

# AHARONOV-CASHERJEV POJAV

LUKA ŠKOLČ

Fakulteta za matematiko in fiziko  
Univerza v Ljubljani

Ko nevtralni delec z magnetnim dipolom obkroži enakomerno nabito žico, ki je vzporedna njegovemu dipolnemu momentu, pridobi netrivialno topološko fazo. Opisani Aharonov-Casherjev pojav je bil odkrit leta 1984 in so ga potrdili v več eksperimentih z natančnostjo najmanj 4%. V prvem delu seminarja v celoti izpeljem izraz za Aharonov-Casherjevo fazo. V drugem delu seminarja predstavim dve eksperimentalni potrditvi pojava in uporabo v kvantnih merilnikih naboja.

## AHARONOV-CASHER EFFECT

When a neutral particle with a magnetic dipole moment encircles an electrostatically charged wire which is parallel to the particle's dipole moment, the particle's wave function acquires a non-trivial topological phase factor. The so-called Aharonov-Casher effect was predicted in 1984 and was later confirmed in different experiments with a precision of at least 4%. In the first part of the seminar, I guide the reader through the complete derivation of the Aharonov-Casher phase. In the second part, I present two experimental confirmations of the effect and its application in quantum metrology.

### 1. Uvod

V klasični mehaniki sta za gibanje nabitega delca ključni elektromagnetni polji  $E$  in  $B$ , ne pa potenciala  $\phi$  in  $A^1$ . Kjer polja ni, na delec ne bo delovala sila, tudi če potencial ni identično enak 0. Lahko na primer pošljemo delec v območje s konstantnim potencialom  $\phi = 5V$ , a ker je električno polje  $E = -\nabla\phi$  enako 0, se bo delec gibal premo enakomerno. V kvantni mehaniki je drugače. Že v 60-tih letih dvajsetega stoletja sta Y. Aharonov in D. Bohm pokazala [5], da lahko netrivialen brezvrtnični magnetni potencial povzroči interferenco med valovnimi paketi nabitih delcev, čeprav so paketi v prostoru brez magnetnega polja ( $B = \nabla \times A = 0$ ). Kasneje sta Y. Aharonov in A. Casher [1] odkrila podoben pojav za magnetne dipole, ki se gibljejo v električnem polju dolge nabite žice, in imajo magnetni moment vzporeden žici. Da električno polje sploh učinkuje na premikajoči se magnetni dipol, ni očitno - vzrok bomo spoznali v razdelku 3. Za specifične geometrije na klasične električno nevtralne delce z dipolnim momentom ne deluje sila, kvantne valovne funkcije pa vseeno pridobijo interferenčne člene.

Namen tega seminarja je celostno predstaviti Aharonov-Casherjev pojav. V prvem delu bom postopoma zgradil teoretični model pojava. Najprej bom izpeljal klasično Hamiltonovo funkcijo za nevtralen magnetni dipol v poljubnem električnem polju in jo prevedel v kvantno operatorsko sliko. Za specifično geometrijo ravne enakomerno nabite žice bom izpeljal silo na točkast magnetni dipol in izračunal kvantno fazo, ki bo nastopala v izrazu za interferenco. Drugi del seminarja bo namenjen opisu eksperimentalnih potrditev Aharonov-Casherjevega (AC) pojava. Predstavil bom eksperimenta, ki sta s popolnoma različnima pristopoma potrdila AC pojav. Preko eksperimentov se bo bralec seznanil z dvema metodama za merjenje kvantne interference, katerih uporabnost sega daleč preko AC pojava. Kljub manj natančnim rezultatom prvega eksperimenta sem zato v seminar vključil oba. Na koncu bom orisal pomen AC pojava v kvantnih merilnikih naboja.

Ker bom v seminarju delal veliko primerjav z bolj domačim Aharonov-Bohmovim (AB) pojavom, ga bom na kratko opisal v naslednjem razdelku, da bo bralec kasneje lažje sledil.

<sup>1</sup>Tekom celega seminarja bom uporabljal zvezi  $B = \nabla \times A$  in  $E = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t}$ .

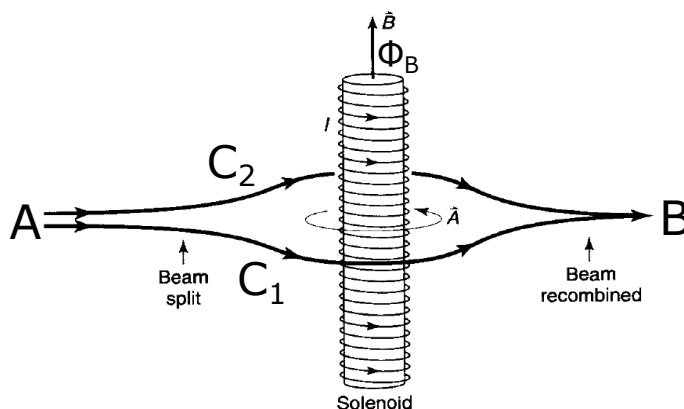
## 2. Aharonov-Bohmov pojav

Imejmo ravnino, ki jo prebada dolga tuljava, kot kaže slika 1. Magnetno polje je neničelno le v notranjosti tuljave in magnetni pretok je  $\Phi_B$ . Elektron se lahko giblje povsod po ravnini, edino v tuljavo ne more. Ker je magnetno polje zunaj tuljave enako 0, tudi sile na elektron ni. A če pošljemo en valovni paket po eni strani tuljave in drugega po drugi, kot kaže slika 1, ter ju nato rekombiniramo, bomo ugotovili, da interferirata z relativno fazo  $S_{AB} = \frac{e}{\hbar} \Phi_B$ , kjer je  $e$  naboj elektrona [5]. Dodatna faza je posledica netrivialnega vektorskega potenciala zunaj tuljave. Za poljubno zanko okoli tuljave mora veljati  $\int A \cdot dr = \Phi_B$  in ker v Hamiltonjanu za valovno funkcijo elektrona

$$H = \frac{(p - eA)^2}{2m} \quad (1)$$

nastopa  $A$ , dobimo interferenco. Bolj natančno bo pot do interference za Hamiltonjane tipa (1) razložena v razdelku 4.

Omenimo še, da je posledica Aharonov-Bohmovega pojava kvantizacija magnetnega pretoka skozi luknje v superprevodnikih. Če skozi luknjo v superprevodniku speljemo zunanje magnetno polje, bo okoli luknje spontano stekel takšen tok, da bo skupen magnetni pretok skozi luknjo enak celoštevilskemu večkratniku kvanta magnetnega pretoka  $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$  [9].



**Slika 1.** Aharonov-Bohmov pojav. Dva valovna paketa potujeta iz leve po različnih straneh dolge tuljave in interferirata po rekombinaciji na desni. Slika je povzeta po [6].

## 3. Hamiltonova funkcija magnetnega dipola v električnem polju

Cilj v tem razdelku je izpeljati Hamiltonovo funkcijo za električno nevtralen magnetni dipol, ki se giba v prostoru z električnim poljem. Vemo, da mirujoč magnetni dipol ne interagira z električnim poljem, torej bo interakcija izvirala iz gibanja. Najprej bom izpeljal klasični Hamiltonjan, ki ga bom nato prevedel v operatorski zapis. Ideja izpeljave je vzeta iz [1] in [2].

Pokažimo najprej, da gibajoč magnetni dipol ustvarja gostoto električnega naboja. Spomnimo se četverca električnega toka  $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$ , kjer je  $\rho$  gostota električnega naboja in  $\mathbf{j}$  gostota električnega toka. Ker je  $j^\mu$  vektor četverec, ga med inercialnimi sistemi transformiramo z uporabo Lorentzovih transformacij.

$$j^\mu = \gamma \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{j}', \mathbf{j}' \right) \quad \mu \xrightarrow{\mathbf{S}'} \mathbf{v} \rightarrow j'^\mu = (0, \mathbf{j}')$$

**Slika 2.** Četverca električnega toka v sistemih  $S$  in  $S'$  povežemo z Lorentzovo transformacijo, tako kot vse četverce.

V lastnem sistemu dipola  $S'$ , kjer dipol miruje, je četverec oblike  $j'^{\mu} = (0, j')$ , kjer  $j'$  zadošča Maxwellovi enačbi  $j' = \nabla \times M$ .  $M$  je magnetizacija, ki pripada točkastemu dipolu. Velja  $\int M d^3r = \boldsymbol{\mu}$ , kjer je  $\boldsymbol{\mu}$  magnetni dipolni moment delca. Sistema  $S$  in  $S'$  sta shematično prikazana na sliki 2.

Če se delec v laboratorijskem sistemu  $S$  giblje s hitrostjo  $v$ , se s to hitrostjo glede na  $S$  giblje tudi sistem  $S'$ . Da bi dobili četverec električnega toka v laboratorijskem sistemu, uporabimo na  $j'^{\mu}$  obratno Lorentzovo transformacijo [1]. Če ima hitrost  $v = (v_x, 0, 0)$  le komponento  $x$ , dobimo za prvo komponento četverca v laboratorijskem sistemu  $j^0 = c\rho = \gamma \frac{v_x}{c} j'_x$ . Za splošno smer hitrosti imamo <sup>2</sup>

$$j^{\mu} = \gamma \left( \frac{v}{c} \cdot j', j' \right). \quad (2)$$

Vidimo, da se zaradi gibanja delca spremeni električni tok in pojavi neničelna gostota električnega naboja. Zaradi ohranitve naboja mora biti integral  $\int \rho dV$  v vseh inercialnih sistemih enak 0. Če je hitrost delca majhna v primerjavi s hitrostjo svetlobe  $c$ , se izraz (2) do prvega reda v  $\frac{v}{c}$  poenostavi v  $j^{\mu} = \left( \frac{v}{c} \cdot j', j' \right)$  in je gostota električnega naboja v laboratorijskem sistemu enaka

$$\rho = \frac{v}{c^2} \cdot j', \quad (3)$$

poleg tega pa se gostota toka in z njo magnetni moment ob prehodu med sistemi ne spremenita [1].

Lagrangeeva funkcija za klasičen delec  $L = T - V$  v sistemu  $S$  je razlika kinetičnega člena  $T = \frac{1}{2}mv^2$  in potencialnega člena  $V$ , ki je kar energija električnega naboja v električnem polju  $E = -\nabla\phi$ . Velja

$$V = \int \phi(r)\rho(r)d^3r = \int \phi(r)\frac{v}{c^2} \cdot j' d^3r = \frac{1}{c^2} \int \phi(r) v \cdot (\nabla \times M) d^3r \quad (4)$$

Za preoblikovanje izraza  $\phi(r) v \cdot (\nabla \times M)$  v (4) uporabimo vektorsko identiteto  $\nabla \times (M\phi) = \phi \nabla \times M - E \times M$ . Upoštevamo, da je po Gaussovem izreku člen  $\int \nabla \times (M\phi)$  za dovolj velike integracijske prostornine zanemarljivo majhen in dobimo

$$V = \frac{v}{c^2} \cdot E \times \boldsymbol{\mu}. \quad (5)$$

Celotna Lagrangeeva funkcija za magnetni dipol v električnem polju je tako [1]

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{v}{c^2} \cdot E \times \boldsymbol{\mu}. \quad (6)$$

Da bi izpeljali Hamiltonovo funkcijo kot funkcijo koordinat  $r$  in kanonične gibalne količine  $p$ , najprej iz enačbe (6) izračunamo

$$p = \frac{\partial L}{\partial v} = mv - \frac{E \times \boldsymbol{\mu}}{c^2}. \quad (7)$$

Ko vstavimo izraz za kanonično gibalno količino  $p$  v definicijo  $H = p \cdot v - L$ , končno dobimo [2]

$$H = \frac{1}{2m} \left( p - \frac{E \times \boldsymbol{\mu}}{c^2} \right)^2. \quad (8)$$

Zdaj lahko klasične količine zamenjamo z operatorji in zapišemo Schrödingerjevo enačbo za naš sistem. Imamo

$$\frac{1}{2m} \left( p - \frac{E \times \boldsymbol{\mu}}{c^2} \right)^2 \psi(r, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t), \quad (9)$$

kjer je  $\psi$  valovna funkcija, s katero opisujemo delec.  $p = -i\hbar\nabla$  je operator gibalne količine in  $\boldsymbol{\mu}$  operator magnetnega dipolnega momenta. Valovne funkcije nevtralnih delcev z magnetnim dipolnim momentom v zunanem električnem polju morajo torej rešiti enačbo (9).

<sup>2</sup>Opazimo, da ne velja običajni izraz za nabit delec  $j = \rho v$ . To je zato, ker imamo tok, ki poganja magnetni dipol in ne običajnega makroskopskega toka, ki ga nosi nabit delec.

#### 4. Splošne rešitve Hamiltonjanov tipa $\frac{1}{2m}(p-g)^2$

V tem razdelku bom predstavil splošen pristop k reševanju Schrödingerjevih enačb, v katerih namesto kvadrata kanonične gibalne količine  $p$  nastopa kvadrat razlike  $(p-g)$ , kjer je  $g(r, t)$  neka funkcija kraja in časa. To počnem, ker je enačba (9) tudi take oblike.

Če valovna funkcija  $\psi = \psi(r, t)$  reši enačbo

$$\frac{1}{2m}p^2\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi, \quad (10)$$

potem bo

$$\psi'(r, t) = \psi(r, t)e^{\frac{i}{\hbar}\int_{r_0}^r g(r', t) \cdot dr'} \quad (11)$$

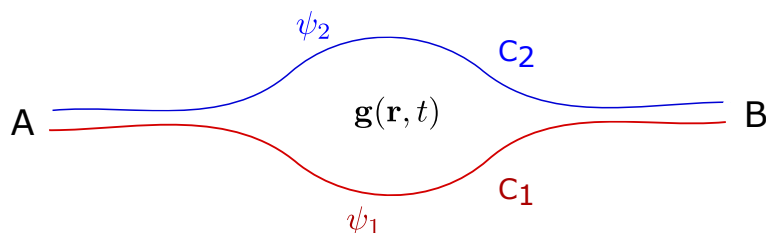
rešila enačbo

$$\frac{1}{2m}(p-g)^2\psi' + V'\psi' = \frac{\partial}{\partial t}\psi', \quad (12)$$

kjer je

$$V' = V - \frac{\partial}{\partial t} \int_{r_0}^r g(r', t) \cdot dr'. \quad (13)$$

Pravilnost nastavka se da preveriti s preprostim vstavljanjem funkcije (11) v enačbo (12). Valovno funkcijo  $\psi'$  lahko zapišemo s krivuljnim integralom le, če velja  $\nabla \times g = 0$ . Poudarimo, da se  $\psi$  in  $\psi'$  razlikujeta le v faznem faktorju, medtem ko sta verjetnostni gostoti  $|\psi|^2$  in  $|\psi'|^2$  enaki, kar zagotovo ne velja za splošne funkcije  $g$ .



**Slika 3.** Dva valovna paketa potujeta z leve proti desni in interferirata v točki B z relativno fazo oblike (14).

Poglejmo, kako nam izpeljano pomaga pri poti k interferenci. Če po zgledu slike 3 pošljemo iz točke A po krivuljah  $C_1$  in  $C_2$  dva valovna paketa in ju rekombiniramo v točki B, bosta v točki B valovni funkciji oblike  $\psi_1(B) = \psi(B)e^{\frac{i}{\hbar}\int_{C_1} g(r', t) \cdot dr'}$  in  $\psi_2(B) = \psi(B)e^{\frac{i}{\hbar}\int_{C_2} g(r', t) \cdot dr'}$ . Pri tem je  $\psi(B)$  tista valovna funkcija, ki bi v točki B rešila valovno enačbo (10). Vidimo, da se valovni funkciji razlikujeta le v faznih faktorjih. Njuna relativna faza je podana s krivuljnim integralom po zaključeni poti

$$S = \frac{1}{\hbar} \oint_{C_1-C_2} g(r', t) \cdot dr', \quad (14)$$

ki teče od A do B po krivulji  $C_1$  in potem od B do A po krivulji  $C_2$ . Če imata valovna paketa  $\psi_1$  in  $\psi_2$  enako amplitudo, bo v točki B verjetnostna amplituda  $|\psi_1 + \psi_2|^2$  sorazmerna s  $\cos^2(\frac{S}{2})$ .

Zdaj lahko izpeljemo fazno razliko pri Aharonov-Bohmovem pojavu, kjer je  $g = eA$ . Če valovna paketa potujeta po območju  $B = 0$ , velja tam  $\nabla \times A = 0$ . Uporabimo enačbo (11) za zapis valovne funkcije in po (14) izračunamo fazni faktor kot  $S_{AB} = \frac{1}{\hbar} \oint eA \cdot dr'$ . Integral po zaključeni zanki prevedemo na površinski integral in dobimo  $S_{AB} = \frac{e}{\hbar} \Phi_B$ , kjer je  $\Phi_B$  magnetni pretok, ki ga obkrožata poti obeh valovnih paketov [5]. Če med krivuljama ni nobenega območja z lokaliziranim magnetnim pretokom, potem je fazni faktor enak 0 in ni interference.

Kot pogoj za zapis valovnih funkcij s krivuljnimi integrali sem navedel brezvrtničnost polja  $g$ . V Aharonov-Bohmovem pojavu pogoj postane bolj intuitiven, če se spomnimo, da na klasičen

električno nabit delec v območju z  $\nabla \times A = 0$  ne deluje nobena sila. V kvantni sliki se spremeni le faza valovne funkcije, medtem ko njena amplituda ostane nespremenjena. Če bi na klasičen delec delovala sila, bi v kvantni sliki po Ehrenfestovem teoremu pričakovali tudi spremembo amplitude valovne funkcije. Zaključimo, da je reševanje enačbe (12) z nastavkom (11) sprejemljivo takrat, kadar v klasičnem sistemu ni sile.

Razdelek je v resnici recept za iskanje topoloških faz: najprej sestavimo sistem, ki ima Hamiltonjan oblike  $H = \frac{1}{2m}(p - g)^2$ . Nato najdemo tak  $g$ , da je skoraj povsod  $\nabla \times g = 0$ . Če ima  $g$  singularnosti, okoli katerih je njegov krivuljni integral po zaključeni zanki neničeln, bomo dobili topološko fazo.

## 5. Sila na magnetni dipol v električnem polju

Cilj tega razdelka je pokazati, da magnetni dipol, ki se giblje v polju dolge enakomerno nabite žice in ki ima magnetni moment vzporeden z žico, ne čuti nobene sile [1]. Za zdaj lahko vzamemo bolj splošno polje, ki ima simetrijo na translacijo v smeri  $z$  in ima le komponenti v ravnini  $xy$ , torej

$$E(x, y) = (E_x(x, y), E_y(x, y), 0). \quad (15)$$

Naj magnetni moment  $\boldsymbol{\mu} = \mu \hat{e}_z$  kaže v smeri osi  $z$ . Ko vstavimo tako polje in magnetni moment v Lagrangeovo funkcijo (6) za magnetni dipol v splošnem električnem polju, dobimo

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mu}{c^2}(E_y v_x - E_x v_y). \quad (16)$$

Člena Euler-Lagrangeeve gibalne enačbe  $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_x}$  sta

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\mu}{c^2}v_x \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\mu}{c^2}v_y \frac{\partial E_x}{\partial x} \quad (17)$$

in

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_x} = m\dot{v}_x - \frac{\mu}{c^2} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} v_y \right). \quad (18)$$

Ko ju izenačimo, dobimo  $m\dot{v}_x = \frac{\mu v_y}{c^2} \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right)$ . Ko podobno naredimo še za smer  $y$  in upoštevamo  $\nabla \cdot E = 0$ , dobimo  $\frac{d}{dt} \mathbf{v} = 0$ . To pomeni, da se dipol giblje premo enakomerno - enako, kot če polja sploh ne bi bilo [1]. Za polja oblike (15) torej na dipol ne deluje nobena sila. Kvantni valovni funkciji se bo ob vklopu električnega polja spremenila le faza, ne pa amplituda.

Preprosto je tudi pokazati, da za električno polje ravne žice, v katerem se giblje dipol s smerjo vzdolž žice, velja  $\nabla \times (E \times \boldsymbol{\mu}) = 0$ . Zadoščeno je torej tudi temu pogoju za uporabo zapisa s krivuljnim integralom.

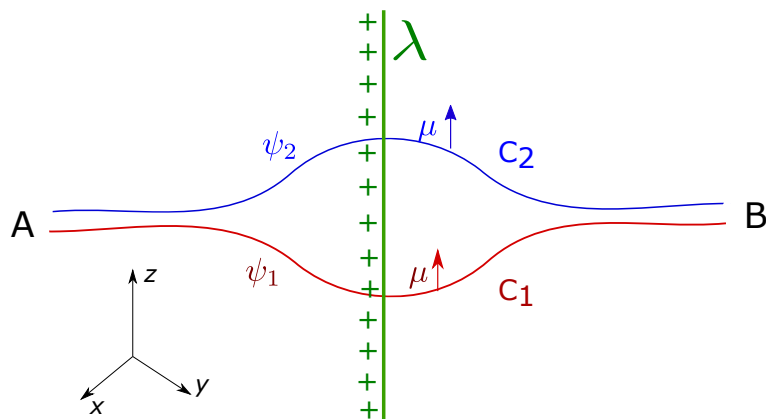
## 6. Aharonov-Casherjeva faza

Izračunajmo zdaj fazo, s katero bosta interferirali dve valovni funkciji, ki obideta dolgo nabito žico vsaka po svoji strani. Žica sovpada z osjo  $z$  in nosi linearno gostoto naboja  $\lambda$ . Njeno električno polje je  $E(x, y) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{(x, y)}{r^2}$ , kar je le poseben primer polja (15). Namesto vektorja  $\boldsymbol{\mu}$  pišemo pričakovano vrednost komponente  $z$  magnetnega dipolnega momenta  $\mu_z$ . Iz enačbe (14) izračunamo Aharonov-Casherjevo fazo za  $g = \frac{E \times \boldsymbol{\mu}}{c^2}$  in dobimo

$$S_{AC} = \frac{1}{\hbar c^2} \oint_{C_1 - C_2} (E(r', t) \times \boldsymbol{\mu}) \cdot dr' = -\frac{\lambda \mu_z \mu_0}{\hbar}, \quad (19)$$

kjer je  $\mu_0$  permeabilnost vakuumu [1]. Negativen predznak dobimo zaradi pozitivne usmeritve zanke  $C_1 - C_2$  na sliki 4.

Izraz (19) je glavni teoretični rezultat tega seminarja, zato si ga natančneje ogledimo. Vidimo, da je Aharonov-Casherjeva faza neodvisna od mase delca in od njegove hitrosti. Poleg tega je linearna v gostoti naboja: če krivulja  $C_1 - C_2$  obkroži dve žici z dolžinskima gostotama nabojev  $\lambda$ , bo  $S_{AC}$  pač dvakrat večja. Krivulja lahko obkroži poljubno veliko žic, katerih polja tvorijo superpozicijo, to pa nam da ravno splošno polje tipa (15), za katerega smo pokazali, da na klasičen magnetni dipol ne proizvede sile [3].



**Slika 4.** Dva valovna paketa potujeta okoli dolge enakomerno nabite žice, vzporedne z osjo  $z$ , in interferirata v točki B. Magnetni moment delcev je vzporeden žici.

Da bi dobili občutek za vrednosti, se vprašajmo, kolikšna mora biti linearna gostota naboja na žici, če hočemo fazo reda  $\frac{\pi}{2}$ . Za nevtrone potrebujemo  $\lambda \approx e_0/10^{-17}$  m, za atome, ki imajo večji magnetni moment, pa  $\lambda \approx e_0/10^{-14}$  m. Tu je  $e_0$  osnovni naboj [1]. Za tako velike fazne premike bi potrebovali torej žico, ki ima osnovne naboje v razmiku premera jedra! Očitno v eksperimentu ne bomo uporabili le ene žice, in tudi ne bomo dosegli tako velikih faznih razlik.

## 7. Eksperiment z nevtronsko interferometrijo

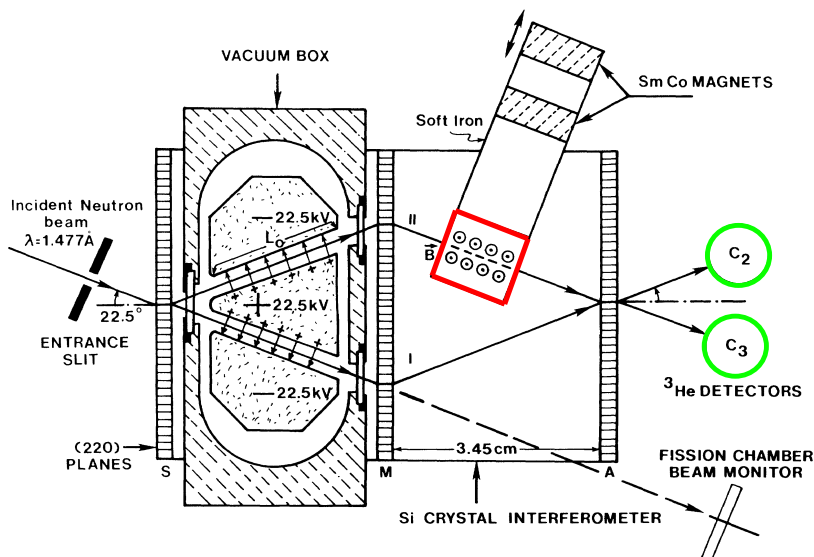
Prva eksperimentalna potrditev Aharonov-Casherjevega pojava je uspela leta 1989 raziskovalni skupini A. Cimmina na Melbournski Univerzi v Avstraliji [3]<sup>3</sup>. Namesto nabite žice so raziskovalci uporabili vzporedni elektrodi, ki sta ekvivalentni skupku veliko dolgih nabitih žic, saj je Aharonov-Casherjeva faza linearno sorazmerna zaobjeti gostoti naboja. Kot kaže slika 5, okoli elektrode pošljemo dva curka nevtronov, in opazujemo interferenco na drugi strani. Namesto dolžinske gostote naboja  $\lambda$  tako v enačbe vstopa  $\frac{2UL}{cD}$ , kjer je  $U = 45$  kV napetostna razlika med elektrodama,  $D = 0.154$  cm njun razmik,  $c$  hitrost svetlobe in  $L = 2.53$  cm dolžina poti med elektrodama, ki jo nevtroni prepotujejo. Pričakovana vrednost fazne razlike med curkoma je  $S_{AC} = 1.50$  mrad.

V detektorjih (glej sliko 5) izmerimo števili sunkov  $C_2 = a_2 - b_2 \cos S$  in  $C_3 = a_3 + b_3 \cos S$ . V eksperimentu je bilo  $a_2 \approx 3a_3$ . Velja  $b_2 = b_3$ , tako da je vsota  $C_2 + C_3$  neodvisna od  $S$ , fazne razlike med curkoma, ki ima več prispevkov. Ker je interferometer nagnjen, curka potujeta po različnih višinah in se med njima ustvari od spina neodvisen gravitacijski fazni zamik  $S_g$ . Zgornji curek nevtronov pošljemo še skozi dodatno magnetno polje, ki naredi glede na spodnji curek precesijski fazni zamik velikosti  $|S_M|$ . Na sliki 5 je zgornji curek označen z II, spodnji z I, magnetno polje pa se nahaja znotraj rdečega pravokotnika. Predznak precesijske faze je tako kot pri Aharonov-Casherjevi fazi odvisen od smeri spina, a je neodvisen od polaritete elektrod. Smer spina glede na sliko 5 lahko kaže v list (dol) ali iz lista (gor).

Za nevtrone s spinom gor dobimo v števcu  $C_3$  število sunkov  $C_3^\uparrow(\pm) = \frac{1}{2}a_3 + \frac{1}{2}b_3 \cos[S_0 + S_g +$

<sup>3</sup>Razen izjem, označenih s citati, bodo vsi podatki v tem razdelku vzeti iz vira [3].

## Aharonov-Casherjev pojav



**Slika 5.** Eksperimentalna postavitev Cimmina idg. Vpadni nepolarizirani nevtronski curek na levi se razcepi v dva. Oba curka potujeta med dvema elektrodama, zgornji pa še skozi magnet, označen z rdečim pravokotnikom. Interferometer je nagnjen. Po rekombinaciji curkov v detektorjih  $C_2$  in  $C_3$ , ki sta označena z zeleno, štejemo sunkove. Slika je povzeta po [3].

$(\mp |S_{AC}| + |S_M|)$ . Znak  $\pm$  se nanaša na polariteto elektrod,  $S_0$  pa je ničta fazna razlika ("offset"). Faza zaradi magnetne precesije ima za obe polariteti elektrod enak predznak in enako velikost  $|S_M|$ . Za nevtrone s spinom dol dobimo podoben izraz  $C_3^\downarrow(\pm) = \frac{1}{2}a_3 + \frac{1}{2}b_3 \cos[S_0 + S_g - (\mp |S_{AC}| + |S_M|)]$ , v katerem obrneta predznak AC faza in faza zaradi magnetne precesije, saj sta le ti odvisni od smeri spina.

V eksperimentu so uporabili nepolariziran curek nevtronov, ki ima enaki številni nevtronov s spini gor in dol. Ker sta spinski stanji razločljivi, se na števcih števili sunkov od obeh projekcij spina preprosto seštejeta:

$$C_3(\pm) = C_3^\uparrow(\pm) + C_3^\downarrow(\pm) = a_3 + b_3 \cos[S_0 + S_g] \cos[|S_M| \mp |S_{AC}|] \quad (20)$$

$$C_2(\pm) = C_2^\uparrow(\pm) + C_2^\downarrow(\pm) = a_2 - b_3 \cos[S_0 + S_g] \cos[|S_M| \mp |S_{AC}|]. \quad (21)$$

Da je bil signal maksimalen, so prilagodili  $S_g$  tako, da je bilo  $\cos[S_0 + S_g] = 1$ . Potem dobimo za števili sunkov

$$C_3(\pm) = a_3 + b_3 \sin(|S_M|) \sin(\pm |S_{AC}|) + b_3 \cos(|S_M|) \cos(|S_{AC}|), \quad (22)$$

$$C_2(\pm) = a_2 - b_3 \sin(|S_M|) \sin(\pm |S_{AC}|) - b_3 \cos(|S_M|) \cos(|S_{AC}|). \quad (23)$$

Eksperiment so izvajali pri treh različnih vrednostih magnetnega polja, ki ustvari precesijski fazni zamik  $S_M$ . To so  $B_+$ ,  $B_-$  in  $B_0$ . Pri vrednosti  $B_+$  je  $|S_M| \approx \frac{\pi}{2}$  in se enačbi (22) in (23) ob linearizaciji poenostavita v  $C_3(\pm) \approx a_3 \pm b_3 |S_{AC}|$  in  $C_2(\pm) \approx a_2 \mp b_3 |S_{AC}|$ , saj je  $|S_{AC}|$  vedno veliko manjša od 1. Za vrednost  $B_-$  je člen  $\sin(|S_M|) \approx -1$ , kosinusna člena v (22) in (23) pa sta tako kot za  $B_+$  enaka 0. Spet lahko lineariziramo in dobimo  $C_3(\pm) \approx a_3 \mp b_3 |S_{AC}|$  in  $C_2(\pm) \approx a_2 \pm b_3 |S_{AC}|$ .

Vidimo, da za magnetno polje  $B_-$  vrednosti  $C_3$  in  $C_2$  od  $a_3$  in  $a_2$  s spreminjanjem  $S_{AC}$  odstopata v nasprotni smeri kot za  $B_+$ . Če za  $B_-$  izračunamo razliko  $C_2(+)$  -  $C_2(-)$ , mora ta imeti enako velikost, a nasproten predznak kot za  $B_+$ .

Magnetno polje  $B_0$  je takšno, da sta sinusna člena v enačbah (22) in (23) enaka 0. Ostaneta le kosinusna člena, zato je interferenca kvadratična v  $S_{AC}$ . Ker je  $|S_{AC}|$  majhna, je interferenca

Eksp. pogoji	$C_2(+)-C_2(-)$	$C_3(+)-C_3(-)$
Ničelni	$-5136 \pm 6428$	$643 \pm 3469$
$B_+$	$13462 \pm 6223$	$-8019 \pm 3494$
$B_-$	$-9986 \pm 6097$	$8243 \pm 3413$
$B_0$	$1718 \pm 6020$	$-3631 \pm 3979$

**Tabela 1.** Eksperimentalni podatki za razliko števila sunkov pri pozitivni in negativni polariteti elektrod pri različnih pogojih [3].

pri dani natančnosti neizmerljiva. Pričakujemo, da bosta vrednosti  $C_3$  in  $C_2$  neodvisni od  $S_{AC}$  in posledično od polaritete elektrod. Enako pričakujemo pri ničtem eksperimentu, kjer magnetno polje kaže v drugi smeri, in sploh ni AC pojava.

V tabeli 1 so prikazani eksperimentalni podatki. Vse napake so statističnega izvora. Sistematičnih napak raziskovalci v analizi podatkov niso upoštevali. Dlje ko merimo, več je izmerkov in manjša je relativna Poissonska napaka, zato je meritev trajala več kot 4 mesece. V tabeli so napisane le razlike v številu sunkov, izmerjenih pa je bilo  $6 \times 10^6$  sunkov v detektorju  $C_3$  in  $19 \times 10^6$  sunkov v detektorju  $C_2$  za vsakega izmed štirih eksperimentalnih pogojev (polja  $B_+$ ,  $B_-$  in  $B_0$  ter ničelni eksperiment).

Vidimo, da sta si razliki  $C_2(+)-C_2(-)$  za  $B_-$  in  $B_+$  po velikosti enaki znotraj statistične negotovosti. Tudi za  $C_3(+)-C_3(-)$  je enako. Ko zamenjamo  $B_+$  in  $B_-$ , se predznak razlike  $C_2(+)-C_2(-)$  obrne, absolutna vrednost pa se znotraj enega standardnega odklona ne spremeni. Enako je za  $C_3$ .

Števili sunkov pri + in - polariteti se za  $B_0$  in ničelni eksperiment znotraj enega standardnega odklona ne razlikujeta, saj je njuna razlika znotraj napake enaka 0. Sta torej neodvisni od polaritete elektrod, kot smo pričakovali.

Iz podatkov so določili  $S_{AC} = 2.19 \pm 0.52$  mrad kot povprečje  $\frac{|C_2(+)-C_2(-)|}{2b_3}$  in  $\frac{|C_3(+)-C_3(-)|}{2b_3}$ . Teoretično bi ti vrednosti seveda morali biti enaki. Ko primerjamo izmerjeno AC fazo z napovedano vrednostjo, dobimo

$$\frac{(S_{AC})_{\text{Eksperiment}}}{(S_{AC})_{\text{Napoved}}} = 1.46 \pm 0.35. \quad (24)$$

Ker se kvalitativne lastnosti razlik sunkov na detektorjih ujema z napovedmi in ker se izmerjena vrednost  $S_{AC}$  znotraj sicer širokega intervala  $1.3\sigma$  ujema z napovedano, lahko trdimo, da je eksperiment potrdil pojav. A eksperiment je deloval le pri eni jakosti električnega polja in le pri eni hitrosti nevtronov. Za potrditev linearne sorazmernosti Aharonov-Casherjeve faze z jakostjo električnega polja in neodvisnosti AC faze od hitrosti nevtronov je svet moral počakati 4 leta na rezultate Karin Sangster in Edwarda Hindsa iz Univerze Yale, ZDA.

## 8. Eksperiment z atomsko interferometrijo

Do sedaj smo spoznali dve eksperimentalni postavitvi za opazovanje Aharonov-Casherjevega pojava, pri katerih koherentna curka obideta nabito žico, ali pa potujeta med elektrodami, kot sta kazali sliki 4 in 5. V eksperimentu Sangster in Hindsa [4]<sup>4</sup> je bila uporabljena tretja možnost, ki jo upodablja slika 6. Curek delcev je superpozicija dveh koherentnih curkov. Spini vseh delcev v enem curku kažejo v isto smer in so nasprotni tistim v drugem curku. Smeri spina so tako  $\pm\sigma$ , kjer je  $\sigma$  enotski

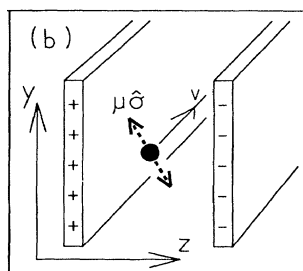
<sup>4</sup>Razen izjem, označenih s citati, bodo vsi podatki v tem razdelku vzeti iz vira [4].



vektor. Oba curka potujeta po isti poti v prostoru: med dvema elektrodama, ki ustvarjata homogeno električno polje jakosti  $E$ . Ker je količina  $\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{E}$  nasprotnega predznaka v vsakem curku, bosta curka med potovanjem po električnem polju nabrala različni Aharonov-Casherjevi fazi (formula (19)) in bo med njima relativna fazna razlika

$$S_{AC} = \frac{2\mu}{\hbar c^2} \sigma_y E l. \quad (25)$$

$\mu$  je velikost magnetnega dipolnega momenta,  $l$  je dolžina, ki jo curka prepotujeta med elektrodama, in  $\sigma_y$  je projekcija enotskega vektorja  $\boldsymbol{\sigma}$  na os  $y$ . Pri tem smo električno polje postavili v smeri  $z$  kot kaže slika 6. Os  $x$  je tudi smer potovanja curka in na  $y$  osi leži komponenta spina, ki prispeva k Aharonov-Casherjevi fazi (25).



**Slika 6.** Eksperimentalna postavitve Sangster in Hindsa za merjenje Aharonov-Casherjevega pojava. Curek je superpozicija dveh curkov delcev z nasprotnimi spini, ki gredo vsi skozi isto električno polje, po isti poti. Slika je vzeta iz [4].

Opisani postopek bi veljal za katerekoli nevtralne delce z magnetnim dipolnim momentom. V eksperimentu so uporabili molekule Talijevega Fluorida. Delo z molekulami je nasploh lažje kot z nevtroni, saj ne potrebujemo radioaktivnih izvorov, ki imajo omejeno jakost in so nevarni.

Molekule so pripravili v osnovnem elektronskem in vibracijskem stanju. Stanje molekule, ki jo opišemo z rotatorjem, je imelo rotacijsko kvantno število  $J = 1$ . Magnetno kvantno število rotacije lahko torej zavzame vrednosti  $m_J = 0, \pm 1$ . K celotni vrtilni količini prispevata še spina jeder, ki jima pripišemo magnetni kvantni števili  $m_F = \pm \frac{1}{2}$  za jedro F in  $m_{Tl} = \pm \frac{1}{2}$  za jedro Tl. Vidimo, da imamo za rotacijsko število  $J = 1$  12 možnih kvantnih stanj molekul. Raziskovalci so molekule pripravili v stanju  $(m_J, m_{Tl}, m_F) = (+1, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ , ki ga označimo kot stanje  $(-)$ , saj nas posebej zanima jedro F.

Ko imamo molekule pripravljene v opisanem stanju, z radijskimi valovi vzbudimo del jeder F iz  $m_F = -\frac{1}{2}$  v  $m_F = \frac{1}{2}$ . Stanje vzbujene molekule je potem  $(m_J, m_{Tl}, m_F) = (+1, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ , kar označimo kot  $(+)$ . Pomembno je, da se pri obsevanju spremeni le magnetno kvantno število jedra F, vse ostale lastnosti molekul v curku pa ostanejo enake kot prej. Zdaj lahko tudi opravičimo zanemarjanje elektronov; ti navsezadnje v splošnem prispevajo k skupni vrtilni količini molekule. Ker z radijskimi frekvencami ne moremo vzbuditi elektronov v višja rotacijska stanja, bodo elektroni v molekulah  $(+)$  v enakih stanjih kot v molekulah  $(-)$ , zato bodo ob prehodu električnega polja nabrali enako fazo in ne bodo prispevali k Aharonov-Casherjevi fazni razliki (25) med curkoma.

Ker se paličaste molekule TlF v zunanem električnem polju najraje postavijo vzporedno s poljem, bodo tako molekule kot njihovi spini kazale preferenčno v smeri osi  $z$ . To bi pomenilo, da bi bil  $\sigma_y = 0$  in ne bi opazili Aharonov-Casherjevega pojava. Da pridobimo nekaj komponente spina v smeri osi  $y$ , vključimo prečno magnetno polje, ki molekule zavrti za kot  $\theta$ , ki je prikazan na sliki 7a. Smer spina zdaj v povprečju kaže vzdolž zavrtene osi in  $\sigma_y$  zavzame vrednosti  $\pm \sin \theta$ , ki sta zdaj različni od 0. V eksperimentu je bil  $\sin \theta = 0.133$ .

Curek v stanju  $(-)$  so poslali skozi radiofrekvenčni vzbujevalnik, ki je del molekul vzbudil v stanje  $(+)$ . Superpozicija dveh curkov z nasprotnim spinom je prepotovala razdaljo  $l = 2.05$  m v

električnem polju. V drugem rf vzbujevalniku so se molekule rekombinirale in interferirale. Če bi jih namreč pustili v stanjih z nasprotnima spinoma, zaradi ločljivosti stanj v Paulijevem formalizmu ne bi bilo interference. Skalarni produkt stanja (+) in stanja (-) je 0 in brez rekombinacije curkov bi se sunki le sešteli, tako kot pri eksperimentu Cimmina [3], kjer sta se števili nevtronov s spinom gor in spinom dol sešteli na vsakem detektorju. Shematično je pot curka prikazana še na sliki 8, kjer je tudi označena dolžina poti med elektrodama  $l$ .

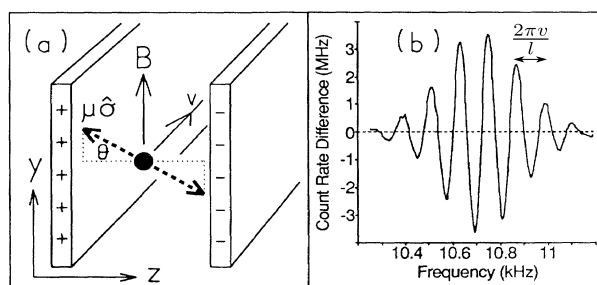
Delež molekul  $P$ , ki so prešle iz stanja (-) v stanje (+), in jih zaznamo v končnem signalu, je podan s formulo

$$P = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \left( (\omega - \omega_0) \frac{l}{v} + \delta + S \right) \right], \quad (26)$$

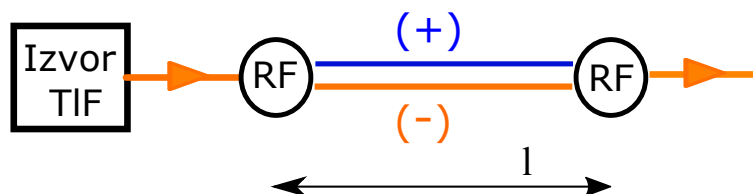
kjer je  $\omega$  frekvenca rf vzbujevalnega polja,  $\omega_0$  resonančna frekvenca za prehod jedra F v vzbujeno stanje,  $\delta$  fazni zamik med obema rf poljema, in  $S$  vsota vseh relativnih faz med obema curkoma. Ker je signal  $P$  lahko zašumljen, so v eksperimentu najprej naredili meritev s faznim zamikom  $\delta = \frac{\pi}{2}$  med rf vzbujevalnikoma in nato še z  $\delta = -\frac{\pi}{2}$ . Manj zašumljena razlika deležev prehodov (-) v (+) je potem

$$P(\delta = -\frac{\pi}{2}) - P(\delta = \frac{\pi}{2}) = \sin \left( (\omega - \omega_0) \frac{l}{v} + \delta + S \right). \quad (27)$$

Najprej so želeli ugotoviti (ne)odvisnost Aharonov-Casherjeve faze od hitrosti molekul. Pri fiksnem električnem polju  $E = 29.5 \text{ kV/cm}$  so spreminjali frekvenco rf vzbujevalnikov  $\omega$ . Razlika deležev prehodov (27) je prikazana na grafu 7b. Vemo, da Aharonov-Casherjeva faza obrne predznak, če obrnemo smer električnega polja. To bo povzročilo vodoravni premik signala iz 7b, saj sprememba  $S_{AC}$  pomeni tudi spremembo vsote faz  $S$ , ki je v argumentu sinusa v enačbi (27). Če se spremeni argument, se bo zamaknil cel signal. Iz frekvenčnega premika signala ob obratu smeri električnega polja lahko izračunamo Aharonov-Casherjevo fazo, ki jo to električno polje povzroča.



**Slika 7.** (a) Rotacija molekule in njenega spina okoli osi  $x$  glede na ravnovesno usmeritev v smeri  $z$ . (b) Tipičen signal (27) v odvisnosti od rf frekvence. Slika je vzeta iz [4].



**Slika 8.** Shematični prikaz razdelitve curka z rf vzbujevalnikom in potovanja curkov do rekombinacijskega vzbujevalnika.

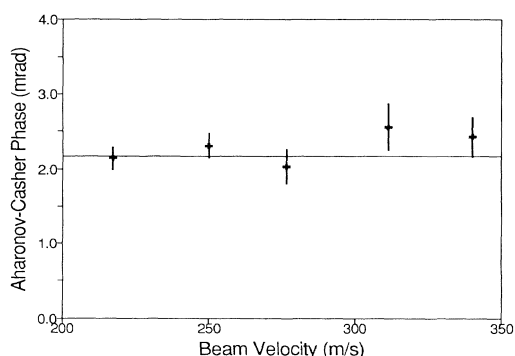
Hitrost molekul določimo iz razmika ničel signala, saj vidimo, da je izraz (27) periodičen s periodo v frekvenčnem prostoru  $\frac{2\pi\nu}{l}$ . Perioda je shematsko označena na sliki 7b. Ostane še vprašanje, kako sploh upravljati velikost hitrosti molekul? Molekule iz termičnega izvora so v eksperimentu usmerjali

z elektrostatskimi kvadrupolnimi lečami, katerih goriščna razdalja je odvisna od hitrosti molekul in moči kvadrupolnega polja. S prilagajanje polja v lečah so dosegli, da so v napravo prišle le molekule z želenimi hitrostmi.

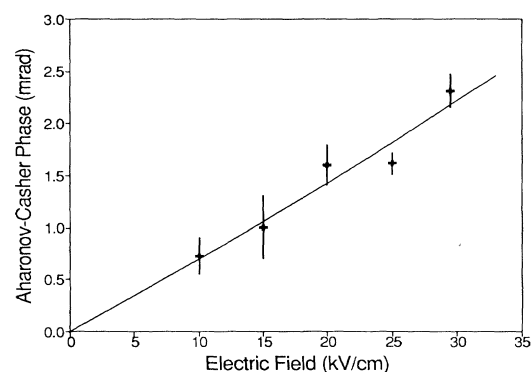
Izmerjena Aharonov-Casherjeva faza je za hitrosti v razponu 200 – 350 m/s prikazana na sliki 9. Očitno je faza neodvisna od hitrosti. Bolj odstopajoče točke imajo tudi večje merske nezanesljivosti. Te izhajajo iz fluktuacij frekvenčnega premika signala med merjenjem (zaradi več razlogov lahko signal s slike 7b "pleše"levo in desno). Uteženo povprečje izmerkov  $S_{AC} = 2.22 \pm 0.11$  mrad se znotraj merske nezanesljivosti  $\frac{\sigma}{2}$  ujema z napovedano vrednostjo  $S_{AC} = 2.18$  mrad.

Nadalje so v eksperimentu izmerili odvisnost AC faze od jakosti električnega polja. Pri fiksni hitrosti molekul 250 m/s so spreminjali jakost električnega polja  $E$  v razponu 10 – 30 kV/cm. Rezultati so skupaj z napovedano linearno odvisnostjo prikazani na sliki 10. Naj poudarim, da je povezana črta čisto teoretična napoved in ni nikakor prilagojena podatkom. Le-ti se torej z njo odlično ujemajo in je tudi linearna sorazmernost  $S_{AC}$  z  $E$  lepo potrjena.

Iz uteženega povprečja vseh meritev eksperimenta sta Sangster in Hinds izračunala koeficient ujemanja izmerjene faze s teoretično napovedjo  $\frac{(S_{AC})_{Eksperiment}}{(S_{AC})_{Napoved}} = 0.99 \pm 0.04$ . Eksperiment je torej potrdil Aharonov-Casherjev pojav na 4% natančno, kar je za red velikosti boljša natančnost kot pri eksperimentu Cimmina.



**Slika 9.** Izmerjena AC faza v odvisnosti od hitrosti atomov v curku. Slika je vzeta iz [4].



**Slika 10.** Izmerjena linearna odvisnost AC faze od jakosti električnega polja. Slika je vzeta iz [4].

Zakaj bi torej sploh omenjal eksperiment Cimmina, ko pa je dal toliko šibkejši rezultat? Najprej zaradi zgodovinskosti, saj je Cimmino prvi eksperimentalno potrdil Aharonov-Casherjev pojav. Predvsem pa zato, da bralec dobi občutek, na kako različne načine lahko pridemo do potrditve AC pojava in do meritve kvantne interference nasploh. Cimmino je štel sunke nevtronov, ki so potovali okoli elektrod, Sangster in Hinds pa sta opazovala frekvenčni premik vzbujevalnega signala za molekule, ki so potovale po isti poti. Pri Cimminu so bile napake pretežno statističnega izvora in drugih napak v analizi niti niso upoštevali, pri atomski meritvi pa so ocenili merske negotovosti z opazovanjem fluktuacij merjenega signala. Eksperiment z nevtroni je zaradi statističnega pristopa trajati več mesecev, medtem ko atomski eksperiment takih omejitev ni imel.

Pri obeh eksperimentih je bil magnetni dipolni moment posledica spina jedra. Če bi lahko naredili eksperiment s spini elektronov, bi bila izmerjena  $S_{AC}$  za enake jakosti električnih polj za vsaj tri velikostne rede večja, saj ima elektron za tri rede velikosti večji magnetni moment od nevtrona ali protona. Tako bi lahko prišli tudi do faznih zamikov reda  $\pi$  in bi mogoče dosegli še manjše relativne napake.

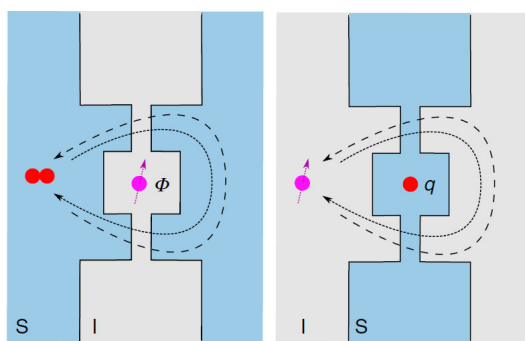
Pred zaključkom bom na kratko orisal še praktični pomen AC pojava za merjenje naboja.

## 9. Uporaba v kvantnih merilnikih naboja

Znano je, da lahko preko Aharonov-Bohmovega pojava merimo majhna magnetna polja [7]. SQUID-i (Superconducting quantum interference device) so narejeni iz superprevodnega materiala, v katerega je vstavljen tanek kos izolatorja. Ker magnetno polje ne more v superprevodnik, teče magnetni pretok le skozi izolator. Cooperjevi pari, ki so nosilci naboja v superprevodniku, lahko potujejo okoli izolatorja po dveh straneh, in interferirajo z Aharonov-Bohmovo fazo, kar da merilo za magnetni pretok. Slednji preko znane površine meri gostoto magnetnega polja. Dogajanje v SQUID-u je shematično predstavljeno na sliki 11.

V članku [7] so raziskovalci predstavili analogno napravo za merjenje naboja. Shematično je CQUID (Charge quantum interference device) prikazan na sliki 11. Večina prostora je zapolnjena z izolatorjem, po katerem se prosto gibljejo fluksoni, nosilci magnetnega pretoka. Taisti fluksoni so bili v SQUID-u prisotni le v izolatorju, saj v superprevodnik ne morejo. V izolator je vstavljen kos superprevodnika, ki ima v notranjosti naboj, ki ga merimo. Ko fluksoni potujejo po različnih straneh okoli superprevodnika, zaradi električnega polja naboja naberejo AC fazo (19) in interferirajo.

CQUID je po delovanju popolnoma enak SQUID-u, če med seboj zamenjamo fluksoni in naboje in superprevodnik in izolator. V prihodnosti bodo natančni CQUID-i morda omogočali izjemno natančno merjenje kvantov naboja.



**Slika 11.** Levo: delovanje SQUID-a. Desno: delovanje CQUID-a. S črko S je označen superprevodni material, s črko I izolator. Z rdečimi pikami so označeni elektrostatski naboji, z vijoličnimi puščicami pa fluksoni. Slika je vzeta iz [7].

## 10. Zaključek

V seminarju sem bralca popeljal skozi celotno teoretično izpeljavo Aharonov-Casherjevega pojava. Preko klasične Lagrangeeve funkcije sem izpeljal Schrödingerjevo enačbo za nevtralni delec z magnetnim dipolnim momentom v električnem polju. S splošno rešitvijo za Hamiltonjane tipa  $H = \frac{(p-g)^2}{2m}$  sem izpeljal fazno razliko med dvema valovnima paketoma, ki obideta nabito žico vsak po svoji strani.

Predstavil sem eksperimentalni potrditvi AC pojava, ki na 4% natančno potrđita teoretične napovedi. Na koncu sem še omenil možnost uporabe AC pojava v merilnih naboja in toka. Kjer se je dalo, sem se za primerjavo skliceval na bolj poznan Aharonov-Bohmov pojav.

Aharonov-Casherjev pojav je le en izmed mnogih topoloških kvantnih pojavov. Bil je večkrat eksperimentalno potrjen z zelo različnimi metodami in je med drugim lahko uporaben v merilnih sistemih. Vsak Hamiltonjan tipa  $H = \frac{(p-g)^2}{2m}$  lahko v sebi skriva topološko fazo, zato se bo področje topološke kvantne mehanike gotovo tudi v prihodnosti plodovito razvijalo.

LITERATURA

- [1] Y. Aharonov in A. Casher. *Topological Quantum Effects for Neutral Particles*. Objavljeno v: Physical Review Letters, Volume 53, Number 4. 1984. Strani 319-321.
- [2] R. Mignani. *Aharonov-Casher effect and geometrical phases*. Objavljeno v: Journal of Physics A: Mathematical and General, Volume 24, Number 8. 1991. Strani L421-L423.
- [3] A. Cimmino idg. *Observation of the Topological Aharonov-Casher Phase Shift by Neutron Interferometry*. Objavljeno v: Physical Review Letters, Volume 63, Number 4. 1989. Strani 380-383.
- [4] K. Sangster in E. A. Hinds. *Measurement of the Aharonov-Casher Phase in an Atomic System*. Objavljeno v: Physical Review Letters, Volume 71, Number 22. 1993. Strani 3641-3644.
- [5] Y. Aharonov in D. Bohm. *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory*. Objavljeno v: Physical Review Volume 115, Number 3. 1959. Strani 485-491.
- [6] D. J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics, 1st edition*. Pearson College Div, 1994. Stran 346.
- [7] S. E. de Graaf idg. *Charge quantum interference device*. Objavljeno v: Nature physics 14, 2018. Strani 590-594.
- [8] L. D. Landau in E. M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields, Fourth Revised English Edition*. Butterworth Heinemann, 1999. Stran 62.
- [9] A. Ramšak. *Kvantna Mehanika; skripta v pripravi*.