poglobile in utrdile naše razumevanje termodinamike črnih lukenj.

2.4 Posledice

2.4.1 Hawkingovo sevanje

Prva in najbolj presenetljiva posledica je Hawkingovo sevanje. Intuicija za sevanje je očitna; vsako telo s temperaturo seva. Potemtakem mora tudi črna luknja s temperaturo $T_{\mathrm{BH}} = \frac{1}{2\pi}\frac{\hbar}{k_{\mathrm{B}}c}\kappa$ sevati. Hawking je rezultat napovedal že leta 1975 kot posledico kvantnih efektov v okolici zunanjosti dogodkovnega obzorja [4]. Od tod tudi pride faktor $\frac{1}{2\pi}$, ki ga do zdaj nismo razložili.

Kvantni efekti, ki povzročijo ta pojav so posledica fluktuacij v energiji vakuuma. Po Heisenbergovem načelu nedoločenosti je energija kvantnih polj neničelna in naključno fluktuira v vsem prostoru. Pospešeni opazovalec vidi kvantna stanja drugače kot mirujoči opazovalec. V primeru, da je kvantni sistem za mirujočega opazovalca v osnovnem stanju, je za pospešenega opazovalca v mešanem stanju s končno neničelno temperaturo. Opisano se imenuje Unruhov učinek in Hawking je uporabil načelo ekvivalence ter efekt posplošil iz pospešenega opazovalca na opazovalca v gravitacijskem polju. Vakuum v gravitacijskem polju črne luknje opazovalci daleč stran torej dojemamo kot sevanje. Hawking je pokazal, da je energijska porazdelitev števila tako nastalih delcev po energiji enaka kot pri črnem telesu s temperaturo T_{BH}.

2.4.2 Temperatura črnih lukenj

Črnim luknjam smo pripisali temperaturo $T_{\mathrm{BH}} = \frac{1}{2\pi}\frac{\hbar}{k_{\mathrm{B}}c}\kappa$. Za Schwarzschildovo črno luknjo lahko povežemo površinsko težnost z maso in dobimo:

$$T_{\mathrm{BH}} = \frac{1}{8\pi}\frac{\hbar c^3}{k_{\mathrm{B}}G}\frac{1}{M}.$$

Torej, tako kot površinska težnost tudi temperatura črnih lukenj pada z njihovo maso. Črna luknja mase našega Sonca bi imela temperaturo okoli $10^{-7}\,\mathrm{K}$, črne luknje v našem vesolju pa imajo temperature med 10^{-8}–10^{-14} K. Glede na to, da je temperatura vesolja[1] $2.7\,\mathrm{K}$, ni presenetljivo, da te temperature še nismo uspeli eksperimentalno preveriti z direktnim merjenjem Hawkingovega sevanja.

2.4.3 Posplošen drugi zakon termodinamike

Še ena pomembna posledica definicije termodinamike črnih lukenj je posplošitev drugega zakona termodinamike. Pravi, da se v poljubnem izoliranem sistemu ohranja oziroma povečuje vsota entropije snovi izven črne luknje in entropije črnih lukenj. Posplošen drugi zakon termodinamike (angl. *Generalized second law* - GSL) se zdaj glasi:

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}\left(S_{\mathrm{snov}} + S_{\mathrm{BH}}\right) \geq 0, \tag{6}$$

kjer je S_{snov} entropija snovi izven črne luknje v sistemu in $S_{\mathrm{BH}} = \frac{1}{4}k_{\mathrm{B}}\frac{c^3}{G\hbar}A_{\mathrm{EH}}$ entropija črne luknje. Zveza ni prav nič drugačna od navadnega drugega zakona termodinamike, le dopustili smo, da je entropija tudi take vrste, kot smo jo definirali v termodinamiki črnih lukenj.

[1] Temperaturo vesolja definiramo iz porazdelitve energij fotonov, ki so nastali pri velikem poku in jim rečemo prasevanje (angl. *cosmic microwave background* - CMB).

2.4.4 Zgornja meja za entropijo

Nadalje lahko uporabimo GSL in podamo zgornjo mejo za entropijo snovi. Začnemo s poljubno snovjo v prostoru, ki ima skupno entropijo S_{snov} in ni črna luknja. Iz te snovi tvorimo črno luknjo (Susskindov proces - glej sliko 3). Če upoštevamo posplošen drugi zakon termodinamike, bo entropija na koncu večja od entropije na začetku:

$$S_{\mathrm{snov}} \leq S_{\mathrm{BH}}.$$

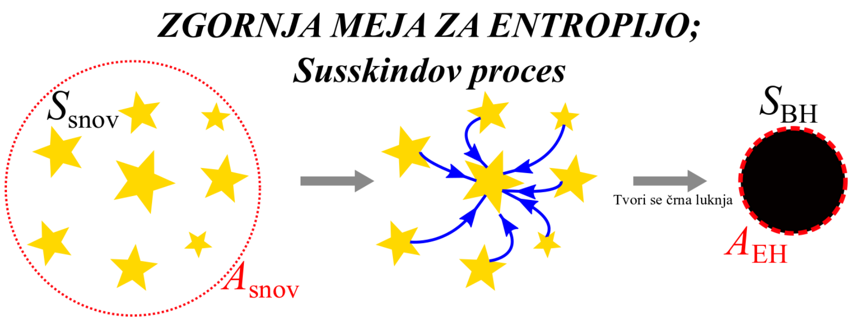
Zdaj upoštevamo enačbo (5) za entropijo črnih lukenj in dobimo naslednjo zvezo:

$$S_{\mathrm{snov}} \leq \frac{1}{4} k_{\mathrm{B}} \frac{c^3}{G\hbar} A_{\mathrm{EH}},$$

Izpostavimo, da je A_{EH} manjša od površine najmanjše krogle, ki obdaja ves začetni sistem snovi A_{snov}, kajti tvorba črne luknje bo gostoto prav gotovo povečala. Zato za poljuben sistem snovi napišemo:

$$S_{\mathrm{snov}} \leq \frac{1}{4} k_{\mathrm{B}} \frac{c^3}{G\hbar} A_{\mathrm{snov}}, \tag{7}$$

kjer je A_{snov} torej površina najmanjše sfere, ki obdaja sistem. Ta rezultat morda ne izgleda tako zanimiv, vendar implicira, da maksimalna količina informacije v prostoru ne raste sorazmerno z volumnom, temveč s površino. Zaradi te znižane dimenzionalnosti se zveza imenuje holografski princip. V nadaljevanju formaliziramo povezavo med informacijo in entropijo.



Slika 3. Shematično prikazan Susskindov proces, prek katerega dobimo zgornjo sferično mejo za entropijo. Na začetku imamo nekaj snovi z entropijo S_{snov}, ki jo zaobjema sfera s površino A_{snov}. Nato pa se ta masa zgosti in tvorimo črno luknjo z entropijo S_{BH} in površino dogodkovnega obzorja A_{EH}, ki je gotovo manjša od A_{snov}, če ne bi bila že prej tam črna luknja. Na sliki je tudi vrsta (ne)enačb; prva je posplošen drugi zakon (6), druga je entropija črnih lukenj (5) zadnja neenakost je posledica zgoščanja mase.

3. Holografski princip

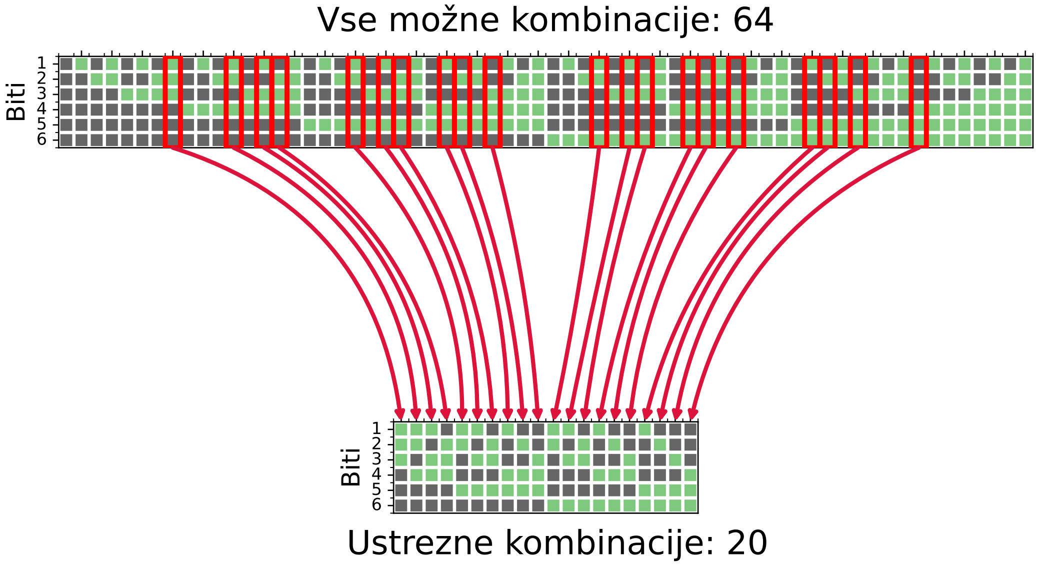
Termodinamika črnih lukenj nam je dala zanimiv rezultat (7), ki navzgor omejuje entropijo nekega sistema z vrednostjo, ki je sorazmerna površini najmanjše krogle, ki ta sistem zaobjema. Poglejmo si, kako lahko iz tega zaključimo, da količina informacije v nekem volumnu ne sme preseči površine najmanjše krogle, ki ta sistem zaobjema (do faktorja natančno).

3.1 Entropija z vidika statistične fizike

Slavna Boltzmannova formula za entropijo povezuje entropijo sistema S s številom makroskopsko neločljivih stanj sistema $\mathcal{N}$

$$S = k_{\mathrm{B}} \ln(\mathcal{N}).$$

Razjasnimo zvezo na primeru. Vzemimo zaporedje šestih klasičnih bitov, ki imajo lahko bodisi vrednost 0 bodisi vrednost 1. Naj bo vsota bitov Σ makroskopski parameter. Če vemo, da je vsota bitov na primer $\Sigma = 3$, lahko izračunamo število vseh stanj s tako vsoto bitov $\mathcal{N}\big|_{\Sigma=3} = \binom{6}{3} = 20$ in dobimo entropijo $S\big|_{\Sigma=3} = k_\mathrm{B} \ln 20$. Za boljšo predstavo dodajamo še sliko 4.



Slika 4. Izračun $\mathcal{N}$ za $\Sigma = 3$. Zgoraj so vse možne kombinacije $n = 6$ bitov (skupno 2^n kombinacij), kjer so biti z vrednostjo 1 obarvani zeleno, biti z vrednostjo 0 pa sivo. Spodaj pa so samo tiste, ki imajo vsoto bitov $\Sigma = 3$. V splošnem jih je $\mathcal{N} = \binom{n}{\Sigma}$.
Kvantno-mehanska interpretacija slike: Zgoraj so vsi bazni vektorji/funkcije prostora šestih spinov; zelena barva označuje valovno funkcijo spin gor, siva pa spin dol. Če v termičnem ravnovesju pričakujemo, da bo skupno enako spinov obrnjenih gor/dol, se Hilbertov prostor zmanjša in ustrezni bazni vektorji so spodaj.

3.2 Informacija in kvantna mehanika

Kvantna mehanika trenutno najuspešnejše opisuje naše vesolje na fundamentalnem nivoju, zato razjasnimo pojem informacije še v tem kontekstu. Vpeljimo kvantno-mehanski pojem *števila prostostnih stopenj* N. Spomnimo se, da v kvantni mehaniki sistem opišemo z valovno funkcijo, ki je vektor v Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$. Definirajmo

$$N = \ln(\dim \mathcal{H}).$$

Na primeru podamo intuicijo za število prostostnih stopenj. Hilbertov prostor za en spin ima dimenzijo dve, kajti spin dobro opišemo z njegovo projekcijo na os z. Za zaporedje šestih spinov je Hilbertov prostor tenzorski produkt šestih podprostorov z dimenzijo dve, torej je skupna dimenzija $\dim \mathcal{H} = 2^6$ torej $N = 6 \ln 2$.

V klasični limiti je zaporedje spinov kar zaporedje bitov, ki imajo lahko bodisi vrednost 1 (gor) ali 0 (dol). Koristna interpretacija je torej, da nam število prostostnih stopenj N torej pove, koliko bitov informacije potrebujemo, da opišemo naš sistem (do faktorja $\ln 2$ natančno).

Povežimo zdaj entropijo v statistični fiziki s kvantno-mehansko interpretacijo informacije na prej opisanem zaporedju šest spinov. Če ni drugih dejavnikov v termičnem ravnovesju pričakujemo naključno ureditev, torej tri spine obrnjene navzgor in tri navzdol. V jeziku kvantne mehanike to pomeni, da baza Hilbertovega prostora za valovno funkcijo ni več sestavljena iz vseh možnih kombinacij spinov gor in dol, temveč samo tistih, ki imajo tri spine gor in tri dol. Pomagamo si lahko s kvantno-mehansko interpretacijo slike 4.

Vidimo torej, da gre za čisto analogno dogajanje kot prej, zato velja, da je dimenzija zmanjšanega Hilbertovega prostora $\mathcal{H}\big|_{\Sigma}$ enaka številu stanj s primernimi makroskopskimi parametri $\mathcal{N}$:

$$\dim \mathcal{H}\big|_{\Sigma} = \mathcal{N}.$$

Zato lahko združimo naše definicije entropije S in števila prostostnih stopenj N od prej in zapišemo:

$$N = S/k_{\mathrm{B}}, \tag{8}$$

kar direktno povezuje količino informacije in entropijo.

3.3 Holografski princip in interpretacija

S primerno interpretacijo entropije (enačba (8)) lahko sedaj zapišemo zvezo (7) kot:

$$\boxed{N \leq \frac{c^3}{G\hbar}\frac{A}{4},}$$

kjer je N število prostostnih stopenj v nekem delu vesolja, A pa površina krogle, ki ta del vesolja obdaja. Rezultat zajema bistvo holografskega principa in nam pove, da maksimalno količino informacije N v delu vesolja, ki ga obkroža krogla površine A, raste sorazmerno s to površino A.

V kroglo s površino kvadratnega metra lahko spravimo približno 1.4×10^{69} bitov informacije. Za primerjavo: največja gostota informacije, ki jo poznamo, je v DNA in znaša približno 1.72×10^{18} bitov na gram. V našem telesu je vse skupaj približno 18 gramov DNA, ki bi jih lahko teoretično spravili v kroglo s premerom 2.7 cm. Enaka krogla bi kot maksimalno nasičena z informacijo nosila 3.2×10^{66} bitov informacije, kar je za faktor 10^{48} več kot DNA. Poleg tega bi bila to seveda črna luknja. Podatki so iz [2].

Formalizirajmo intuicijo, da količina informacije v vesolju raste sorazmerno s prostornino. Vprašajmo se, največ koliko informacije lahko spravimo v nek volumen V. Če bi sledili zgolj teoriji kvantne mehanike, bi lahko v vsako točko postavili harmonski oscilator in to zvezno. Torej bi bilo v danem prostoru neskončno točk z neskončno dimenzionalnim harmonskim oscilatorjem. Denimo pa vseeno, da dolžine, manjše od Planckove, niso ločljive, zato vesolje razdelimo (diskretiziramo) na t. i. Planckovo mrežo harmonskih oscilatorjev, to so torej sistemi neodvisnih oscilatorjev za $l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.6 \times 10^{-35}$ m vsaksebi. V splošnem ima Hilbertov prostor za vsak harmonski oscilator neskončno dimenzij. Vključimo zdaj še relativistično zahtevo, da vsak od oscilatorjev ne tvori črne luknje, torej je njegova energija manjša od mase Schwarzschildove črne luknje s premerom l_P. Po enačbi (2) dobimo $E \leq \frac{1}{4}E_P = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} = 3.3 \times 10^{18}$GeV. Tako smo omejili spekter vsakega harmonskega oscilatorja. Denimo, da je zdaj dimenzija Hilbertovega prostora $\mathcal{N}_{\mathrm{HO}} < \infty$. Ker je število harmonskih oscilatorjev sorazmerno s prostornino V, lahko po tem izračunu naš sistem opišemo s Hilbertovim prostorom dimenzije $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\mathrm{HO}}^{V/l_P^3}$. To pomeni, da je

$$N \propto \ln \mathcal{N} \propto V,$$

kar si intuitivno predstavljamo kot rast količine informacije z volumnom.

Fizikalno je argument proti rasti z volumnom naslednji; če si izberemo neko sfero v prostoru in vanjo tlačimo informacijo v obliki mase ali pa energije (oziroma jih zapisujemo v mrežo harmonskih oscilatorjev), se bo pri neki masi/energiji tvorila črna luknja, ki bo vsebovala največjo možno količino informacije[2], to je $\frac{c^3}{G\hbar}\frac{A}{4}$. Ker je informacijo nemogoče uničiti, v naši sferi nikoli ni smelo biti več kot tolikšna količina informacije.

[2] V izpeljavi, kjer smo pokazali intuicijo o rasti števila prostostnih stopenj z volumnom smo predpostavili samo, da se v vsaki celici Planckove mreže ne tvori črna luknja, tu pa zahtevamo, da se v večjem območju naenkrat ne tvori črna luknja, kar je strožji pogoj.

3.4 Globlje posledice

Holografski princip je zelo pomemben za nadaljnji razvoj teoretične fizike. V 20. stoletju je fizika pridobila dve izmed najnatančnejših in dodelanih teorij, to sta splošna teorija relativnosti in kvantna mehanika. Vendar pa ostaja združitev teh vej fizike odprto vprašanje. Zato so vpogledi, kot je holografski princip, zelo dragoceni za prizadevanje združitve relativnosti in kvantne mehanike. Seveda holografski princip ni končna enačba, vendar pa nam vseeno pomaga razumeti, kakšne bodo lastnosti teorije, ki bo združila kvantno mehaniko in relativnost.

Trenutno najboljši kandidat za združitev kvantne mehanike in splošne relativnosti je teorija strun, za katero pa še ni popolnoma znano, do kakšne mere se ujema z realnostjo. Zanimivo je, da teorija strun napoveduje povezavo med Anti-de Sitter (AdS) prostori in teorijo konformnih polij (CFT - angl. *conformal field theory*). Ta t. i. AdS/CFT korespondenca [3] je pravzaprav točno dualnost informacije in geometrije, torej manifestacija holografskega principa. Tudi to je eden izmed razlogov, da je teorija strun dober kandidat za združitev kvantne mehanike in splošne relativnosti.

3.5 Relativistična formulacija

Pomanjkljivost predstavljenega razmisleka je, da smo predpostavili statično vesolje in statičnega opazovalca. Prostorske razdalje in posledično površine ter prostornine v splošnem nimajo enakih vrednosti za vse opazovalce in z nekaterimi protiprimeri se lahko pokaže, da lahko holografski princip, kot smo ga definirali v tej razpravi, kršimo. Obstaja pa tudi elegantnejša formulacija, pri kateri uporabljamo svetlobne ovojnice (angl. *light sheets*), in tako dobimo kovariantno[3] obliko holografskega principa, ki drži za vse opazovalce in sisteme. Za natančno in berljivo izpeljavo holografskega principa na svetlobnih ovojnicah priporočamo vir [1]. Za intuicijo zgolj povemo, da definicija volumna poteka preko poti svetlobe v prostor-času, ki pa je enaka v vseh opazovalnih sistemih.

4. Zaključek

Opisali smo termodinamiko črnih lukenj. Izhajali smo iz osnov termodinamike in razumevanja črnih lukenj ter pokazali analogijo med termodinamskimi zakoni in enačbami, ki opisujejo črne luknje. Dobljena termodinamika črnih lukenj je v splošnem močno orodje, ki ima mnogo posledic, pogledali smo si le nekatere. Poleg Hawkingovega sevanja in temperature črnih lukenj je bil za nas najpomembnejši posplošen drugi zakon termodinamike. Ta nam omogoča, da entropijo snovi v vesolju navzgor omejimo s površino krogle, ki to snov obdaja.

Pokazali smo povezavo med entropijo in informacijo nato pa izhajajoč iz posledic termodinamike črnih lukenj definirali holografski princip. Holografski princip je nenavadna posledica termodinamskega opisa črnih lukenj, kajti povezuje informacijo in geometrijo. Teorija, ki bo v prihodnosti združila kvantno mehaniko in relativnost, mora upoštevati holografski princip. To dejstvo naredi holografski princip izrednega pomena za napredek teoretične fizike.

LITERATURA

[1] R. Bousso, *The holographic principle*, Reviews of Modern Physics **74** (2002), 825–874.

[2] Y. Erlich, D. Zielinski, *DNA Fountain enables a robust and efficient storage architecture*, Science **355** (2017), 950–954.

[3] J. Maldacena, *The Large-N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity*, International Journal of Theoretical Physics **38** (1999), 1113–1133.

[4] S. W. Hawking., *Particle creation by black holes*, Communications In Mathematical Physics **43** (1975), 199–220.

[5] S. W. Hawking., *Gravitational Radiation from Colliding Black Holes*, Physical Review Letters **26** (1971), 1344–1346.

[3] Kovariantne količine so takšne, ki se ne spreminjajo pri transformacijah koordinatnih sistemov.