PROBLEM (NE)EVKLIDSKIH OKOLIC PRI LEPLJENJU 3-MNOGOTEROSTI

KATARINA ŠIPEC

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

V tem delu je opisano lepljenje mnogokotnikov vzdolž njihovih robov in utemeljen zaključek, da vedno dobimo ploskev. Ob predpostavki orientabilnosti ploskve je ta ploskev tudi določena. Predstavljen je problem evklidskih okolic oglišč pri analognem lepljenju lic oktaedra, če se evklidske okolice zlepijo v stožec nad ploskvijo pozitivnega rodu.

THE PROBLEM OF (NON)-EUCLIDEAN NEIGHBOURHOODS OBTAINED BY GLUING 3-MANIFOLDS

This work describes gluing polygons along their edges and concludes that we always obtain a surface. Assuming orientability of the surface, this surface is determined. Presented is the problem of Euclidean neighbourhoods of vertices obtained by analogous gluing of octahedron faces in the case that Euclidean neighbourhoods are glued into a cone of a surface of positive genus.

1. Uvod

Ena od možnih konstrukcij novih topoloških prostorov je lepljenje že poznanih. Pri lepljenju gre za identifikacijo izbranih točk, zanima pa nas, katere lastnosti se prenesejo na zlepek. Poseben primer je, ko je naš začetni prostor zelo lep, lokalno evklidski – mnogoterost, in želimo, da je zlepek prav tako lep.

Če zlepimo dve stranici dveh kvadratov, lahko verjamemo, da dobimo pravokotnik. To bomo natančneje opisali tudi v drugem razdelku. Pri tem gre za lepljenje dveh zaprtih homeomorfnih podmnožic na robu in prav takim lepljenjem se bomo posvetili.

V drugem poglavju bomo videli, da z dovolj omejitvami na lepljenje mnogokotnikov po robovih lahko dosežemo, da je dobljeni zlepek vedno ploskev oziroma mnogoterost. V treh dimenzijah lahko pri analognem lepljenju trikotnikov oziroma lic oktaedra zaidemo v težave. V zlepku se lahko pojavijo točke brez evklidskih okolic, torej zlepek ne more biti mnogoterost.

2. Lepljenje mnogoterosti

Omejili se bomo na lepljenja mnogokotnikov (in kasneje oktaedra) po njihovih robovih. V parih bomo zlepili po dva robova mnogokotnikov (istega ali različnih). Dodatno bomo pazili na orientacijo.

2.1 Lepljenje

Lepljenje je identifikacija izbranih točk iz nekega topološkega prostora. Točke, ki se med seboj identificirajo, bodo v zlepku predstavljale eno točko, zato identifikacije najlažje opišemo s kvocientom po ekvivalenčni relaciji.

Spomnimo se, da je ekvivalenčna relacija refleksivna, simetrična in tranzitivna relacija, ki nam določa razbitje množice na ekvivalenčne razrede (točke v kvocientnem prostoru).

Definicija 1 (kvocientni prostor). Naj bo X topološki prostor in $\sim$ ekvivalenčna relacija na X. *Kvocientna množica*

$$X/_\sim = \{[x];\ [x] = \{y \in X;\ y \sim x\}, x \in X\}$$

je množica vseh ekvivalenčnih razredov točk v X.

Kvocientna projekcija je preslikava $q : X \to X/_\sim$,

$$q : x \mapsto [x].$$

Kvocientna topologija na $X/_\sim$ je množica

$$\mathcal{T} = \{V \subseteq X/_\sim;\ q^{-1}(V) \text{ je odprta v } X\}.$$

Kvocientni prostor prostora X je njegova kvocientna množica, opremljena s kvocientno topologijo $(X/_\sim, \mathcal{T})$.

Za topologijo na kvocientni množici (oziroma v kvocientnem prostoru) pravzaprav vzamemo najmočnejšo topologijo, pri kateri je kvocientna projekcija še zvezna.

Opomba 1. Oznako $X/_\sim$ bomo razumeli kot kvocientni topološki prostor, ne kot množico.

Zlepek topoloških prostorov bo njihov kvocient, pri katerem ekvivalenčna relacija izhaja iz neke zvezne preslikave. Če imamo zvezno preslikavo iz enega topološkega prostora v drugega, lahko vsako točko iz prvega naravno identificiramo z njeno sliko.

Definicija 2 (zlepek). Naj bosta X in Y disjunktna topološka prostora, $A \subseteq X$ in $\phi : A \to Y$ zvezna preslikava. Zlepek prostorov X in Y vzdolž preslikave ϕ je kvocientni prostor

$$X \cup_\phi Y := X \cup Y/_{a \sim \phi(a);\ a \in A}.$$

Najlepši so zlepki po homeomorfizmih zaprtih podmnožic, torej ko je množica A zaprta v prostoru X in ϕ homeomorfizem na svojo sliko.

Namesto da opazujemo dva prostora, X in Y, in preslikavo med njima, lahko rečemo, da smo lepili (nepovezan) prostor $X \amalg Y$ samega s seboj. Tudi v splošnem ni treba, da vzamemo dva različna topološka prostora. Lahko definiramo preslikavo f iz podmnožice $A \subseteq X$ nazaj v prostor X in spet definiramo ekvivalenčno relacijo, ki je porojena z zahtevo, da je vsaka točka $x \in A$ ekvivalentna svoji sliki $f(x)$. Definicijo lepljenja bi tako lahko analogno zapisali tudi za primer, ko prostora X in Y nista disjunktna.

Primer lepljenja dveh homeomorfnih zaprtih podmnožic je lepljenje dveh stranic kvadrata. Rezultat nas ne bo presenetil, bomo pa primer razgradili do definicij, da pojme ponotranjimo.

Primer 1 (lepljenje dveh kvadratov). Primer lepljenja dveh topoloških prostorov vzdolž homeomorfizma je lepljenje dveh kvadratov vzdolž ene stranice. Naj bosta

$$X := [0,1] \times [0,1] \times \{0\} \quad \text{in} \quad Y := [0,1] \times [0,1] \times \{1\}$$

zaprta enotska kvadrata, opremljena z evklidsko topologijo. Za lažje razumevanje vpeljemo tretjo koordinato, ki loči med točkami v kvadratu X in točkami v kvadratu Y (lahko si predstavljamo, da kvadrata ležita v različnih ravninah).

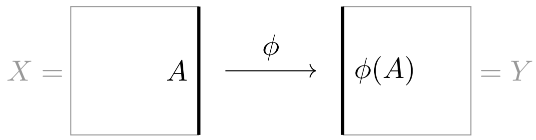
Naj bo $A = \{(1, y, 0); 0 \le y \le 1\}$ desna stranica prvega kvadrata in preslikava $\phi : A \to Y$, podana s predpisom

$$\phi : (1, y, 0) \mapsto (0, y, 1),$$

homeomorfizem med stranico A in levo stranico kvadrata Y. Za preslikavo ϕ bi lahko vzeli poljuben homeomorfizem med istima stranicama in bi dobili isti zlepek, a je izbrani homeomorfizem najenostavnejši.

Homeomorfizem ϕ določa ekvivalenčno relacijo na $X \cup Y$, ki identificira vsako točko $a \in A$ z njeno sliko, ostale točke kvadratov pa so vsaka v svojem ekvivalenčnem razredu. Zapišimo razrede te relacije:

$$[(x, y, i)] = \begin{cases} \{(x, y, 0)\}; & i = 0 \text{ in } x \neq 1 \\ \{(x, y, 1)\}; & i = 1 \text{ in } x \neq 0 \\ \{(1, y, 0),\ (0, y, 1)\}; & (i = 0 \text{ in } x = 1) \text{ ali } (i = 1 \text{ in } x = 0) \end{cases}.$$



Slika 1. Homeomorfizem ϕ med stranicama kvadratov.

Zlepek $X \cup_\phi Y$ je sicer abstraktni kvocientni prostor $(X \cup Y)/_\sim$ ekvivalenčnih razredov $[a]$ za $a \in X \cup Y$, a je homeomorfen pravokotniku, zato bomo *zlepek* rekli kar temu. Homeomorfnost dokazujemo z iskanjem homeomorfizma. S P označimo pravokotnik $[0,2] \times [0,1]$ in si oglejmo preslikavo

$$\begin{aligned} h &: (X \cup Y)/_\sim \to P, \\ h &: [(x,y,i)] \mapsto (x+i, y). \end{aligned}$$

Preslikava h je dobro definirana, ker je konstantna na ekvivalenčnih razredih. Res se za vsak $y \in [0,1]$ točki $(0,y,1)$ in $(1,y,0)$ preslikata v isto točko v pravokotniku. Očitno je tudi bijektivna.

Zveznost preslikave h preverimo z opazovanjem praslik odprtih okolic. Za topologijo na pravokotniku P seveda vzamemo evklidsko topologijo. Vzemimo poljubno točko x iz pravokotnika.

Če točka x ne leži na daljici $\{1\} \times [0,1]$, ima neko dovolj majhno (evklidsko) okolico $U = \mathring{B}(x,\varepsilon) \cap P$, ki te daljice ne seka. Brez škode za splošnost lahko vzamemo točko na levi strani daljice. Preveriti moramo odprtost praslike $h^{-1}(U)$. Ta bo po definiciji kvocientne topologije odprta natanko tedaj, ko bo odprta njena praslika s kvocientno projekcijo, torej množica $q^{-1}\left(h^{-1}(U)\right)$. Velja

$$q^{-1}\left(h^{-1}\left(\mathring{B}(x,\varepsilon) \cap P\right)\right) = \mathring{B}\left(q^{-1}(h^{-1}(x)), \varepsilon\right) \cap X,$$

ki pa je po definiciji evklidske topologije na X odprta množica.

Ostane še primer, ko točko x vzamemo z daljice $\{1\} \times [0,1]$. Spet vzemimo njeno poljubno odprto okolico $U = \mathring{B}(x,\varepsilon) \cap P$. Podobno kot v prejšnjem primeru moramo premisliti, da je praslika $q^{-1}\left(h^{-1}(U)\right)$ odprta v začetnem prostoru. V tem primeru je praslika okolice U sestavljena iz dveh praslik – iz tistih točk v X, ki se slikajo v levo polovico krogle U v pravokotniku P, in tistih točk v Y, ki se slikajo v njeno desno polovico. Ker sta polkrogli v prostorih X in Y odprti (torej je odprta njuna unija), je tudi v ekvivalenčnih razredih $[(1,y,0)] = [(0,y,1)]$ preslikava h zvezna, torej je zvezna povsod.

Prostor $(X \cup Y)/_\sim$ je kot kvocient (zvezna slika) kompaktnega prostora kompakten. Torej je preslikava h zvezna preslikava, ki slika iz kompaktnega prostora v Hausdorffov prostor, zato je zaprta [1, stran 59].

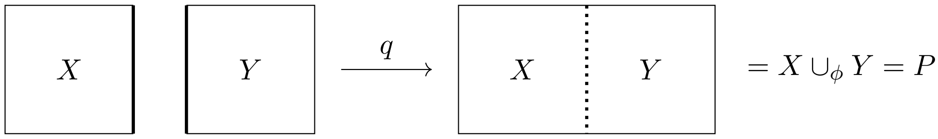
Preslikava h je bijektivna, zvezna in zaprta, torej je homeomorfizem. Njen inverz $h^{-1} : P \to (X \cup Y)/_\sim$ opišemo s predpisom

$$h^{-1} : (x,y) \mapsto \begin{cases} [(x,y,0)]; & x \leq 1 \\ [(x-1,y,1)]; & x \geq 1 \end{cases}.$$

Tudi ta preslikava je dobro definirana, ker se točke s koordinato $x = 1$ s prvim in drugim predpisom preslikajo v isti ekvivalenčni razred.

$$\begin{tikzcd} X \cup Y \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "\hat{q}"] & \\ (X \cup Y)/_\sim \arrow[r, "h"'] & P \end{tikzcd}$$

Ker med homeomorfnimi prostori ne ločimo, bomo kot *zlepek* razumeli kar pravokotnik (ki je topološko sicer disk), kot kvocientno preslikavo pa preslikavo $\hat{q} := h \circ q$.



Slika 2. Lepljenje dveh kvadratov vzdolž homeomorfizma ϕ med stranicama.

Da dobimo pravokotnik, bi verjetno ugibali že na začetku, saj na to namiguje že beseda lepljenje. Vidimo, da je vse precej intuitivno.

Pri lepljenju razrede ekvivalenčne relacije preberemo iz preslikav. Ker lahko hkrati definiramo več preslikav (in jih bomo, ker želimo zlepiti več robov istih mnogokotnikov), te hkrati porodijo več ekvivalenčnih relacij, ki jih lahko združimo v eno.

Definicija 3 (zlepek vzdolž več preslikav). Naj bo $m \in \mathbb{N}$ naravno število, X in Y_i (ne nujno različni) topološki prostori ter $A_i \subseteq X$ podmnožice prostora X za vsak $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Naj bodo $\phi_i : A_i \to Y_i$ zvezne preslikave. *Zlepek* prostorov X in Y_i vzdolž preslikav ϕ_i je kvocientni prostor

$$X \cup_{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m} \left(\bigcup_{i=1}^{m} Y_i \right) := \left(X \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m} Y_i \right) \right) /_{\sim},$$

kjer je $\sim$ ekvivalenčna relacija, porojena z zahtevo, da za vsak $i \leq m$ in vsak $x \in A_i$ velja $x \sim \phi_i(x)$.

Zaradi zahteve po ekvivalenčnosti relacije v isti ekvivalenčni razred spadajo tudi točke $y_i \in Y_i$ in $y_j \in Y_j$, za katere obstaja neki $x \in X$, da velja $\phi_i(x) = y_i$ in $\phi_j(x) = y_j$.

Zlepek vzdolž več preslikav bi lahko dobili tudi z zaporednim upoštevanjem preslikav ϕ_i. To je dovolj utemeljiti za dve preslikavi, torej za ϕ_1 in ϕ_2, na končno mnogo pa posplošimo z indukcijo.

Trditev 1. *Naj bodo X, Y_1 in Y_2 topološki prostori, $A_1, A_2 \subseteq X$ podmnožici in $\phi_1 : A_1 \to Y_1$ ter $\phi_2 : A_2 \to Y_2$ preslikavi. Potem velja*

$$X \cup_{\phi_1, \phi_2} (Y_1 \cup Y_2) = (X \cup_{\phi_1} Y_1) \cup_{\phi_2} Y_2,$$

pri čemer v drugem primeru relacijo $\sim_2$, ki je porojena s preslikavo ϕ_2, razumemo kot $[x]_1 \sim_2 \phi_2(x)$.

Dokaz. Ekvivalenčni razredi točk so očitno v obeh primerih enaki, saj tako razumemo kvocientno projekcijo q_2. Kvocientna projekcija q iz prvega zlepka (iz definicije 3 vzdolž preslikav ϕ_1 in ϕ_2), kjer upoštevamo identifikacije obeh preslikav hkrati, je tako enaka kompoziciji kvocientnih projekcij, kjer zaporedno upoštevamo identifikacije ene in druge preslikave, torej velja $q = q_2 \circ q_1$.

Kaj pa topologija? V drugem primeru so odprte vse množice, katerih praslika s kvocientno projekcijo q_2 je odprta v $X \cup_{\phi_1} Y_1$. Odprte množice v tem prostoru pa so ravno tiste, katerih praslika s kvocientno projekcijo q_1 je odprta v začetnem prostoru. Torej so odprte množice ravno tiste, katerih praslika s kompozicijo $q_2 \circ q_1$ je odprta. To je ravno kvocientna preslikava q in res na obeh zlepkih dobimo tudi isto topologijo.

To pomeni, da lahko prostore najprej lepimo vzdolž ene preslikave in nato na kvocientu upoštevamo še identifikacije druge preslikave. Še več, ker preslikavi nastopata simetrično, lahko njuni vlogi obrnemo in najprej lepimo vzdolž preslikave ϕ_2 in nato vzdolž preslikave ϕ_1. Poljubno lahko izbiramo tudi vrstni red pri lepljenju vzdolž končno mnogo preslikav, zato bomo v nadaljevanju upoštevali kar vse naenkrat.

2.2 Mnogoterosti

Posebej zanimivi so zlepki mnogoterosti. Mnogoterosti so prostori, ki lokalno izgledajo kot evklidski prostori.

Primer dvodimenzionalne mnogoterosti je mnogokotnik, njegov rob sestavljajo stranice (daljice oziroma enodimenzionalne mnogoterosti), primer tridimenzionalne mnogoterosti pa oktaeder, katerega rob je sestavljen iz trikotnih lic (ploskev oziroma dvodimenzionalnih mnogoterosti). Te bomo lepili po robovih, zato se lahko dodatno omejimo na to, da vse mnogoterosti lepimo po robovih. Videli bomo, da se v tem primeru prenesejo "lepe" lastnosti z začetnih prostorov na zlepek.

Definicija 4 (mnogoterost). Naj bo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Topološki prostor M je *topološka mnogoterost dimenzije* n, če je 2-števen, Hausdorffov in ima vsaka točka $x \in M$ neko odprto okolico, homeomorfno $\mathbb{R}^n$ ali $\mathbb{R}^n_+$. Tako okolico U imenujemo *evklidska okolica*, homeomorfizem $h : U \to \mathbb{R}^n$ oz. $h : U \to \mathbb{R}^n_+$ pa *karta*.

V definiciji sta omenjeni 2-števnost in Hausdorffovost. Spomnimo se, da je topološki prostor X (opremljen s topologijo τ) 2-števen, če ima neko števno bazo topologije τ. Prostor X je Hausdorffov (oziroma T_2), če lahko poljubni točki ločimo z disjunktnima okolicama.

Povezani mnogoterosti dimenzije 1 rečemo *krivulja*, povezani mnogoterosti dimenzije 2 pa *ploskev*.

Ko iščemo evklidske okolice točk mnogoterosti v evklidskih prostorih (in njihovih kvocientih), ponavadi iščemo odprte krogle $\mathring{B}^n$, za katere vemo, da so homeomorfne $\mathbb{R}^n$, ali polkrogle $\mathring{B}^n_+$, ki so homeomorfne $\mathbb{R}^n_+$. Take okolice so lahko zelo majhne in jih je lažje najti.

Opomba 2. Naj bodo M mnogoterost, $x \in M$, $U_x \subseteq M$ evklidska okolica točke x in q kvocientna projekcija lepljenja na mnogoterosti M. Če projekcija q na množici U_x ne naredi nobenih identifikacij, je zožitev $q|_{U_x} : U_x \to q(U_x)$ homeomorfizem, okolica $q(U_x)$ pa evklidska okolica točke $q(x)$ v zlepku $M/_\sim$. Res, ker je vsaka točka v svojem ekvivalenčnem razredu, so v bijektivni korespondenci, posledično pa so v bijektivni korespondenci tudi odprte množice v prostoru M in v zlepku, zato se tudi topologija ohranja.

Definicija 5 (notranjost in rob mnogoterosti). Točka $x \in M$ je *notranja*, če ima kakšno okolico homeomorfno $\mathbb{R}^n$, sicer je *robna*. Množico notranjih točk imenujemo *notranjost mnogoterosti* M in jo označimo z $\operatorname{int} M$, množico robnih točk pa *rob mnogoterosti* M in jo označimo z ∂M.

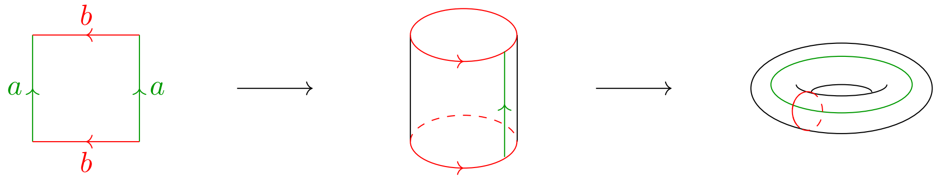
Primer lepljenja dveh dvodimenzionalnih mnogoterosti je lepljenje dveh kvadratov vzdolž ene stranice iz primera 1. Tam smo zlepili dve stranici različnih kvadratov vzdolž enega homeomorfizma. Poglejmo si še primer, kjer upoštevamo dve preslikavi iz prostora vase. Po trditvi 1 lahko najprej upoštevamo lepljenje vzdolž ene preslikave in nato še lepljenje vzdolž druge.

Primer 2. Na kvadratu $X = [0,1]^2$ definiramo homeomorfizma med po dvema nasprotnima stranicama $\phi : \{0\} \times [0,1] \to \{1\} \times [0,1]$ in $\psi : [0,1] \times \{0\} \to [0,1] \times \{1\}$ s predpisoma

$$\phi : (0,y) \mapsto (1,y),$$
$$\psi : (x,0) \mapsto (x,1).$$

Kot v primeru 1 lahko premislimo, kakšni so ekvivalenčni razredi in kakšna je topologija na zlepku. Izkaže se, da je dobljeni zlepek homeomorfen torusu.

Puščice na sliki 3 označujejo le smer lepljenja (ki je sicer v našem primeru opisana s točno izbiro homeomorfizmov).



Slika 3. Lepljenje kvadrata v torus.

Iz mnogoterosti želimo z lepljenjem dobiti mnogoterost. V njeni definiciji sta zahtevana 2-števnost in Hausdorffovost prostora. Naslednji izrek nam pove, da sta za zlepek dveh mnogoterosti, pri čemer lepimo po zaprtih množicah, pogoja vedno izpolnjena.

Izrek 2. *Naj bosta X in Y disjunktna topološka prostora, $A \subseteq X$ zaprta in $f : A \to Y$ zaprta vložitev (homeomorfizem na svojo sliko, ki zaprte množice preslika v zaprte). Definiramo $Z := X \cup_f Y$. Tedaj velja:*

1. *če sta X in Y 2-števna prostora, je Z 2-števen prostor,*
2. *če sta X in Y Hausdorffova prostora, je Z Hausdorffov prostor.*

Dokaz izreka izpustimo. Ideja je v tem, da bazo topologije zlepka dobimo z lepljenjem baznih množic začetnih prostorov. Iz števnih dobimo števne, hkrati pa jih je dovolj, da ločijo točke. Podrobnejši dokaz je v [2].

Opomba 3. Izrek velja tudi v našem primeru, kjer v parih identificiramo nekaj stranic istega mnogokotnika (kot v primeru dvojnega lepljenja stranic kvadrata v torus 2) ali nekaj lic istega oktaedra. Gre za končno število lepljenj (po kompaktnih množicah) in ekvivalenčni razredi točk so končni, okolice nastalih točk pa so zato sestavljene iz končno mnogo zlepljenih okolic. Premislek, da takšna lepljenja ohranjajo 2-števnost in Hausdorffovost je analogen dokazu prejšnjega izreka 2.

Pri naših lepljenjih bo tako zlepek mnogoterost takoj, ko bo imela vsaka točka evklidsko okolico, zato se brez slabe vesti osredotočimo le še nanje.

2.3 Orientacija

Poleg tega, da lepimo mnogoterosti po homeomorfnih zaprtih podmnožicah njihovih robov, bomo pazili še na orientacijo.

Med dvema stranicama mnogokotnikov obstajata dva bistveno različna homeomorfizma. Loči ju smer lepljenja. Daljico u_1u_2 zlepimo z daljico v_1v_2 ali z daljico v_2v_1. Lepljenji sta očitno lepljenji med istima množicama, loči pa ju smer oziroma orientacija.

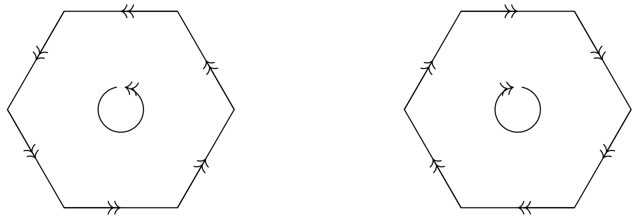
Orientacija je različno definirana za enodimenzionalne, dvodimenzionalne in tridimenzionalne mnogoterosti, a so te med seboj zelo povezane. Osredotočili se bomo na orientacije daljic, mnogokotnikov in poliedrov. Mnogoterost je *orientabilna*, če premore kakšno orientacijo.

Na slikah orientacijo označimo s puščicami. Uporabili bomo dvojne puščice, da jih lažje ločimo od puščic, ki predstavljajo smer lepljenja. Te smo videli že v primeru lepljenja kvadrata v torus (2).

Orientacija daljice je določena z urejenim parom njenih krajišč oziroma s smerjo vektorja od prvega do drugega krajišča. Daljica ima torej dve orientaciji (to velja tudi za krivulje v splošnem). Orientacijo daljice lahko razumemo tudi kot smer, v katero se premikamo.

Orientacijo mnogokotnika P_k definiramo z izbiro smeri (enotske) normale na ravnino, v kateri leži. Vsak mnogokotnik ima tako dve (nasprotni si) orientaciji. Drugi način določanja orientacije je s smerjo vrtenja mnogokotnika. Kot lahko na daljici potujemo v dve smeri, lahko mnogokotnik okoli središča vrtimo v dve smeri. Iz ene definicije dobimo drugo s pomočjo pravila "desnega vijaka".

Rob mnogokotnika predstavljajo daljice, katerih orientacijo določa orientacija mnogokotnika. Orientacija daljic je določena s smerjo premikanja, ko vrtimo mnogokotnik. Tej orientaciji daljic rečemo *inducirana orientacija*.



Slika 4. Obe orientaciji šestkotnika. Orientacija levega je dana z normalo "iz lista" oziroma pozitivno smerjo vrtenja (označeno s sredinsko puščico), orientacija desnega pa z normalo "v list" oziroma negativno smerjo vrtenja. Označeni sta inducirani orientaciji na daljicah.

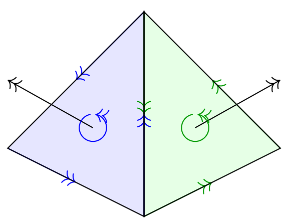
Orientacijo poliedra, topološke (zaprte) krogle B^3, katere rob je sestavljen iz (pravilnih) mnogokotnikov, definiramo s pomočjo orientacije njegovih mejnih ploskev. Lahko ga orientiramo *z zunanjo normalo*. To pomeni, da je vsako njegovo lice orientirano z normalo, ki kaže izven poliedra. Tej nasprotna orientacija je orientacija *z notranjo normalo*.

Z orientacijo poliedra je naravno inducirana tudi orientacija vsakega mnogokotnika na robu.

Ko lepimo orientabilne mnogoterosti po njihovih robovih, lahko poskrbimo, da je zlepek dveh orientabilnih mnogoterosti orientabilen. Ker bomo ploskve sestavljali le iz mnogokotnikov, bomo tudi tu privzeli, da po robovih lepimo mnogokotnike.

Definicija 6. Naj bosta P_1 in P_2 orientirana mnogokotnika ter $E_1 \subset P_1$ in $E_2 \subset P_2$ njuni stranici, opremljeni z inducirano orientacijo. Naj bo $h : E_1 \to E_2$ homeomorfizem, ki ohranja razmerja. Inducirana orientacija na E_1 določa orientacijo na sliki $h(E_1) = E_2$. Če je ta nasprotna podedovani orientaciji na E_2, rečemo, da homeomorfizem h *obrača* orientacijo. Lepljenju vzdolž homeomorfizma, ki obrača orientacijo, rečemo *orientabilno* lepljenje.

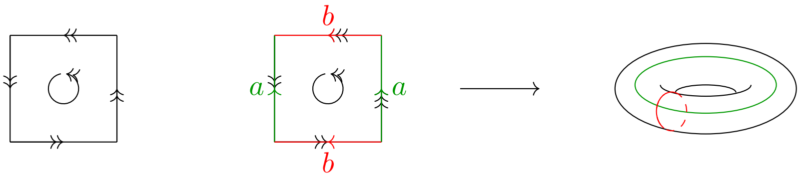
Z orientabilnim lepljenjem dobimo naravno orientacijo dobljenega zlepka. Z lepljenjem mnogokotnikov dobimo poliedrsko ploskev (izrek 3). Orientacija take ploskve je dana s skladno izbiro orientacij lepljenih mnogokotnikov, zahtevamo torej, da sta na zlepljenih robovih inducirani orientaciji mnogokotnikov nasprotni. Iz orientabilnih mnogoterosti z orientabilnimi lepljenji tako vedno dobimo orientabilno mnogoterost.



Slika 5. Orientaciji na skupni stranici sta nasprotni.

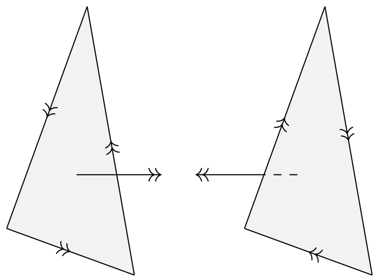
Obstajajo tudi neorientabilne (poliedrske) ploskve. Primer so projektivne ravnine in Möbiusov trak, ki ga dobimo iz kvadrata z lepljenjem dveh nasprotnih stranic vzdolž homeomorfizma, ki orientacijo ohranja (je ne obrača).

Pri primeru 2, kjer naredimo dve lepljenji stranic kvadrata v torus, obe lepljenji obračata orientacijo. To sedaj lahko hitro preverimo. Določimo orientacijo kvadrata in preverimo, ali sta inducirani orientaciji na njegovih identificiranih robovih res nasprotni.



Slika 6. Dve orientabilni lepljenji kvadrata v torus.

Polieder orientiramo z zunanjo normalo. To inducira orientacijo na njegovih licih, ki sestavljajo (poliedrsko) ploskev. Ko *orientabilno* lepimo skladna lica, kot pri lepljenju ploskev po robu tudi pri poliedru zahtevamo, da sta orientaciji na licih nasprotni. Orientacijo lica lahko opišemo tudi s



Slika 7. Orientabilno lepljenje trikotnikov.

pomočjo orientacij njegovih stranic. Orientabilno lepljenje mnogokotnikov lahko zato definiramo z zahtevo, da vse zožitve lepilnega homeomorfizma na stranice obračajo orientacijo stranic.

3. Od mnogokotnikov do sklenjenih ploskev

V tem razdelku bomo pokazali, da z evklidskimi okolicami točk ni problemov. V parih bomo identificirali vse robove mnogokotnika (ki je mnogoterost s podedovano topologijo ravnine) in dobili sklenjeno ploskev, torej mnogoterost. Za vsako lepljenje bomo dobljeno ploskev tudi določili, s tem pa si bomo pomagali pri dokazu, da v treh dimenzijah lahko zaidemo v težavo.

3.1 Do mnogoterosti

Definicija 7. Za naravno število $k \geq 2$ s P_k označimo pravilni $2k$-kotnik. Za $k = 1$ je P_1 disk, katerega rob je razdeljen na dva enaka dela.

Za poljuben k je P_k topološko pravzaprav disk, katerega rob je razdeljen na $2k$ delov. Za $k = 2$ tako dobimo kvadrat, za $k = 3$ pa šestkotnik.

Vemo, da sta po dve stranici mnogokotnika (različnih ali istega) homeomorfni, torej obstaja lepljenje mnogokotnika P_k vzdolž homeomorfizma stranic, ki ju identificira. To lahko ponovimo k-krat. Za homeomorfizem bomo izbrali kar takšnega, ki ohranja razmerja (kot v primeru 1). Identificirali bomo vsako stranico mnogokotnika in pri tem pazili na orientacijo.

Definicija 8 (α-lepljenje mnogokotnika). Naj bo P_k orientiran mnogokotnik, $\mathcal{E}$ množica njegovih stranic in $\{E_{i1}, E_{i2}\}_{i=1}^{k}$ razbitje množice $\mathcal{E}$. Naj bodo preslikave $h_i : E_{i1} \to E_{i2}$ homeomorfizmi, ki ohranjajo razmerja in obračajo (inducirano) orientacijo. Lepljenje mnogokotnika P_k vzdolž homeomorfizmov h_i imenujemo *α-lepljenje mnogokotnika P_k*, dobljeni zlepek pa *α-zlepek*.

Z α-lepljenjem iz mnogokotnika dobimo sklenjeno kompaktno ploskev. Seveda zlepek povezane mnogoterosti ne more biti nepovezan. Podrobnejši dokaz je v [1]. Torej z lepljenjem enega mnogokotnika dobimo povezan prostor. Utemeljiti moramo le še, da je zlepek 2-mnogoterost, oziroma po izreku 2 iščemo evklidske okolice točk.

Pri α-lepljenju gre za lepljenje vseh stranic enega mnogokotnika (analogno bo pri oktaedru), vseeno pa si naslednji izrek oglejmo v večji splošnosti, ker bomo srečali tudi lepljenja različnih mnogokotnikov.

Izrek 3. *Naj bo $\{P_{k_1}, P_{k_2}, \ldots, P_{k_n}\}$ disjunktna družina mnogokotnikov v ravnini in K njihova (disjunktna) unija. Unijo K opremimo z ekvivalenčno relacijo ($\sim$), ki z lepljenji po α-homeomorfizmih identificira nekatere pare stranic mnogokotnikov. Potem je prostor $K/_\sim$ končna unija kompaktnih ploskev.*

Dokaz. Mnogokotnike vložimo v ravnino tako, da so vse stranice vseh mnogokotnikov enako dolge. Homeomorfizmi h_i med pari stranic določajo ekvivalenčno relacijo, kvocientno preslikavo, ki vsako točko preslika v njen ekvivalenčni razred, pa spet označimo s q. Z X označimo zlepek.

Ker so mnogokotniki kompaktni (zaprti in omejeni), je kot zvezna slika kompaktnega prostora tudi zlepek X kompakten.

Preverimo, da je prostor X 2-mnogoterost (unija ploskev). Izrek 2 nam zagotovi, da je zlepek X 2-števen in Hausdorffov, ker 2-številne Hausdorffove prostore lepimo po zaprtih množicah. Poiskati moramo še evklidsko okolico vsake točke v zlepku. Točke so treh vrst:

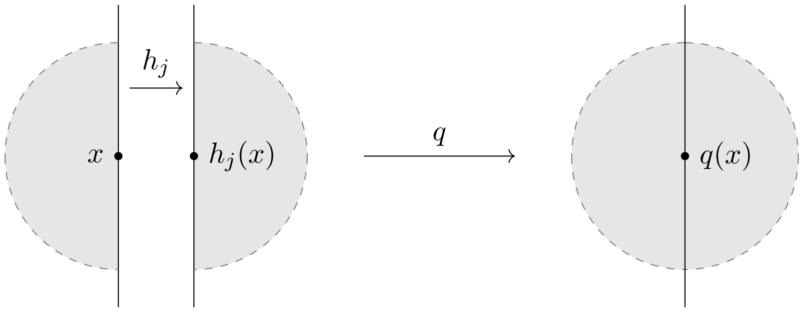
1. slike točk iz notranjosti mnogokotnikov,
2. slike točk iz notranjosti robov mnogokotnikov (kot 1-mnogoterosti),
3. slike oglišč mnogokotnikov.

Evklidske okolice bodo sestavljene iz evklidskih okolic v mnogokotnikih.

(1) Naj bo točka $x \in \operatorname{int} P_{k_i}$ neka notranja točka nekega mnogokotnika. Potem obstaja neka evklidska okolica $U_x = B(x, \varepsilon)$ točke x, ki ne seka njegovega robu. Ker v notranjosti mnogokotnika preslikava q ne naredi nobenih identifikacij, je po opombi 2 njena zožitev $q|_{U_x}$ na okolico U_x homeomorfizem in $q(U_x)$ evklidska okolica točke $q(x)$, homeomorfna $\mathbb{R}^2$. Te točke so notranje točke zlepka X.

(2) Slike točk iz notranjosti robov so v začetnem prostoru robne točke, zato imajo poljubno majhne okolice, homeomorfne $\mathbb{R}^2_+$. Delijo se v dve skupini. Prva skupina je skupina točk z robu mnogokotnika, ki nimajo svojega para oziroma niso "vsebovane" v nobenem lepilnem α-homeomorfizmu. Podobno kot v primeru (1) je zožitev kvocientne projekcije q na majhno evklidsko okolico homeomorfizem, zato slika takšne okolice predstavlja evklidsko okolico točke v zlepku, homeomorfno $\mathbb{R}^2_+$. Te točke so v zlepku robne točke.

Druga skupina točk iz notranjosti robov mnogokotnikov so točke iz notranjosti zlepljenih robov (slika 8). Praslika točke, v katero se slika takšna točka, je sestavljena iz dveh delov. Naj bo x točka iz notranjosti robu nekega mnogokotnika P_{k_i}. Potem obstaja neki α-homeomorfizem h_j, da točka x leži v njegovi domeni ali sliki. Brez škode za splošnost predpostavimo, da leži v domeni. Prasliko točke $q(x)$ torej predstavljata točki x in $h_j(x)$. Točko x smo vzeli iz notranjosti robu, zato obstaja neka evklidska okolica $U = \mathring{B}(x, \varepsilon) \cap P_{k_i}$, homeomorfna $\mathbb{R}^2_+$, ki ne seka nobenega oglišča mnogokotnika. Ker α-homeomorfizmi ohranjajo razmerja, tudi evklidska okolica točke $h_j(x)$, polkrogla $V = \mathring{B}(h_j(x), \varepsilon) \cap P_{k_l}$, ne seka nobenega oglišča mnogokotnika. Še več, tisti točki na

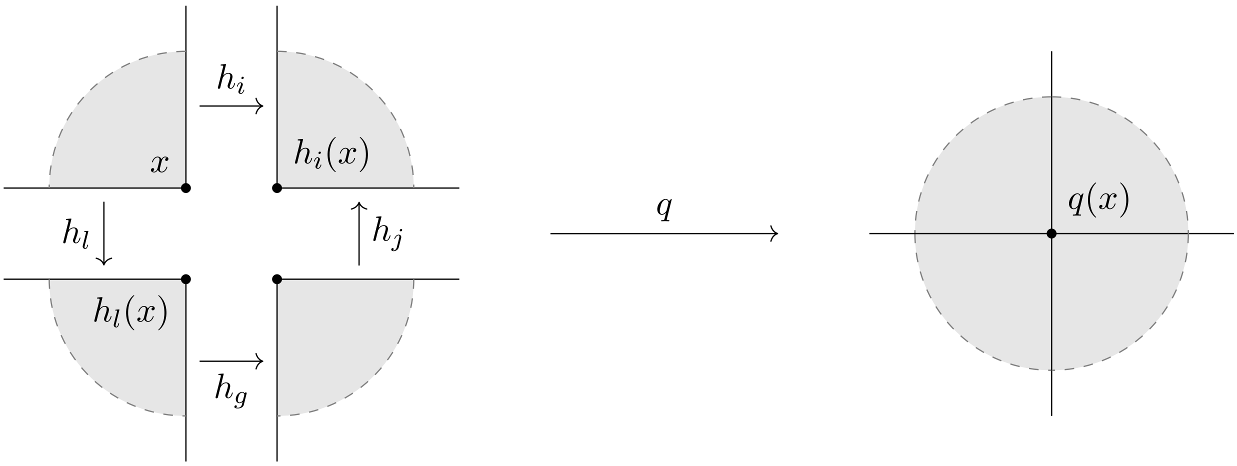


Slika 8. Zlepek evklidskih okolic (polkrogel) točk iz notranjosti zlepljenih robov v kroglo.

robu mnogokotnika P_{k_i}, ki sta od točke x oddaljeni za ε, se zlepita s tistima točkama na robu mnogokotnika P_{k_l}, ki sta za ε oddaljeni od točke $h_j(x)$. Evklidski polkrogli U in V se zato s kvocientno projekcijo q zlepita v kroglo s središčem v točki $q(x)$, ta krogla pa je iskana evklidska okolica točke $q(x)$, homeomorfna $\mathbb{R}^2$. Te točke so notranje točke zlepka.

(3) Oglišča mnogokotnikov se lepijo z nekimi drugimi oglišči. Podobno kot v primeru (2) poiščemo dovolj majhne odseke krogel (okolice oglišč, homeomorfne $\mathbb{R}^2_+$, ker so oglišča del robu mnogokotnika). Naj bo x oglišče nekega mnogokotnika. Spet imamo za okolico njegove slike v zlepku dve možnosti.

Če za vsako oglišče y, ki se zlepi z ogliščem x, velja, da sta oba robova, na katerih leži oglišče y, vsebovana v nekem lepilnem homeomorfizmu, bo slika oglišča x predstavljala notranjo točko zlepka (slika 9). Okolice se lepijo podobno kot pri (2).

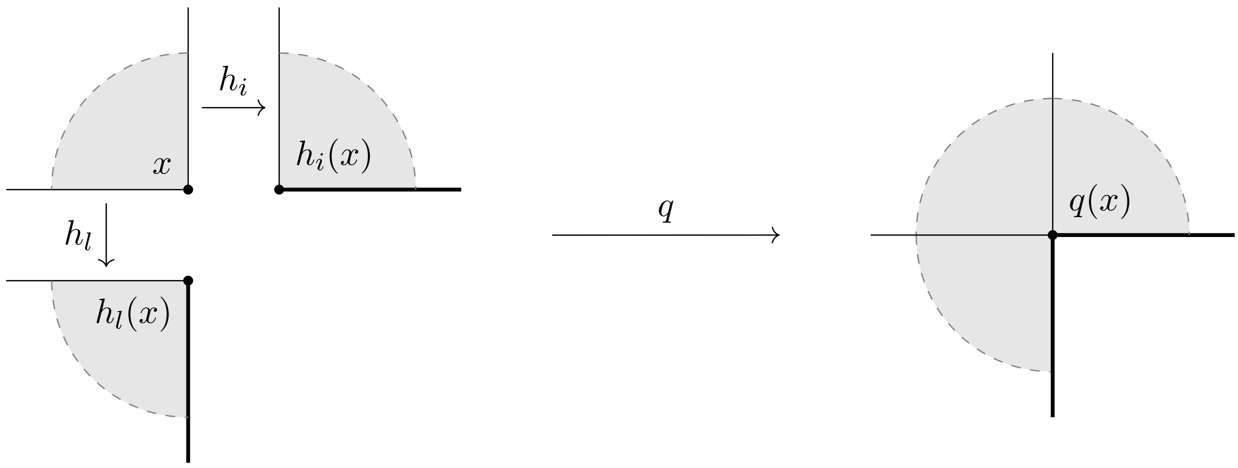


Slika 9. Primer lepljenja evklidskih okolic različnih oglišč, ki se zlepijo v eno točko, v evklidsko okolico, homeomorfno $\mathbb{R}^2$. Iz definicije α-zlepka takoj sledi, da velja $h_j^{-1}(h_i(x)) = h_g(h_l(x))$ za izbrano oglišče x.

Če obstaja oglišče, ki leži na neidentificiranem robu in se s kvocientno projekcijo slika v ekvivalenčni razred $[x]$, bo ta točka robna točka zlepka, rob v okolici, homeomorfni $\mathbb{R}^2_+$, pa bosta predstavljala nezlepljena robova mnogokotnikov, ki se "držita" slike točke x v zlepku (slika 10).

Res dobimo unijo kompaktnih ploskev. Da je unija končna, je očitno, ker lahko z zvezno preslikavo iz n mnogokotnikov dobimo največ n ploskev.

Iz zgornjega dokaza lahko vidimo, da rob zlepka predstavljajo natanko točke z robov, ki niso zajeti v domeni/sliki nobenega lepilnega homeomorfizma. Ti robovi se zlepijo v neke sklenjene krivulje. Rob poliedrskih ploskev je tako unija sklenjenih krivulj. Podobno bo veljalo v treh dimenzijah, pri prisekanem oktaedru, le da bodo tam rob tridimenzionalne mnogoterosti določale sklenjene ploskve,



Slika 10. Primer lepljenja evklidskih okolic različnih oglišč, ki se zlepijo v eno točko, v evklidsko okolico, homeomorfno $\mathbb{R}^2_+$.

torej 2-mnogoterosti.

3.2 Določanje ploskve

Naj bo P (povezana) ploskev, dobljena z lepljenji mnogokotnikov kot v izreku 3, pri čemer se je z nekim drugim robom identificiral prav vsak rob. Tako je P sklenjena kompaktna ploskev.

Takih ploskev je malo. Najlepši primer je seveda sfera, označimo jo s S. Prej smo videli tudi *torus* $T = S^1 \times S^1$, pri mnogokotnikih z več robovi pa lahko nastanejo tudi torusi z "več luknjami". V splošnem n-toruse, nT, definiramo s pomočjo povezane vsote n torusov T ali rekurzivne formule $nT = (n-1)T \# T$, kjer $\#$ označuje povezano vsoto.

Ideja povezane vsote je, da iz vsakega izmed torusov $(n-1)T$ in T izrežemo majhen topološki disk (D_1 in D_2). Dobljeni ploskvi nista več sklenjeni, njuna robova pa predstavljata topološki krožnici S_1 in S_2 (ki sta hkrati robova izrezanih diskov). Ti dve krožnici sta seveda homeomorfni, torej obstaja homeomorfizem $h : S_1 \to S_2$, vzdolž katerega lahko "prirezana" torusa zlepimo. Zlepek

$$nT := (n-1)T \# T := ((n-1)T \setminus \operatorname{int} D_1) \ \cup_h \ (T \setminus \operatorname{int} D_2)$$

je torus z n luknjami.

Toruse dobimo z orientabilnimi lepljenji. Če upoštevamo še neorientabilna, lahko dobimo *projektivne ravnine*, ki jih označimo z nP (tu n spet predstavlja število "povezanih sumandov"). Orientabilnost loči toruse od projektivnih ravnin. Naslednji izrek iz Uvoda v geometrijsko topologijo pa pove, da je to vse.

Izrek 4 (klasifikacijski izrek za ploskve). *Vsaka sklenjena kompaktna ploskev je homeomorfna eni izmed ploskev S, nT ali nP, kjer je n neko naravno število.*

Z orientabilnim lepljenjem dobimo orientabilno ploskev, torej neki torus. Pri določanju njegovega rodu nam bo pomagala Eulerjeva karakteristika, ki jo lahko definiramo za poljubne ploskve, mi pa bomo predpostavili, da je ploskev nastala z α-lepljenjem mnogokotnikov.

Definicija 9 (Eulerjeva karakteristika). Naj bo $\{P_{k_1}, P_{k_2}, \ldots, P_{k_m}\}$ disjunktna družina mnogokotnikov, katerih vse stranice v parih zlepimo po homeomorfizmih, ki ohranjajo razmerja. Predpostavimo, da je nastali zlepek, označimo ga z X, povezan. Z v označimo moč slike oglišč mnogokotnikov.

Eulerjeva karakteristika ploskve X je celo število

$$\chi(X) = m - \sum_{i=1}^{m} k_i + v.$$

Če je ploskev X orientabilna, njen *rod* izračunamo po formuli

$$n(X) = 1 - \frac{\chi(X)}{2}.$$

V definiciji Eulerjeve karakteristike člen $\sum_{i=1}^{m} k_i$ predstavlja število slik robov mnogokotnikov v zlepku. Res je vseh robov mnogokotnikov $\sum_{i=1}^{m} 2k_i$, ker pa se v zlepku po dva robova identificirata, je treba to vsoto še deliti z 2. Eulerjevo karakteristiko lahko definiramo tudi za nepovezane ploskve (definicija bi bila ista), a več vemo o 2-mnogoterosti, če poznamo vsako njeno povezano komponento posebej. Iz Eulerjeve karakteristike lahko takoj izračunamo rod ploskve, pri nepovezanih pa je treba paziti še na število komponent.

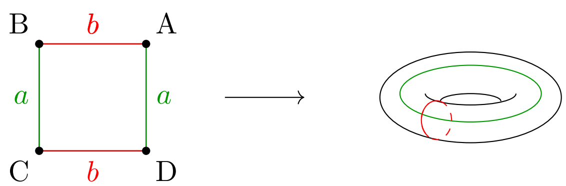
Orientabilne kompaktne ploskve so natanko torusi nT iz diskusije pred izrekom 4. Rod torusa si predstavljamo kot število lukenj oziroma število torusov T, ki jih zlepimo s povezanimi vsotami.

Torusa istega rodu (torej z istima Eulerjevima karakteristikama) sta seveda homeomorfna. Če ob klasifikacijskem izreku (izrek 4) upoštevamo še, da je Eulerjeva karakteristika res karakteristika ploskve, torej da imata homeomorfni ploskvi isto Eulerjevo karakteristiko ([4], razdelek 15), dobimo naslednji izrek.

Izrek 5. *Orientabilni sklenjeni kompaktni ploskvi (torusa) sta homeomorfni natanko tedaj, ko imata isto Eulerjevo karakteristiko.*

Določanje α-zlepka mnogokotnika je tako preprosto – določiti je potrebno le njegovo Eulerjevo karakteristiko. Vrnimo se k primeru lepljenja kvadrata v torus.

Primer 3. Lepljenje kvadrata definiramo z dvema homeomorfizmoma med po dvema nasprotnima stranicama, ki obračata orientacijo.



Slika 11. Lepljenje kvadrata z označenimi oglišči v torus.

Preverimo, da nam Eulerjeva karakteristika res razkrije pravilni rod ploskve. Ta je pri enojnem torusu enak 1 ($n = 1$). Preden izračunamo Eulerjevo karakteristiko, moramo ugotoviti, v koliko ekvivalenčnih razredov (oziroma točk) se zlepijo oglišča. Iščemo torej v. Zeleno lepljenje (a) zlepi oglišči A in B ter oglišči C in D. Rdeče lepljenje (b) nato identificira še ti dve dobljeni točki in tako se vsa oglišča zlepijo v eno točko, torej je $v = 1$. Ker imamo le en mnogokotnik ($m = 1$) in je ta kvadrat ($k_1 = 2$), je Eulerjeva karakteristika dobljenega zlepka enaka

$$\chi(X) = 1 - 2 + 1 = 0.$$

Rod ploskve je zato res

$$n(X) = 1 - \frac{0}{2} = 1$$

in dobimo torus z eno luknjo.

Zgornjo konstrukcijo lahko posplošimo na poljubne toruse.

Primer 4. Na mnogokotniku P_{2n} definiramo α-lepljenje, pri katerem se zlepita po dve nasprotni stranici. Kot v prejšnjem primeru preverimo, da se vsa oglišča zlepijo v eno točko ($v = 1$). Eulerjeva karakteristika dobljene ploskve X je zato

$$\chi(X) = 1 - 2n + 1 = 2 - 2n = 2(1 - n) \leq 2$$

in rod

$$n(X) = n.$$

Zgornja lepljenja predstavljajo družino lepljenj "diska" v toruse s poljubnim rodom.

Iz tega primera in klasifikacijskega izreka 4 vidimo, da je Eulerjeva karakteristika orientabilne sklenjene ploskve res vedno sodo število, manjše ali enako 2.

S preštevanjem robov in ocenami Eulerjeve karakteristike ter konstrukcijo ustreznih ploskev lahko določimo natančno število različnih ploskev, ki jih lahko dobimo z α-lepljenjem $2k$-kotnika. Formula je preprosta:

$$\text{število nehomeomorfnih ploskev } = 1 + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor.$$

Te ploskve so natanko torusi različnih rodov; od 0 (sfera) do $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$. Natančen postopek je v [2].

k	1	2	3	4	5	6
število lepljenj	1	3	15	105	945	10395
število nehomeomorfnih ploskev	1	2	2	3	3	4

Različnih ploskev, ki jih lahko dobimo z α-lepljenji, je bistveno manj kot vseh možnih α-lepljenj mnogokotnika. Za primerjavo so v zgornji tabeli zbrani podatki za $k \leq 6$.

4. Problem v treh dimenzijah

Podobno kot pri mnogokotnikih lahko lepimo lica oktaedra, označimo ga z $\mathcal{O}$. Ker v tem primeru začnemo s 3-mnogoterostjo, bi pričakovali, da bo nastali zlepek spet 3-mnogoterost. V tem razdelku bomo pokazali, da to ni nujno res.

Pri mnogokotnikih smo v parih lepili robove, zaprte 1-mnogoterosti, pri oktaedru pa bomo lepili njegova trikotna lica oziroma mejne ploskve, torej 2-mnogoterosti.

Definicija 10 (α-zlepek oktaedra). Naj bo $\mathcal{O}$ orientiran oktaeder, označimo s $\mathcal{F}$ množico njegovih lic in naj bo $\{F_{i1}, F_{i2}\}_{i=1}^{4}$ razbitje množice $\mathcal{F}$. Naj bodo $h_i : F_{i1} \to F_{i2}$ homeomorfizmi, ki ohranjajo razmerja in obračajo (inducirano) orientacijo. Lepljenje oktaedra $\mathcal{O}$ vzdolž homeomorfizmov h_i imenujemo *α-lepljenje oktaedra* $\mathcal{O}$, dobljeni kvocientni prostor pa *α-zlepek*.

Opomba 4. Opozorimo, da je α-lepljenj oktaedra veliko. Imamo kar nekaj možnosti, da izberemo pare lic, vsak par pa lahko zlepimo na 3 načine (z izbiro slike enega oglišča trikotnika). Tako je takšnih lepljenj $7!!3^4 = 8505$.

Kvocientna preslikava nekega α-lepljenja je v notranjosti oktaedra homeomorfizem, torej se evklidske okolice prenesejo na zlepek. V notranjosti lic in na robovih se primer iskanja evklidskih okolic prevede na primer v dveh dimenzijah iz izreka 3, ker lahko namesto krogel iščemo diske, pomnožene z majhnim intervalom, kar je tudi homeomorfno $\mathbb{R}^3$ ali $\mathbb{R}^3_+$.

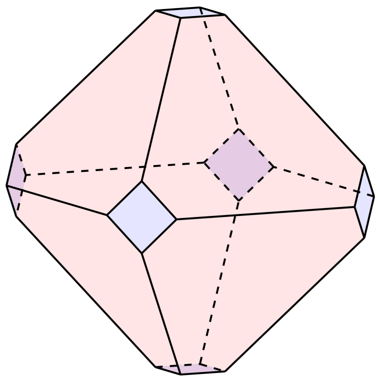
Problem nastopi pri lepljenju okolic oglišč. Oglišča se zlepijo z oglišči, a kaj se dogaja z evklidskimi okolicami? Da to lažje razumemo, prisekamo oktaeder. S tem lahko posebej opazujemo zožitev lepljenja na prisekani oktaeder in zožitev na odsekane piramide. Po prejšnjem komentarju je zlepek prisekanega oktaedra res 3-mnogoterost, natančnejši dokaz pa je v [2].

Definicija 11 (prisekani oktaeder in njegovo α-lepljenje). Naj bo $\mathcal{O}$ pravilen oktaeder v $\mathbb{R}^3$ z dolžino robu a in množico oglišč $\mathcal{V}(\mathcal{O})$. *Prisekani oktaeder* $\mathcal{O}'$ definiramo kot množico točk

$$\mathcal{O}' = \overline{\mathcal{O} \setminus \bigcup_{v \in \mathcal{V}(\mathcal{O})} A(v, \varepsilon)},$$

kjer je $\varepsilon < \frac{a}{4}$ in $A(v, \varepsilon)$ piramida z vrhom v, višino ε in stranskimi robovi, ki ležijo na robovih oktaedra $\mathcal{O}$.

Homeomorfizmi med po dvema šestkotnima licema prisekanega oktaedra $\mathcal{O}'$ so zožitve homeomorfizmov oktaedra $\mathcal{O}$, *α-zlepek* prisekanega oktaedra je definiran analogno α-zlepku oktaedra $\mathcal{O}$.



Slika 12. Prisekan oktaeder, ki ga dobimo z odsekom piramid ob ogliščih.

Seveda so zožitve homeomorfizmov, ki ohranjajo razmerja, med trikotniki oktaedra na šestkotnike prisekanega oktaedra res homeomorfizmi, ker smo okrog vseh oglišč odsekali enako velike piramide. Višina piramid ni zares pomembna, saj so prisekani oktaedri med seboj homeomorfni.

Lica prisekanega oktaedra predstavljajo šestkotna (na sliki rdeča) lica, ki so nastala iz trikotnikov, ter nova kvadratna lica.

Imamo še en analog z lepljenjem mnogokotnikov v dveh dimenzijah. Po izreku 3 smo omenili, da rob ploskve predstavljajo točno robovi mnogokotnikov, ki ne nastopajo v nobenem lepilnem homeomorfizmu. Zato smo z lepljenjem v parih dobili sklenjeno ploskev. Če bi bil zlepek oktaedra 3-mnogoterost, bi zaradi lepljenja vsakega lica dobili sklenjeno 3-mnogoterost. Pri prisekanem oktaedru pa imamo še štirikotna lica, ki ne nastopajo v homeomorfizmih. To pomeni, da bodo rob dobljene 3-mnogoterosti iz prisekanega oktaedra sestavljale ravno slike (s kvocientno projekcijo) štirikotnih lic.

Kako pa se lahko zlepijo štirikotna lica? Štirikotna lica so mnogokotniki, katerih vsak rob nastopa v enem lepilnem homeomorfizmu šestkotnih lic. Torej je to unija ploskev, katerih robove v parih zlepimo. Dobimo natanko lepljenja iz izreka 3, torej unijo kompaktnih sklenjenih ploskev.

Če upoštevamo še orientabilnost, dobimo natanko toruse. Res, kvadrati in šestkotniki (lica prisekanega oktaedra) podedujejo orientacijo od orientacije oktaedra. Od njih orientacijo podedujejo tudi robovi prisekanega oktaedra. Zahtevamo, da sta orientaciji zlepljenih šestkotnih lic nasprotni. Torej sta po definiciji orientacije mnogokotnika nasprotni tudi orientaciji njunih zlepljenih robov. Zares nas zanimajo le robovi, ki mejijo tudi na kvadratna lica. Še vedno velja, da sta orientaciji teh zlepljenih robov nasprotni. Torej se po definiciji lepljenja, ki obrača orientacijo, tudi kvadrati zlepijo v orientabilne ploskve. Rob poljubnega α-zlepka prisekanega oktaedra $\mathcal{O}'$ je zato sestavljen iz orientabilnih ploskev, torej torusov.

Osredotočimo se na odsekane piramide in opazujmo njihove kvocientne slike. Če bi bil zlepek prvotnega oktaedra 3-mnogoterost, torej če bi imele tudi slike oglišč evklidske okolice, bi se tudi piramide zlepile v mnogoterost. Njen rob bi spet predstavljala neidentificirana lica piramid, kar pa so ravno njihove osnovne ploskve oziroma štirikotna lica prisekanega oktaedra. Tako bi dobili isti rob kot pri prisekanem oktaedru, torej neko unijo torusov.

Da utemeljimo, da oglišča v zlepku res nimajo vedno evklidske okolice, bomo razumeli piramide kot stožce nad kvadrati (osnovnimi ploskvami), zlepljene piramide pa bodo zato stožci nad ploskvami, dobljenimi iz kvadratov.

Definicija 12 (stožec). *Stožec* nad topološkim prostorom X je topološki prostor

$$CX = (X \times I)\,/_{\sim},$$

kjer je $I = [0,1]$ in ekvivalenčna relacija $\sim$ identificira vse točke oblike $(x, 1)$ za $x \in X$.

Stožec nad zaprtim intervalom je tako trikotnik (seveda homeomorfen disku), stožec nad krožnico pa običajen geometrijski stožec (ki je prav tako homeomorfen disku).

Piramide so res homeomorfne stožcem nad kvadrati. Homeomorfizem med stožcem $CP_2 = \left([-1,1]^2 \times I\right)/_{\sim}$ in enakorobo štiristrano pokončno piramido P_ε z višino ε je dan s predpisom

$$\begin{aligned} &h : CP_2 \to P_\varepsilon \\ &[(x,y,t)] \mapsto \left(x\frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2}(1-t),\; y\frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2}(1-t),\; \varepsilon t \right). \end{aligned}$$

Preslikava h je res dobro definirana (konstantna na netrivialnem ekvivalenčnem razredu), zvezna, bijektivna in zaprta. Piramide zato lahko razumemo kot stožce.

Ker tudi trikotnike piramid lepimo vzdolž homeomorfizmov, ki ohranjajo razmerja, se pri vsakem $t \in [0,1]$ kvadrati $P_2 \times \{t\}$ stožca CP_2 zlepijo v isto (homeomorfno) ploskev kot kvadrati prisekanega oktaedra $(P_2 \times \{0\})$. Oglišča (vrhovi piramid) se identificirajo z oglišči in njihove okolice v zlepku so stožci nad dobljeno ploskvijo.

Če je ta ploskev torus pozitivnega rodu, vrh stožca nima evklidske okolice. Preden to dejstvo zapišemo kot izrek, dokažimo lemo, ki nam bo v pomoč pri njegovem dokazu.

Lema 6. *Naj bo U evklidska okolica točke v, homeomorfna $\mathbb{R}^3$ ali $\mathbb{R}^3_+$, in $S \subseteq U \setminus \{v\}$ topološka krožnica. Potem je inkluzija $i : S \to U \setminus \{v\}$ homotopna neki konstantni preslikavi v okolici $U \setminus \{v\}$.*

Dokaz. Naj bo U evklidska okolica točke v in $S \subseteq U \setminus \{v\}$ topološka krožnica. Če je v notranja točka množice U, brez škode za splošnost predpostavimo, da je U homeomorfna $\mathbb{R}^3$. Ločimo primera glede na okolico U.

(1) Naj bo U homeomorfna $\mathbb{R}^3_+$ in $h : U \to \mathbb{R}^3_+$ homeomorfizem. Slika $h(S)$ krožnice S ne seka točke $h(v)$. Definiramo točko $b := (0,0,1)$. Ker je točka v robna točka, je $h(v)$ robna v $\mathbb{R}^3_+$, zato je homotopija $H_0 : h(S) \times I \to \mathbb{R}^3_+ \setminus \{h(v)\}$, dana s predpisom

$$H_0 : (x,t) \mapsto (1-t)x + tb,$$

dobro definirana. Iskana homotopija H v množici U je tako $H : S \times I \to U \setminus \{v\}$, dana s predpisom

$$H : (x,t) \mapsto h^{-1} H_0\left(h(x), t\right).$$

(2) Naj bo U homeomorfna $\mathbb{R}^3$ in $h: U \to \mathbb{R}^3$ homeomorfizem, da velja $h(v) = 0$ (to lahko dosežemo s translacijo). Definirali bomo novo bazo vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$ in sliko $h(S)$ krožnice S najprej projicirali na ravnino, pravokotno na tretji bazni vektor, in nato ravnino stisnili v točko. Da dobimo novo bazo prostora, bomo krožnico s pomočjo homotopije poligonizirali, zato bo iskana homotopija sestavljena iz treh delov.

Ker topološka krožnica $h(S)$ ne vsebuje točke 0, lahko krožnico $h(S)$ v prostoru $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ homotopno poligoniziramo do sklenjene poligonske krivulje S' – sestavimo preslikavo $f: h(S) \to S'$. Krožnica $h(S)$ je od točke 0 oddaljena za neki pozitivni d. Ker je $h(S)$ topološka krožnica, je homeomorfna enotski krožnici S^1. Vložitev S^1 v $h(S)$ označimo z g. Ker je g zvezna preslikava s kompaktnega prostora, je enakomerno zvezna. Torej obstaja tak $\delta > 0$, da se sliki $g(x)$ in $g(y)$ razlikujeta za manj kot $\frac{d}{2}$, če se točki x in y na krožnici S^1 razlikujeta za manj kot δ. Naj bo $\{a_i\}_{i=0}^N$ taka delitev krožnice S^1, da se vsaki zaporedni točki razlikujeta za manj kot δ in je $N \geq 2$. Definiramo še $x_i = g(a_i)$ in $f(x_i) = x_i$ za vsak $i \leq N$, vsako točko y med dvema zaporednima točkama x_i in x_{i+1} (po modulu N) pa s f slikamo v pravokotno projekcijo točke y na premico skozi točki x_i in x_{i+1}. Homotopija $H_1 : h(S) \times I \to \mathbb{R}^3$,

$$H_1 : (x,t) \mapsto (1-t)x + tf(x),$$

predstavlja prvi del iskane homotopije. Da res slika v $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, sledi iz konstrukcije preslikave f, ker smo med točkami x_i vzeli dovolj majhno razdaljo.

Dobljena poligonska krivulja S' je sestavljena iz končno mnogo daljic, zato so premice $\operatorname{Lin}\{x\}$ skozi x in 0 za vsak $x \in S'$ vsebovane v končno mnogo ravninah, te pa ne napolnijo prostora, zato obstaja normiran vektor v_3, da premica $\operatorname{Lin}\{v_3\}$ ne seka krožnice S'. Vektor v_3 dopolnimo z vektorjema v_1 in v_2 do ortonormirane baze prostora $\mathbb{R}^3$ in vektorje (x, y, z) razumemo v bazi $\{v_1, v_2, v_3\}$. Drugi del homotopije je preslikava $H_2 : \mathbb{R}^3 \times I \to \mathbb{R}^3$, dana s predpisom

$$H_2 : (x,t) \mapsto (1-t)x + t \operatorname{pr}_{\mathbb{R}^2 \times \{1\}}(x),$$

kjer je $\operatorname{pr}_{\mathbb{R}^2 \times \{1\}}$ pravokotna projekcija. Preslikava $H_2|_{S' \times I}$ res slika v prostor $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ po definiciji vektorja v_3. Tretji del homotopije je preslikava $H_3 : (\mathbb{R}^2 \times \{1\}) \times I \to \mathbb{R}^3$, dana s predpisom

$$H_3 : (x,t) \mapsto (1-t)x + t(0,0,1).$$

Homotopija $H_0 : \mathbb{R}^3 \times I \to \mathbb{R}^3$ od krožnice do točke $(0,0,1)$ je tako sestavljena kot

$$H_0 : (x,t) \mapsto \begin{cases} H_1(x, 3t) & ; t \in [0, \frac{1}{3}] \\ H_2(H_1(x,1), 3t-1) & ; t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ H_3(H_2(H_1(x,1),1), 3t-2) & ; t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}.$$

Iskana homotopija H v množici U je spet $H : S \times I \to U \setminus \{v\}$, dana s predpisom

$$H : (x,t) \mapsto h^{-1} H_0 \left(h(x), t\right).$$

Dokažimo še, da so oglišča, katerih kvadrati se zlepijo v torus pozitivnega rodu, res nemnogoterostne točke zlepka.

Izrek 7. *Vrh stožca nad torusom pozitivnega rodu (CnT) nima evklidske okolice.*

Dokaz. Dokažimo izrek najprej za stožec CT nad torusom T. Dokazujemo s protislovjem. Naj bo v vrh stožca CT, torej ekvivalenčni razred točk $T \times \{1\} \subseteq T \times I$, in U njegova evklidska okolica. Potem velja $U \cong \mathbb{R}^3$ ali $U \cong \mathbb{R}^3_+$.

Odprta okolica U vsebuje torus $T \times \{a\}$ za neki $a \in [0,1)$. Res, predpostavimo, da to ne drži. Potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja točka $(a_n, 1-\frac{1}{n})$ na torusu $T \times \{1-\frac{1}{n}\}$, ki je vsebovana v komplementu $U^C = CT \setminus U$. Ker je torus kompakten, lahko najdemo konvergentno podzaporedje, ki konvergira proti neki točki $(b,1)$ oziroma proti vrhu v. Komplement U^C je zaprt, zato vsebuje limito v in je $v \in U \cap U^C$, kar pa ni res, ker je ta presek prazen.

Dokazali bomo, da lahko neki disk retraktiramo na njegov rob, kar je v nasprotju z Brouwerjevim izrekom o neobstoju retrakcije [4, stran 7, izrek B za $n = 2$].

Torus T je definiran kot $T = S^1 \times S^1$. Množica $CT \setminus \{v\} = T \times [0,1)$ je tako $CT \setminus \{v\} = S^1 \times S^1 \times [0,1)$. Definiramo krožnico

$$S := S^1 \times \{0\} \times \{a\}$$

v okolici U. Preslikava $r : U \setminus \{v\} \to S$, definirana s predpisom

$$r : (x,y,t) \mapsto (x,0,a),$$

je očitno dobro definirana retrakcija okolice U brez vrha na krožnico S.

Naj bo $D = CS^1 = (S^1 \times I)/_\sim$ topološki disk in $i : \partial D \to S$ homeomorfizem (torej vložitev roba diska, topološke krožnice, v izbrano krožnico S). Ker je krožnica S vsebovana v evklidski okolici U, nam lema 6 da homotopijo $H : S \times I \to U \setminus \{v\}$ med id_S in konstantno preslikavo $S \to \{b\}$, torej je H zvezna preslikava, za katero velja $H(y,0) = y$ in $H(y,1) = b$. Disk D slikamo v okolico U s preslikavo

$$\varphi : [(x,t)] \mapsto H(i(x),t),$$

ki je dobro definirana, ker je konstantna na edinem netrivialnem ekvivalenčnem razredu. Velja tudi $\varphi|_{S^1\times\{0\}} = i$.

Potem je preslikava $r_S := i^{-1} \circ r|_{\varphi(D)} \circ \varphi : D \to \partial D$ retrakcija diska D na njegov rob, krožnico S^1, kar je protislovje.

Za toruse nT z višjim rodom je dokaz podoben. Torus nT je definiran kot povezana vsota $T\#(n-1)T$, torej kot zlepek torusov T in $(n-1)T$, katerima odrežemo topološka diska D_1 in D_2 kot v diskusiji pred izrekom 4. Retrakcijo r v tem primeru prevedemo na retrakcijo enega torusa tako, da torus $(n-1)T$ retraktiramo na disk D_2 in ga s homeomorfizmom preslikamo v D_1, nato pa torus T retraktiramo z zgoraj definirano retrakcijo r na koordinatno krožnico $S = S^1 \times \{s\} \times \{a\}$, ki ne seka diska D_1.

Opozorimo, da nam pri kvadratih, ki se zlepijo v sfero, ne bi bilo treba odsekati oglišč. Stožec nad sfero je pravzaprav zaprta krogla $\overline{B^3}$, zato bi imela oglišča v zlepku evklidsko okolico – kar notranjost dobljene krogle.

Ko prisekamo oktaeder, da izločimo problematične točke, torej pri orientabilnem lepljenju parov šestkotnih lic prisekanega oktaedra dobimo mnogoterost z robom, sestavljenim iz nekaj torusov. Kvadrati se lahko zlepijo na različne načine in tako dobimo različne robove. Izkaže se, da pri vsakem lepljenju dobimo enega izmed trinajstih robov;

S	T	$T \cup T$	$2T$	$3T$
$S \cup S$	$T \cup S$	$T \cup T \cup S$	$2T \cup T$	
$S \cup S \cup S$	$T \cup S \cup S$			
$S \cup S \cup S \cup S$				
$S \cup S \cup S \cup S \cup S$				

Več o tem je v [2], kjer je za vsak rob zabeleženo tudi lepljenje oktaedra v mnogoterost z zelenim robom.

5. Zaključek

Pri lepljenju mnogokotnikov vzdolž homeomorfizmov na robu vedno dobimo sklenjeno ploskev, torej 2-mnogoterost. To ploskev lahko hitro določimo s pomočjo Eulerjeve karakteristike in orientabilnosti. Pri analognem lepljenju v treh dimenzijah, kjer za začetni topološki prostor vzamemo oktaeder in lepimo njegova trikotna lica, pa lahko dobimo zlepek, v katerem slike oglišč nimajo evklidskih okolic. Takšni zlepki tako niso mnogoterosti. Temu se lahko izognemo, če prisekamo oktaeder in lepimo njegova šestkotna lica, ki so nastala iz trikotnikov. V tem primeru vedno dobimo mnogoterost.

Zahvala

Zahvaljujem se svojemu mentorju pri diplomski nalogi, Sašu Strletu, za strokovno pomoč že takrat in še pri tem članku. Hvala tudi Mateju za pomoč pri slikah in Davidoma za pomoč pri prevodu povzetka.

LITERATURA

[1] P. Pavešić, *Splošna topologija*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **43**, 2. natis, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2017.

[2] K. Šipec, *Oktaedrske mnogoterosti: delo diplomskega seminarja*, 2021, dostopno na `https://repozitorij.uni-lj.si/IzpisGradiva.php?lang=slv&id=128910`.

[3] C. Petronio, *Combinatorial and geometric methods in topology*, With an appendix by Damian Heard and Ekaterina Pervova, Milan J. Math. **76** (2008), 69–92; dostopno tudi na `arxiv.org/pdf/0706.4368.pdf`

[4] S. Strle, *Izbrane teme iz geometrijske topologije*, februar 2016, [ogled 15. 3. 2021], dostopno na `ucilnica1819.fmf.uni-lj.si/pluginfile.php/34162/mod_resource/content/0/itgt.pdf`.