PRAŠTEVILSKI IZREK

ANDRAŽ MAIER

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Članek obravnava dokaz praštevilskega izreka. V ta namen je predstavljena osnovna teorija neskončnih produktov in Riemannova funkcija zeta. Izpeljana je Eulerjeva produktna formula, njena meromorfna razširitev na desno polovico kompleksne ravnine in predpis za njen logaritmični odvod. Definirani sta Mangoldtova in psi funkcija. Z njuno pomočjo je poiskana ekvivalentna oblika praštevilskega izreka, ki je nazadnje dokazana z metodami kompleksne analize.

PRIME NUMBER THEOREM

In this paper, prime number theorem is proved using analytical methods. For this purpose some theory of infinite products is introduced and the Riemann zeta function is used. The Euler product formula, its meromorphic extension on the right half of the complex plane is derived and the definition of its logarithmic derivative is found. The Mangoldt and psi functions are defined and used to find the equivalent formulation of the prime number theorem. Finally, the prime number theorem is proved using complex analysis methods.

1. Uvod

Praštevila so v matematiki osnovni gradniki števil in čeprav so sama po sebi zelo enostavna, njihovo raziskovanje hitro postane zelo zahtevno. Veliko odprtih problemov v teoriji števil se nanaša na praštevila. Omenimo samo znani problem praštevilskih dvojčkov, ki pravi, da obstaja neskončno mnogo parov praštevil, ki se razlikujejo za dva. Tudi nas bo zanimala domneva, ki je skoraj 100 let ostala nedokazana. Že Evklid je v svojih Elementih pokazal, da je praštevil neskončno mnogo, mi pa bomo šli še korak dlje. Zanimalo nas bo, kako hitro število praštevil narašča. O tem govori praštevilski izrek, ki ga najprej formalno zapišimo.

Definicija 1. *Število praštevil* $\pi(x) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}$ je funkcija, ki pozitivnemu realnemu številu x priredi število vseh praštevil manjših ali enakih x.

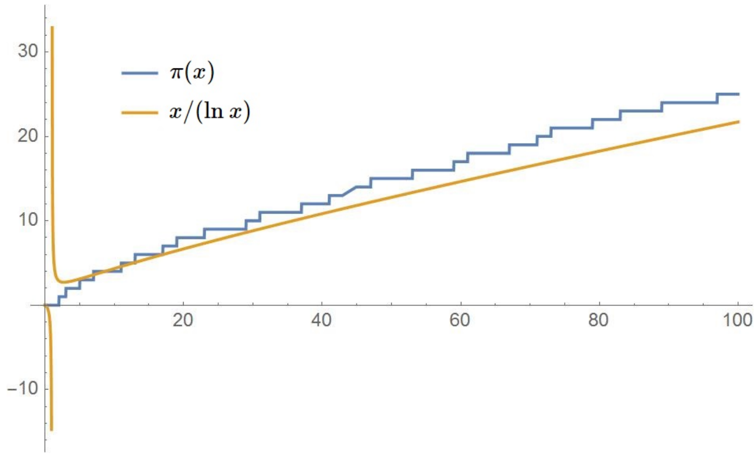
Izrek 1 (Praštevilski izrek).

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} = 1$$

Izrek nam pove, da se funkcija π asimptotsko obnaša enako kot $x \mapsto x/\ln(x)$. To je razvidno tudi iz slike 1, kjer sta v istem koordinatnem sistemu narisana grafa obeh funkcij.

Domnevo sta prva postavila Gauss in Legendre konec osemnajstega stoletja, Gauss je bil takrat star šele 15 let. Problem so reševali mnogi znani matematiki. Omenimo samo Riemanna, ki je med prvimi uporabljal metode kompleksne analize za reševanje problemov teorije števil. Med poskusi dokazovanja domneve je definiral Riemannovo funkcijo zeta in postavil Riemannovo hipotezo, ki govori o legi ničel te funkcije. Riemannova hipoteza je še danes eden najslavnejših nerešenih problemov v matematiki. Praštevilski izrek sta prva dokazala Hadamard in de la Vallée Poussin leta 1896, neodvisno drug od drugega. Tudi onadva sta, tako kot Riemann, za to uporabljala metode kompleksne analize. Šele leta 1949 sta matematika Erdős in Selberg našla dokaz, ki uporablja samo elementarne metode. V delu bomo predstavili dokaz, ki ga je leta 1980 objavil Newman in kasneje modificiral Korevaar [1, poglavje 7]. Dokaz je enostavnejši od prejšnih dokazov, a se vseeno poslužuje kompleksne analize.

Dokaza se bomo lotili v dveh delih, ki ustrezata drugemu in tretjemu poglavju. V drugem bomo spoznali vso potrebno teorijo, ki jo bomo potrebovali za dokaz izreka. Spoznali bomo Riemannovo



Slika 1. Grafa funkcij π in $x \mapsto x/\ln(x)$.

funkcijo zeta, ki bo nekakšna vez med praštevili in analizo. Izpeljali bomo Eulerjevo produktno formulo, funkcijo zeta razširili na desno polravnino kompleksne ravnine, obravnavali ničle funkcije zeta in vse to uporabili pri izpeljavi logaritmičnega odvoda Riemannove funkcije zeta. Za samo obravnavo vseh teh lastnosti pa bomo najprej definirali neskončne produkte in si pogledali nekaj njihovih lastnosti. V tretjem poglavju bomo poiskali ekvivalentno obliko praštevilskega izreka in dokazali zahteven izrek kompleksne analize. Na koncu bomo vse skupaj sestavili v celoto in dokazali praštevilski izrek. Za razumevanje članka je potrebno predznanje kompleksne in realne analize pridobljeno na dodiplomskem študiju matetaike na Slovenskih fakultetah.

2. Riemannova funkcija zeta

V tem poglavju bomo spoznali Riemannovo funkcijo zeta in pogledali njene glavne lastnosti. Funkcijo, ki je sicer definirana kot številska vrsta, bomo zapisali v obliki neskončnega produkta in posplošenega integrala kompleksnih funkcij. S pomočjo teh izražav bomo obravnavali ničle te funkcije in jo meromorfno razširili na desno polravnino kompleksnih števil. S pomočjo razširitve bomo izpeljali enačbo za logaritmični odvod Riemannove funkcije zeta, ki bo imel ključno vlogo v dokazu praštevilskega izreka. Začnimo z definicijo.

Definicija 2. Funkcija $\zeta : \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\} \to \mathbb{C}$ s predpisom

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

se imenuje *Riemannova funkcija zeta.*

Ker definicija vsebuje neskončno funkcijsko vrsto, moramo preveriti, če je funkcija zeta sploh dobro definirana. To bomo storili z naslednjo trditvijo.

Trditev 2. *Vrsta, ki definira Riemanovo funkcijo zeta, konvergira absolutno na* $\mathrm{Re}(z) > 1$ *in za vsak* $\delta > 0$ *enakomerno na množici* $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geq 1 + \delta\}$.

Dokaz. Najprej dokažimo absolutno konvergenco na $\mathrm{Re}(z) > 1$. Velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^z} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{e^{z \ln n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\ln(n)\,\mathrm{Re}(z)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(z)}}.$$

Ta vrsta konvergira natanko tedaj, ko je $\mathrm{Re}(z) > 1$. Dokažimo še enakomerno konvergenco. Naj bo $\delta > 0$. Po Weistrassovem M-testu vemo, da funkcijska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ enakomerno konvergira na množici kompleksnih števil Ω, če obstaja tako realno zaporedje c_n, da velja

$$c_n \geq \sup_{x \in \Omega} |f_n(x)|$$

in vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergira. Označimo z $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1 + \delta\}$ in definirajmo $c_n = n^{-(1+\delta)}$. Dobimo

$$\sup_{x \in \Omega} \left| \frac{1}{n^z} \right| = \sup_{x \in \Omega} \left| \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(z)}} \right| = \frac{1}{n^{1+\delta}} = c_n.$$

Ker vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1+\delta}$ konvergira, je po Weistrassovem M-testu Riemannova funkcija zeta enakomerno konvergentna na množici $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geq 1 + \delta\}$. $\square$

Za nadaljnjo obravnavo Riemannove funkcije moramo najprej spoznati nekaj dodatnih pojmov in rezultatov.

2.1 Neskončni produkt in zaporedja holomorfnih funkcij

V tem podpoglavju bomo definirali neskončne produkte kompleksnih števil in kompleksnih funkcij ter razvili teorijo za obravnavo njihove konvergence. S tem orodjem bomo dobili teoretično podlago za nadaljnjo obravnavo Riemannove funkcije zeta. Glavni cilji so dokazati formulo za odvod neskončnega produkta holomorfnih funkcij, ki ga bomo potrebovali pri izpeljavi formule za logaritmični odvod funkcije zeta ter poiskati pogoj, pri katerem je limita zaporedja holomorfnih funkcij tudi sama holomorfna funkcija. Slednje bomo večkrat potrebovali, saj bomo imeli opravka z neskončnimi vsotami, produkti in izlimitiranimi integrali holomorfnih funkcij. Izpeljali bomo tudi trditev, ki obravnava ničle nekaterih neskončnih produktov funkcij. Ker bomo dokazali samo trditve, ki jih bomo kasneje potrebovali, bomo neskonče produkte obdelali zelo površno. Bralec si lahko več o njih prebere v [2, poglavje 8]. Poglejmo si najprej, kako definiramo neskončne produkte kompleksnih števil.

Definicija 3. Naj bo $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje kompleksnih števil. Neskončni formalni produkt označimo z $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + z_n)$ in imenujemo *neskončni produkt.* Pravimo, da $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + z_n)$ *konvergira* h kompleksnemu številu p, če zaporedje *delnih produktov* $p_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + z_k)$ konvergira k številu p. Neskončni produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + z_n)$ *konvergira absolutno*, če konvergira produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + |z_n|)$.

Konvergentne neskončne produkte lahko razdelimo v tri razrede. V prvem so produkti, ki konvergirajo k neničelnemu kompleksnemu številu, v drugem so produkti, ki konvergirajo k 0 in obstaja n, da je $1 + z_n = 0$, v tretjem pa so produkti, ki konvergirajo k 0 in za vsak n velja $1 + z_n \neq 0$. Primer takega produkta je neskončen produkt, za katerega faktorje velja $|1 + z_n| \leq r < 1$ za vsak $n \in N$. Preden dokažemo, da za neskončne produkte, ki konvergirajo absolutno, tretji razred ne obstaja, si poglejmo dve lemi in ponovimo dejstva o logaritmu v kompleksni ravnini.

Lema 3. *Neskončni produkt* $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + |z_n|)$ *konvergira natanko tedaj, ko konvergira neskončna številska vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

Dokaz. Denimo, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konvergira. Ker je

$$\prod_{n=1}^{k}(1 + |z_n|) \leq \prod_{n=1}^{k+1}(1 + |z_n|),$$

je zaporedje delnih produktov naraščajoče. Treba je pokazati, da je omejeno. Ker iz znane neenakosti $1+|a| \leq e^{|a|}$ sledi $\ln(1+|a|) \leq |a|$, velja

$$\ln\left(\prod_{n=1}^{k}(1+|z_n|)\right) = \sum_{n=1}^{k}\ln(1+|z_n|) \leq \sum_{n=1}^{k}|z_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|z_n|.$$

Torej je zaporedje delnih produktov omejeno in zato konvergentno. Za dokaz v drugo smer predpostavimo, da delni produkti konvergirajo. Za vse, razen končno mnogo n, velja $|z_n| < 1$, saj bi se drugače produkt podvojil neskončno mnogokrat in bi zato divergiral. Denimo torej, da za vsak $n \geq N$ velja $|z_n| < 1$. Elementaren račun pokaže, da za $n \geq N$ velja ocena $|z_n| \leq 2\ln(1+|z_n|)$ in posledično

$$\sum_{n=N}^{m}|z_n| \leq \sum_{n=N}^{m}2\ln(1+|z_n|) \leq 2\ln\left(\prod_{n=N}^{m}(1+|z_n|)\right).$$

Ker je, ko gre m proti neskončno, desna stran neenačbe omejena, je zaporedje delnih vsot $\sum_{n=1}^{m}|z_n|$ konvergentno, kar smo želeli pokazati. □

Na tem mestu bomo ponovili definicijo funkcije logaritem v kompleksni ravnini in pojasnili oznake, ki jih bomo uporabljali. Kompleksni logaritem je definiran kot inverz kompleksne eksponentne funkcije na prerezani ravnini, to je ravnina brez enega poltraka z začetkom v koordinatnem izhodišču. Zanj velja

$$\log_{\mathbb{C}}(z) = \ln|z| + i\arg(z),$$

kjer je $\arg(z)$ argument kompleksnega števila z in leži na ustreznem intervalu dolžine 2π. Če ga definiramo na standardni prerezani ravnini $z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$, spremenimo oznake, in sicer $\log_{\mathbb{C}}(z)$ zamenjamo z $\mathrm{Log}_{\mathbb{C}}(z)$, $\arg(z)$ pa z $\mathrm{Arg}(z)$. V tem primeru je $\mathrm{Arg}(z) \in (-\pi,\pi)$. Ker je kompleksni logaritem na standardni prerezani ravnini holomorfna funkcija in se na pozitivnih realnih številih ujema z običajnim logaritmom ln, po principu identičnosti za $|z|<1$ velja

$$\mathrm{Log}_{\mathbb{C}}(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}.$$

Naslednja lema bo razkrila povezavo med neskončnimi produkti in neskončnimi vsotami kompleksnih števil. Z njeno pomočjo bomo v naslednji trditvi obravnavali ničle absolutno konvergentnih produktov.

Lema 4. *Če neskončni produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ konvergira absolutno, potem konvergira. Velja še več, če je pri tem $\mathrm{Re}(z_n) > -1$ za vsak n, potem je*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Log}_{\mathbb{C}}(1+z_n)\right)$$

in neskončna vrsta na desni konvergira absolutno.

Dokaz. Po lemi 3 vemo, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ konvergira. Posledično členi $|z_n|$ konvergirajo proti 0, ko gre n proti neskončno. Zato lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da je $\mathrm{Re}(z_n) > -1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Torej $\arg(1+z_n)$ zavzame vrednosti z intervala $(-\pi/2, \pi/2)$ in je posledično $\mathrm{Log}_{\mathbb{C}}(1+z_n)$ dobro definiran. Dokazali bomo, da je zaporedje $\sum_{n=1}^{k}|\mathrm{Log}_{\mathbb{C}}(1+z_n)|$ Cauchyjevo in zato konvergentno. Naj bo $N \in \mathbb{N}$. Naj bosta $m,k > N$ taka, da je $m > k$. Izračunamo

$$\left|\sum_{n=1}^{m}|\mathrm{Log}_{\mathbb{C}}(1+z_n)| - \sum_{n=1}^{k}|\mathrm{Log}_{\mathbb{C}}(1+z_n)|\right| = \sum_{n=k+1}^{m}|\mathrm{Log}_{\mathbb{C}}(1+z_n)|.$$

Ker členi $|z_n|$ konvergirajo proti 0, lahko predpostavimo, da je N tako velik, da je $|z_n| < 1/2$ za vsak $n > N$. Upoštevajoč potenčno vrsto za kompleksni logaritem, za kompleksna števila $|z| < 1/2$ velja ocena

$$\begin{aligned}
|\mathrm{Log}_{\mathbb{C}}(1+z)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n}\right| \\
&= |z|\left(1 + \frac{|z|}{2} + \frac{|z|^2}{3} + \dots\right) \\
&\leq |z|\left(1 + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots\right) \\
&< 2|z|.
\end{aligned}$$

Torej je $\sum_{n=k+1}^{m} |\mathrm{Log}_{\mathbb{C}}(1+z_n)| < 2\sum_{n=k+1}^{m} |z_n|$. Ker je zaporedje $\sum_{n=1}^{k} |z_n|$ Cauchyjevo, je Cauchyjevo tudi zaporedje $\sum_{n=1}^{k} |\mathrm{Log}_{\mathbb{C}}(1+z_n)|$ in posledično številska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Log}_{\mathbb{C}}(1+z_n)$ konvergira absolutno. Izračunajmo eksponent delne vsote

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{k} \mathrm{Log}_{\mathbb{C}}(1+z_n)\right) = \exp\left(\log_{\mathbb{C}}\left(\prod_{n=1}^{k}(1+z_n)\right)\right) = \prod_{n=1}^{k}(1+z_n). \tag{1}$$

Ker je kompleksna eksponentna funkcija zvezna, neskončni produkt konvergira in velja

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Log}_{\mathbb{C}}(1+z_n)\right).$$

□

Opomba 1. V dokazu prejšnje leme smo v enakosti (1) funkcijo $\mathrm{Log}_{\mathbb{C}}$ zamenjali z logaritmom $\log_{\mathbb{C}}$, definiran na neki drugi prerezani ravnini. V splošnem ne velja $\sum_{n=1}^{k} \mathrm{Log}_{\mathbb{C}}(z_n) = \mathrm{Log}_{\mathbb{C}}(\prod_{n=1}^{k} z_n)$, velja pa $\sum_{n=1}^{k} \mathrm{Log}_{\mathbb{C}}(z_n) = \log_{\mathbb{C}}(\prod_{n=1}^{k} z_n)$. Razlog za to je, da se lahko argumenti seštejejo v nekaj, kar ni v intervalu $(-\pi, \pi)$, vemo pa, da se bo od vrednosti, ki bi jo zavzel Arg, razlikoval za večkratnik števila 2π. Ponazorimo razmislek na konkretnem primeru. Število $\mathrm{Log}_{\mathbb{C}}(i)$ je dobro definirano, saj je $i \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$. Ker je zmnožek $i \cdot i = -1$ element intervala $(-\infty, 0]$ njegov logaritem na standardni prerezani ravnini ni definiran. Torej ne velja formula $\mathrm{Log}_{\mathbb{C}}(i) + \mathrm{Log}_{\mathbb{C}}(i) = \mathrm{Log}_{\mathbb{C}}(i \cdot i)$. Velja pa $\mathrm{Log}_{\mathbb{C}}(i) + \mathrm{Log}_{\mathbb{C}}(i) = \log_{\mathbb{C}}(i \cdot i)$, za logaritem definiran na kateri koli drugi prerezani ravnini.

Naslednja trditev bo ključna za kasnejšo obravnavo ničel Riemannove funkcije zeta.

Trditev 5. *Denimo, da neskončni produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ konvergira absolutno k številu 0, potem obstaja tak n, da je $1 + z_n = 0$.*

Dokaz. Podobno kot v dokazu prejšnje trditve sklepamo, da ker neskončni produkt konvergira absolutno, po lemi 3 konvergira številska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ in gredo torej členi $|z_n|$ proti 0, ko gre n proti neskončno. Posledično obstaja $N \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \geq N$ velja $\mathrm{Re}(z_n) > -1$. Po lemi 4 velja

$$\prod_{n=N}^{\infty}(1+z_n) = \exp\left(\sum_{n=N}^{\infty} \mathrm{Log}_{\mathbb{C}}(1+z_n)\right) \neq 0,$$

saj kompleksna eksponentna funkcija nima ničel. Torej je $\prod_{n=1}^{N-1}(1+z_n) = 0$, kar pomeni, da obstaja $n < N$, da je $z_n = -1$. □

Eden od ekvivalentnih zapisov funkcije zeta je v obliki neskončnega produkta holomorfnih funkcij. Zato si želimo definirati tudi konvergenco neskončnega produkta funkcij. Kot pri neskončnih vsotah tudi pri produktih poznamo več vrst konvergenc poglejmo si njihove definicije.

Definicija 4. Naj bo $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje funkcij, definiranih na odprti podmnožici $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Pravimo, da produkt $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ *konvergira po točkah* k funkciji F, če zaporedje delnih produktov $F_n = \prod_{k=1}^{n} f_k$ konvergira po točkah k funkciji F. Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ *konvergira enakomerno po kompaktnih podmnožicah* Ω k funkciji F, če $F_n = \prod_{k=1}^{n} f_k$ konvergira enakomerno po kompaktnih podmnožicah Ω k funkciji F.

Naslednjo trditev bomo v članku večkrat uporabili. Neprestano bomo imeli opravka z neskončnimi vsotami, neskončnimi produkti in izlimitiranimi integrali. Definicije za konvergenco teh objektov poznamo, pogosto pa nas bo zanimala še holomorfnost. To bomo preverjali z naslednjo trditvijo. Trditev je standardni rezultat kompleksne analize, zato jo ne bomo dokazovali. Bralec lahko njen dokaz najde v [2, izrek 3.4.5].

Trditev 6. *Naj zaporedje holomorfnih funkcij $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definiranih na območju $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, konvergira enakomerno po kompaktih k limitni funkciji F. Potem je tudi funkcija F holomorfna na množici Ω. Velja še več, tudi funkcijsko zaporedje $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira enakomerno po kompaktih k limitni funkciji F'.*

Pri izračunu formule za logaritmični odvod Riemannove funkcije zeta, bomo morali odvajati neskončni produkt. Potrebovali bomo zvezo iz spodnje trditve.

Trditev 7. *Naj zaporedje holomorfnih funkcij $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definiranih na območju $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, konvergira enakomerno po kompaktih k limitni funkciji F, ki na Ω nima ničel. Potem je F holomorfna in zanjo velja*

$$F'(z) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j'(z) \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{\infty} f_i(z).$$

Dokaz. S p_n označimo n-ti delni produkt funkcije F. Torej je

$$p_n'(z) = \sum_{j=1}^{n} f_j'(z) \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} f_i(z)$$

Ker $F(z) \neq 0$ za noben $z \in \Omega$, sledi $f_n(z) \neq 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in vsak $z \in \Omega$. Torej lahko $p_n'(z)$ delimo z delnim produktom $p_n(z)$ in dobimo

$$\frac{p_n'(z)}{p_n(z)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} f_j'(z) \prod_{i\neq j}^{n} f_i(z)}{\prod_{i=1}^{n} f_i(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{f_j'(z)}{f_j(z)}.$$

Po trditvi 6 je F holomorfna in zaporedje $\{p_n'\}$ konvergira k F' enakomerno po kompaktih. Naj bo K kompaktna podmnožica območja Ω. Tedaj obstaja $m > 0$, da je $|F(z)| > m > 0$. Posledično zaporedje $\frac{p_n'(z)}{p_n(z)}$ na množici K enakomerno konvergira k limitni funkciji $F'(z)/F(z)$. Ker je bil kompakt K poljuben, zaporedje $\frac{p_n'(z)}{p_n(z)}$ konvergira k funkciji $F'(z)/F(z)$ enakomerno po kompaktih. Torej velja

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j'(z)}{f_j(z)}.$$

Če vrsto pomnožimo z $F(z)$, dobimo

$$F'(z) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j'(z) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} f_i(z),$$

kar smo želeli pokazati. □

2.2 Eulerjev produkt Riemannove funkcije zeta

V prejšnjem podpoglavju smo razvili orodje za obravnavo neskončnih produktov in njihove holomorfnosti, v tem pa bomo Riemannovo funkcijo zeta v ekvivalentni obliki zapisali kot neskončni produkt holomorfnih funkcij, v katerem se prvič pojavljajo praštevila. Iz tega zapisa bo razvidna povezava med teorijo števil in funkcijo zeta, služil pa nam bo tudi pri obravnani ničel in kasneje za izračun logaritmičnega odvoda Riemannove funkcije zeta. Iz Eulerjevega produkta bo tudi zelo hitro sledila holomorfnost funkcije zeta.

Trditev 8 (Eulerjeva produktna formula). *Naj bo* $\{p_i\}_{i=1}$ *zaporedje praštevil. Za Riemannovo funkcijo zeta na definicijskem območju* $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$ *velja*

$$\zeta(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - p_j^{-z}} \right).$$

Produkt konvergira absolutno in enakomerno po kompaktnih podmnožicah kompleksnih števil, za katere je $\mathrm{Re}(z) > 1$*.*

Opomba 2. Zgornji enakosti pravimo *Eulerjeva produktna formula.*

Dokaz. Ker je $\mathrm{Re}(z) > 1$ velja ocena $\left| \frac{1}{p_j^z} \right| < 1$ in po formuli za vsoto geometrijske vrste sledi

$$\frac{1}{1 - p_j^{-z}} = 1 + \frac{1}{p_j^z} + \frac{1}{p_j^{2z}} + \cdots .$$

Na območju $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$ je zgornja geometrijska vrsta absolutno konvergentna, saj je

$$1 + \left| \frac{1}{p_j^z} \right| + \left| \frac{1}{p_j^{2z}} \right| + \cdots \leq 1 + \frac{1}{p_j} + \frac{1}{p_j^2} + \cdots = \frac{1}{1 - p_j^{-1}}.$$

S $p_m(z)$ označimo delni produkt

$$p_m(z) = \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{1 - p_j^{-z}} = \prod_{j=1}^{m} \left(1 + \frac{1}{p_j^z} + \frac{1}{p_j^{2z}} + \cdots \right).$$

Ker je to končen produkt in so vse vrste absolutno konvergentne, zamenjamo vrstni red členov. Dobimo

$$p_m(z) = \prod_{j=1}^{m} \left(1 + \frac{1}{p_j^z} + \frac{1}{p_j^{2z}} + \cdots \right) = \sum_{n \in P_m} \frac{1}{n^z},$$

kjer P_m označuje množico z elementom 1 in pozitivnimi naravnimi števili, katerih praštevilski razcep sestavlja le prvih m praštevil. Za vsak delni produkt p_m velja

$$|p_m(z)| \leq \sum_{n \in P_m} \left| \frac{1}{n^z} \right| < \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^z} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(z)}}.$$

Ker je zaporedje $\{|p_m(z)|\}_{m=1}$ za fiksen $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$ naraščajoče in navzgor omejeno, zaporedje delnih produktov konvergira po točkah k funkciji ζ. Dokažimo absolutno konvergenco. Ker je

$$\prod_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-p_j^{-z}}\right) = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{p_j^{-z}}{1-p_j^{-z}}\right),$$

je po lemi 3 dovolj pokazati, da konvergira vrsta

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{p_j^{-z}}{1-p_j^{-z}}\right| &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_j^{\mathrm{Re}(z)}}\left|1+\frac{1}{p_j^{z}}+\frac{1}{p_j^{2z}}+\dots\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_j^{\mathrm{Re}(z)}}\left(1+\left|\frac{1}{p_j^{z}}\right|+\left|\frac{1}{p_j^{2z}}\right|+\dots\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p_j^{\mathrm{Re}(z)}}+\frac{1}{p_j^{2\,\mathrm{Re}(z)}}+\frac{1}{p_j^{3\,\mathrm{Re}(z)}}+\dots\right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\mathrm{Re}(z)}}.
\end{aligned}$$

Torej je Eulerjev produkt res absolutno konvergenten. Za dokaz enakomerne konvergence mora za vsako kompaktno podmnožico K množice $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$ in vsak $\epsilon > 0$ obstajati $N \in \mathbb{N}$, da velja

$$|p_m(z) - \zeta(z)| < \epsilon,$$

za vsak $z \in K$, čim je $m > N$. Označimo s t_m najmanjše praštevilo, ki ni v P_m. Fiksirajmo ϵ in K. Ker je K kompaktna, obstaja minimum $s = \min\{|z|, z \in K\}$, ki je večji od 1. Poglejmo absolutno vrednost razlike

$$|p_m(z) - \zeta(z)| = \left|\sum_{n\in P_m}\frac{1}{n^z} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}\right| = \sum_{n\notin P_m}\left|\frac{1}{n^z}\right| < \sum_{n=t_m}^{\infty}\left|\frac{1}{n^s}\right| < \epsilon.$$

Zadnja neenakost velja zaradi konvergence vrste $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$. Ker so praštevila poljubno velika, obstaja tak N, da neenakost velja za vsak $n > N$ in vsak $z \in K$. □

Posledica 9. *Riemannova funkcija zeta ζ je na območju $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$ holomorfna.*

Dokaz. V dokazu prejšnje trditve smo pokazali, da je ζ limitna funkcija zaporedja delnih produktov $p_m(z) = \prod_{j=1}^{m}\frac{1}{1-p_j^{-z}}$. Ker je konvergenca enakomerna po kompaktnih podmnožicah množice $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$ in so za vsak $m \in \mathbb{N}$ funkcije p_m holomorfne, je po trditvi 6 holomorfna tudi funkcija ζ. □

2.3 Meromorfna razširitev Riemannove funkcije zeta

V tem podpoglavju bomo funkcijo zeta meromorfno razširili na večjo domeno. Za dokaz praštevilskega izreka bomo potrebovali posebno funkcijo, ki bo definirana na okolici območja $\mathrm{Re}(z) \geq 1$. Ta posebna funkcija zeta bo ravno logaritmični odvod Riemannove funkcije, zato moramo definicijsko območje te najprej malo razširiti. Poglejmo si, kaj pomeni razširitev domene neke funkcije.

Definicija 5. Naj bo $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija na odprti množici Ω. Funkciji $F : \Psi \to \mathbb{C}$ pravimo *holomorfna razširitev funkcije f*, če je F holomorfna, je $\Omega \subseteq \Psi$ in za vsak $z \in \Omega$ velja $f(z) = F(z)$.

Definicija 6. Naj bo $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ meromofna funkcija na odprti množici Ω. Funkciji $F : \Psi \to \mathbb{C}$ pravimo *meromorfna razširitev funkcije f*, če je F meromorfna, je $\Omega \subseteq \Psi$ in za vsak $z \in \Omega$ velja $f(z) = F(z)$.

Dokažimo, da Riemannovo funkcijo zeta res lahko meromorfno razširimo na večjo domeno.

Trditev 10. *Riemanova funkcija zeta ima meromorfno razširitev na množico* $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ *z edinim polom v* $z = 1$*. Pol ima stopnjo 1.*

Dokaz. Dokazali bomo, da ima funkcija $z \mapsto \zeta(z) - \frac{1}{z-1}$ holomorfno razširitev F na odprto množico $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Torej je $Z(z) = F(z) + \frac{1}{z-1}$ meromorfna funkcija definirana na množici $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ s polom stopnje 1 v točki $z = 1$, ki se na množici $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$ ujema s funkcijo ζ. Posledično je Z iskana meromorfna razširitev Riemannove funkcije zeta. Glavna ideja dokaza je, da predpis $\zeta(z) - \frac{1}{z-1}$ preoblikujemo, dokler ni enak neki funkciji, ki je meromorfna na željeni množici. Za $\mathrm{Re}(z) > 1$ velja

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{k-1} n\left(\frac{1}{(n+1)^z} - \frac{1}{n^z}\right) &= \sum_{n=2}^{k} \frac{n-1}{n^z} - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n^{z-1}} \\ &= \sum_{n=2}^{k} \left(\frac{1}{n^{z-1}} - \frac{1}{n^z}\right) - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n^{z-1}} \\ &= -1 + \frac{1}{k^{z-1}} - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{(n+1)^z},\end{aligned}$$

od koder sledi enakost

$$1 + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{(n+1)^z} = \frac{1}{k^{z-1}} - \sum_{n=1}^{k-1} n\left(\frac{1}{(n+1)^z} - \frac{1}{n^z}\right). \tag{2}$$

Velja

$$\begin{aligned}n\left(\frac{1}{(n+1)^z} - \frac{1}{n^z}\right) &= n\left(\frac{1}{t^z}\right)\Bigg|_{t=n}^{n+1} \\ &= -nz \int_n^{n+1} t^{-z-1}\, dt \\ &= -z \int_n^{n+1} \lfloor t \rfloor t^{-z-1}\, dt,\end{aligned} \tag{3}$$

kjer je $\lfloor t \rfloor$ funkcija celi del števila t. Zadnja enakost drži, saj je $t \in [n, n+1]$ in posledično $\lfloor t \rfloor = n$ v vseh razen v eni točki. Če enačbo (3) vstavimo v enačbo (2), dobimo

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^z} &= 1 + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{(n+1)^z} \\ &= \frac{1}{k^{z-1}} + z \sum_{n=1}^{k-1} \int_n^{n+1} \lfloor t \rfloor t^{-z-1}\, dt \\ &= \frac{1}{k^{z-1}} + z \int_1^{k} \lfloor t \rfloor t^{-z-1}\, dt.\end{aligned}$$

V limiti, ko gre $k \to \infty$, leva stran obstaja in je enaka funkciji ζ, zato konvergira tudi posplošeni integral. Od tod sledi zveza

$$\zeta(z) = z \int_1^{\infty} \lfloor t \rfloor t^{-z-1}\, dt \tag{4}$$

za poljuben $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$. Na množici $\mathrm{Re}(z) > 1$ izračunamo integral

$$z \int_1^\infty t \cdot t^{-z-1}\, dt = z \int_1^\infty t^{-z}\, dt = z \frac{t^{-z+1}}{1-z}\Big|_{t=1}^\infty = 1 + \frac{1}{z-1}. \tag{5}$$

Če od enačbe (4) odštejemo enačbo (5), dobimo

$$\zeta(z) - \frac{1}{z-1} = 1 + z \int_1^\infty \lfloor t \rfloor t^{-z-1}\, dt - z \int_1^\infty t t^{-z-1}\, dt = 1 + z \int_1^\infty (\lfloor t \rfloor - t) t^{-z-1}\, dt.$$

Na množici $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ definiramo funkcijo $f(z) = \int_1^\infty (\lfloor t \rfloor - t) t^{-z-1}\, dt$. Dokazati želimo, da je na tej množici dobro definirana in holomorfna. Dobra definiranost sledi iz ocene

$$|f(z)| \leq \int_1^\infty |(\lfloor t \rfloor - t)| \left| t^{-z-1} \right| dt \leq \int_1^\infty 1 \cdot t^{-\mathrm{Re}(z+1)}\, dt = \frac{1}{\mathrm{Re}(z)}.$$

Za dokaz holomorfnosti definirajmo pomožne funkcije $f_k(z) = \int_1^k (\lfloor t \rfloor - t) t^{-z-1}\, dt$. Z uporabo Morerovega izreka bomo dokazali, da so funkcije f_k na množici $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ holomorfne. Ker je funkcija $z \mapsto (\lfloor t \rfloor - t) t^{-z-1}$ zvezna in holomorfna in je zvezna tudi funkcija f_k in za poljuben zaprt trikotnik $T \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ po Cauchyjevem izreku velja $\int_{\partial T} (\lfloor t \rfloor - t) t^{-z-1}\, dz = 0$. Dokazati želimo, da je $\int_{\partial T} f_k(z)\, dz = 0$. Poglejmo

$$\begin{aligned}
\int_{\partial T} f_k(z)\, dz &= \int_{\partial T} \int_1^k (\lfloor t \rfloor - t) t^{-z-1}\, dt\, dz \\
&= \int_1^k \int_{\partial T} (\lfloor t \rfloor - t) t^{-z-1}\, dz\, dt \\
&= \int_1^k 0\, dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Integrala lahko zamenjamo po Fubinijevem izreku, ki ga uporabimo po parametrizaciji trikotnika ∂T. Po Morerovem izreku je za vsak $k \in \mathbb{N}$ funkcija f_k holomorfna. Po trditvi 6 je f holomorfna, če zaporedje holomorfnih funkcij f_n k njej konvergira enakomerno po kompaktnih podmnožicah množice $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Naj bo $K \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ kompaktna množica in $\epsilon > 0$. Z m označimo minimum $m = \min\{\mathrm{Re}(z) \mid z \in K\}$. Zaradi kompaktnosti množice K vemo, da obstaja in da je pozitiven. Poglejmo si razliko

$$\begin{aligned}
\max_{z \in K} |f(z) - f_k(z)| &\leq \max_{z \in K} \int_k^\infty |(\lfloor t \rfloor - t) t^{-z-1}|\, dt \\
&\leq \max_{z \in K} \int_k^\infty t^{-1-\mathrm{Re}(z)}\, dt \\
&= \max_{z \in K} \frac{t^{-\mathrm{Re}(z)}}{\mathrm{Re}(z)}\Big|_{t=\infty}^k \\
&\leq \frac{1}{m k^m} \\
&< \epsilon,
\end{aligned}$$

če je k dovolj velik. Ko gre k proti neskončno, gre torej za vsak $z \in K$ absolutna razlika $|f(z) - f_k(z)|$ proti nič. Posledično je konvergenca enakomerna na kompaktih in je zato f holomorfna funkcija na $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Tedaj je na območju $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ holomorfna tudi funkcija

$$F(z) = 1 + z f(z) = 1 + z \int_1^\infty (\lfloor t \rfloor - t) t^{-z-1}\, dt,$$

ki pa je na $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$ enaka funkciji $z \mapsto \zeta(z) - \frac{1}{z-1}$ in je zato holomorfna razširitev, ki smo jo iskali. Meromorfno razširitev funkcije ζ na $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ dobimo z $Z(z) = F(z) + \frac{1}{z-1}$.
□

Opomba 3. Funkcijo Z bomo v nadaljevanju označevali z ζ, za katero bomo privzeli, da je definirana in meromorfna na množici $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

2.4 Obravnava ničel Riemannove funkcije zeta

V tem podpoglavju bomo dokazali, da Riemannova funkcija zeta nima ničel na okolici množice $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geq 1\}$. To bomo potrebovali za dobro definiranost logaritmičnega odvoda ζ'/ζ funkcije zeta. Trditev bomo dokazali v dveh delih. Na območju $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$ je dokaz enostaven, na okolici premice $\mathrm{Re}(z) = 1$ pa ni očiten in zahteva nekaj iznajdljivosti.

Lema 11. *Riemannova funkcija zeta nima ničel na množici* $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$.

Dokaz. V trditvi 8 smo dokazali, da lahko funkcijo ζ na množici $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$ zapišemo kot neskončen produkt. Ker ta konvergira absolutno, po trditvi 5 vemo, da je $\zeta(z) = 0$ natanko tedaj, ko obstaja $n \in \mathbb{N}$, da je $\frac{1}{1-p_n^z} = 0$, kar pa ni možno. Torej na množici $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$ Riemannova funkcija zeta nima ničel. □

Trditev 12. *Obstaja okolica množice* $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geq 1\}$*, kjer Riemannova funkcija zeta nima ničel.*

Dokaz. Po lemi 11 vemo, da Riemannova funkcija zeta nima ničel na odprti množici $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$. Torej moramo dokazati le, da nima ničel na premici $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = 1\}$, saj bo zaradi zveznosti sledilo, da ničel nima tudi na neki okolici te množice. Dokaz je težko motivirati, a kljub temu ni pretežak za razumevanje. Vemo, da ima funkcija zeta v $z = 1$ pol, kar pomeni, da v okolici $z = 1$ zavzame poljubno velike vrednosti. Fiksirajmo realno število $y \neq 0$ in za realna števila $x > 1$ poglejmo funkcijo

$$h(x) = \zeta^3(x)\zeta^4(x + iy)\zeta(x + i2y).$$

Ker na polravnini $\mathrm{Re}(z) > 1$ funkcija zeta nima ničel, je logaritem funkcije $|\zeta(z)|$ tam dobro definiran.

$$\begin{aligned}
\ln|\zeta(z)| &= \ln\left|\prod_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-p_j^{-z}}\right)\right| = \ln\left(\lim_{k\to\infty}\prod_{j=1}^{k}\left|\frac{1}{1-p_j^{-z}}\right|\right) = \lim_{k\to\infty}\ln\left(\prod_{j=1}^{k}\left|\frac{1}{1-p_j^{-z}}\right|\right) \\
&= -\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k}\ln|1-p_j^{-z}| = -\sum_{j=1}^{\infty}\ln|1-p_j^{-z}| = -\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left(\mathrm{Log}_{\mathbb{C}}(1-p_j^{-z})\right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_j^{-nz}}{n}\right)
\end{aligned}$$

Upoštevali smo, da je $\mathrm{Re}(z) > 1$ in zato $|p_j^{-z}| < 1$. To pomeni, da kompleksni logaritem $\mathrm{Log}_{\mathbb{C}}(1-p_j^{-z})$ obstaja in ga lahko razvijemo v potenčno vrsto, kot smo to storili, ko smo vpeljali logaritem, v enačbi

(**??**). Upoštevajoč zgornji rezultat dobimo

$$\begin{aligned}
\ln|h(x)| &= 3\ln|\zeta(x)| + 4\ln|\zeta(x+iy)| + \ln|\zeta(x+i2y)| \\
&= 3\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_j^{-nx}}{n}\right) + 4\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_j^{-nx-iny}}{n}\right) + \sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_j^{-nx-i2ny}}{n}\right) \\
&= 3\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left(\frac{p_j^{-nx}}{n}\right) + 4\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left(\frac{p_j^{-nx-iny}}{n}\right) + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left(\frac{p_j^{-nx-i2ny}}{n}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_j^{-nx}}{n}\,\mathrm{Re}(3+4p_j^{-iny}+p_j^{-i2ny}).
\end{aligned}$$

Za poljuben $a \in \mathbb{R}$ velja enakost

$$p_j^{ia} = e^{ia\ln p_j} = \cos(a\ln p_j) + i\sin(a\ln p_j).$$

Če s θ označimo $\theta = -ny\ln p_j$, dobimo

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(3+4p_j^{-iny}+p_j^{-i2ny}) &= 3 + 4\cos(-ny\ln p_j) + \cos(-2ny\ln p_j) \\
&= 3 + 4\cos(\theta) + \cos(2\theta) \\
&= 3 + 4\cos(\theta) + 2\cos^2(\theta) - 1 \\
&= 2(1+\cos(\theta))^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Torej je $\ln|h(x)| \geq 0$, od koder, ker je naravni logaritem naraščajoča funkcija, sledi

$$|h(x)| = |\zeta^3(x)||\zeta^4(x+iy)||\zeta(x+i2y)| \geq 1.$$

Ker je $x > 1$, lahko zgornjo neenakost delimo z izrazom $x-1$. Dobimo

$$\frac{|h(x)|}{x-1} = |(x-1)\zeta(x)|^3\left|\frac{\zeta(x+iy)}{x-1}\right|^4|\zeta(x+i2y)| \geq \frac{1}{x-1}. \tag{6}$$

Ker je edini pol meromorfne razširitve funkcije zeta na $\mathrm{Re}(z) > 0$ v $z = 1$ in je ta pol stopnje 1, za $y \neq 0$ limiti

$$\lim_{x\searrow 1}|(x-1)\zeta(x)|^3 \quad \text{in} \quad \lim_{x\searrow 1}|\zeta(x+i2y)|$$

obstajata in sta končni. Denimo, da je $\zeta(1+iy) = 0$. Ker je funkcija zeta holomorfna na množici $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0,\ z \neq 1\}$, za $y \neq 0$ obstaja odvod $\zeta'(1+iy)$. Posledično obstaja limita

$$\lim_{x\searrow 1}\left|\frac{\zeta(x+iy)}{x-1}\right|^4 = \lim_{x\searrow 1}\left|\frac{\zeta(x+iy)-\zeta(1+iy)}{x-1}\right|^4 = |\zeta'(1+iy)|^4.$$

Torej je limita, ko se x od zgoraj približuje 1, na levi strani neenakosti (6) končna, na desni pa neskončna. Prispeli smo do protislovja, zato je predpostavka $\zeta(1+iy) = 0$ napačna. Ker je y poljubno neničelno število, je s tem trditev dokazana.

2.5 Logaritmični odvod Riemannove funkcije zeta

V zadnjem podpoglavju, ki obravnava lastnosti Riemannove funkcije zeta, bomo definirali njen logaritmični odvod. Ta funkcija bo ključna povezava med praštevili in metodami kompleksne analize, ki nam bodo služile pri dokazu praštevilskega izreka. Najprej bomo spoznali Mangoldtovo funkcijo in funkcijo psi, ki se presenetljivo pojavljata tako v logaritmičnem odvodu funkcije zeta, kot tudi v ekvivalentni obliki praštevilskega izreka, ki jo bomo spoznali v naslednjem poglavju.

Definicija 7. *Mangoldtova funkcija* $\Lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je funkcija, definirana s predpisom

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln(p) & \text{če je } n = p^m, \text{ kjer je } p \text{ praštevilo in } m \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Definicija 8. *Funkcija psi* $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkcija, definirana s predpisom

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n).$$

Zgled 1. Izračunajmo $\psi(10,2)$. Med prvimi desetimi naravnimi števili so števila $2, 3, 4, 5, 8$ in 9 potence praštevil. Torej je

$$\psi(10,2) = \ln(3) + \ln(2) + \ln(7) + \ln(5) + \ln(2) + \ln(3) + \ln(2) = 3\ln(2) + 2\ln(3) + \ln(5) + \ln(7).$$

Bolj pogosto bomo za zapis funkcije psi uporabljali naslednjo obliko.

Trditev 13. *Ekvivalenten zapis funkcije* ψ *je*

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln p} \right\rfloor \ln p,$$

kjer vsota teče po vseh praštevilih p *manjših ali enakih* x.

Dokaz. Dokažimo, da je ψ oblike

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} m_p(x) \ln p,$$

kjer je $m_p(x)$ največje naravno število, da je $p^{m_p(x)} \leq x$. To je očitno, saj se v vsoti $\sum_{n \leq x} \Lambda(n)$ logaritem $\ln p$ pojavi za vsak m, ko je $p^m \leq x$. To pa je ravno $m_p(x)$-krat. Ker je naravni logaritem naraščajoča funkcija in je $\ln p > 0$, velja

$$p^{m_p(x)} \leq x \iff m_p(x) \ln p \leq \ln x \iff m_p(x) \leq \frac{\ln x}{\ln p}.$$

Ker pa je $m_p(x)$ največje naravno število, da je $p^{m_p(x)} \leq x$, velja $m_p(x) = \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln p} \right\rfloor$, kar smo želeli pokazati. $\square$

Glavni rezultat tega poglavja je naslednja trditev. Za njen dokaz bomo potrebovali vse lastnosti Riemannove funkcije zeta, ki smo jih spoznali.

Trditev 14. *Obstaja neka okolica množice* $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geq 1\}$*, na kateri je logaritmični odvod Riemannove funkcije zeta* ζ'/ζ *meromorfna funkcija z edinim polom v točki* $z = 1$*, katerega stopnja je enaka 1, ostanek pa* $\mathrm{Res}(\zeta'(z)/\zeta(z), 1) = -1$. *Na množici* $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$ *je funkcija podana s predpisom*

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -z \int_1^\infty \psi(t) t^{-z-1}\, dt.$$

Dokaz. Po trditvi 12 obstaja okolica Ω množice $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geq 1\}$, kjer funkcija zeta nima ničel, po trditvi 10 pa je tam tudi meromorfna. Ker meromorfne funkcije sestavljajo polje, je tudi funkcija ζ'/ζ na Ω dobro definirana in meromorfna. Naj bo α element Ω. Potem obstajata $m \in \mathbb{Z}$ in holomorfna funkcija g, definirana v okolici točke α, ki nima ničel, da v tej okolici velja $\zeta(z) = (z - \alpha)^m g(z)$. Tedaj je $\zeta'(z) = m(z - \alpha)^{m-1} g(z) + (z - \alpha)^m g'(z)$ in zato

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \frac{m}{z - \alpha} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Ker je $g'(z)/g(z)$ holomorfna na okolici točke α in ker je funkcija zeta brez ničel na množici Ω ter ima edini pol stopnje 1 v točki $z=1$, je logaritmični odvod ζ'/ζ holomorfna funkcija na množici Ω, razen v točki $z=1$, kjer ima pol stopnje 1 z ostankom $\mathrm{Res}(\zeta'(z)/\zeta(z),1)=-1$. Dokažimo, da jo lahko zapišemo v zgornji integralni obliki. Po trditvi 8 na množici $\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(z)>1\}$, velja Eulerjeva produktna formula $\zeta(z)=\prod_p(1-p^{-z})^{-1}$. Produkt konvergira enakomerno po kompaktnih podmnožicah množice $\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(z)>1\}$ in nima ničel. Ko odvajamo neskončni produkt po formuli iz trditve 7, dobimo

$$\begin{aligned}\zeta'(z)&=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-p_i^{-z}}\right)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\infty}\frac{1}{1-p_j^{-z}}\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{-p_i^{-z}\ln p_i}{(1-p_i^{-z})^2}\left(\zeta(z)(1-p_i^{-z})\right)\\&=\zeta(z)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{-p_i^{-z}\ln p_i}{1-p_i^{-z}}.\end{aligned}$$

Če zgornjo enakost delimo s funkcijo $\zeta(z)$ in zatem upoštevamo, da je $|p_i^{-z}|<1$, dobimo

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{p_i^{-z}\ln p_i}{1-p_i^{-z}}=\sum_{i=1}^{\infty}\left((p_i^{-z}\ln p_i)\sum_{j=0}^{\infty}p_i^{-jz}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_i^{-jz}\ln p_i. \tag{7}$$

Za dvakratne vrste velja trditev [**?**, izrek 9.3]: Naj bo $S=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}$ dvakratna vrsta in $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ bijekcija. Če konvergira številska vrsta $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|$, potem konvergira tudi vrsta $S_\varphi=\sum_{n=1}^{\infty}a_{\varphi_1(n)\varphi_2(n)}$ in velja $S=S_\varphi$. V našem primeru na množici $\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(z)>1\}$ vrsta

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|p_i^{-jz}\ln p_i|=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_i^{-j\,\mathrm{Re}(z)}\ln p_i\overset{(7)}{=}-\frac{\zeta'(\mathrm{Re}(z))}{\zeta(\mathrm{Re}(z))}$$

konvergira, zato po zgornji trditvi velja

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_i^{-jz}\ln p_i=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(p_i^{j}\right)^{-z}\ln p_i=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-z}\Lambda(k).$$

Sumande preuredimo po vrsti od najmanjšega naprej. To res ustreza zapisu zgoraj, saj je Mangoldtova funkcija, ki smo jo definirali v definiciji **??**, neničelna samo tedaj, ko je k potenca praštevila. Če upoštevamo zvezo med funkcijo psi in Mangoldtovo funkcijo, dobimo enakost

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-z}\Lambda(k)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-z}(\psi(k)-\psi(k-1)). \tag{8}$$

Delno vsoto zgornje številske vrste preoblikujemo in upoštevamo, da je $\psi(0)=0$. Dobimo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{M}k^{-z}(\psi(k)-\psi(k-1))&=\sum_{k=1}^{M}\psi(k)k^{-z}-\sum_{k=2}^{M}\psi(k-1))k^{-z}\\&=\sum_{k=1}^{M}\psi(k)k^{-z}-\sum_{k=1}^{M-1}\psi(k)(k+1)^{-z}\\&=\psi(M)(M+1)^{-z}+\sum_{k=1}^{M}\psi(k)(k^{-z}-(k+1)^{-z}).\end{aligned} \tag{9}$$

Če v limitnem primeru, ko pošljemo M proti neskončno, upoštevamo, da iz definicije funkcije psi sledi ocena $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \leq \sum_{n \leq x} \ln x \leq x \ln x$, na množici $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$ velja

$$0 \leq \lim_{M \to \infty} \left| \frac{\psi(M)}{(M+1)^z} \right| \leq \lim_{M \to \infty} \left| \frac{M \ln M}{(M+1)^z} \right| \leq \lim_{M \to \infty} \frac{M \ln M}{(M+1)^{\mathrm{Re}(z)}} = 0.$$

Po pravilu sendviča je torej $\lim_{M \to \infty} \psi(M)(M+1)^{-z} = 0$. Če v enačbo (8) vstavimo limitni primer enačbe (9), dobimo

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)(k^{-z} - (k+1)^{-z}). \tag{10}$$

Ker je na $[k, k+1)$ funkcija psi konstantna, je

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{M} \psi(k)(k^{-z} - (k+1)^{-z}) &= \sum_{k=1}^{M} \psi(k) z \int_k^{k+1} t^{-z-1}\, dt \\ &= \sum_{k=1}^{M} z \int_k^{k+1} \psi(t) t^{-z-1}\, dt \\ &= z \int_1^{M+1} \psi(t) t^{-z-1}\, dt. \end{aligned} \tag{11}$$

V enačbo (10) vstavimo limitni primer enačbe (11) in za $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$ dobimo enakost

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = z \int_1^{\infty} \psi(t) t^{-z-1}\, dt,$$

kar smo želeli pokazati.

3. Dokaz praštevilskega izreka

V prejšnjem poglavju smo dokazali ključne lastnosti Riemannove funkcije zeta in izpeljali formulo za njen logaritmični odvod. V tem poglavju pa bomo vse to orodje uporabili za dokaz praštevilskega izreka. Začeli bomo tako, da bomo postavili trditev ekvivalentno praštevilskemu izreku. To trditev bomo na koncu tudi dokazali.

3.1 Ekvivalentna oblika praštevilskega izreka

V tem podpoglavju bomo spoznali ekvivalentno obliko praštevilskega izreka in pomembno lastnost funkcije psi, ki jo bomo potrebovali v nadaljevanju.

Trditev 15. *Velja* $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\pi(x)}{x / \ln(x)} = 1$ *natanko tedaj, ko velja* $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\psi(x)}{x} = 1$.

Dokaz. Po trditvi 13 vemo, da velja

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln p} \right\rfloor \ln p \leq \sum_{p \leq x} \frac{\ln x}{\ln p} \ln p = \ln x \sum_{p \leq x} 1 = \pi(x) \ln x. \tag{12}$$

Za $1 < y < x$ velja ocena

$$\pi(x) = \pi(y) + \sum_{y < p \leq x} 1 \leq \pi(y) + \sum_{y < p \leq x} \frac{\ln p}{\ln y} \leq y + \frac{1}{\ln y} \sum_{y < p \leq x} \ln p \leq y + \frac{1}{\ln y} \psi(x).$$

Kratek račun pokaže, da za dovolj velik x velja neenakost $x/(\ln x)^2 < x$. Če vzamemo $y = x/(\ln x)^2$, dobimo

$$\pi(x) \leq \frac{x}{(\ln x)^2} + \frac{1}{\ln x - 2\ln(\ln x)}\psi(x).$$

Ker je $(\ln x)/x > 0$ za $x > 1$, velja

$$\pi(x)\frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{\ln x} + \frac{\ln x}{\ln x - 2\ln(\ln(x))}\frac{\psi(x)}{x}. \tag{13}$$

Če upoštevamo oceni iz neenakosti (12) in (13), dobimo

$$\frac{\psi(x)}{x} \leq \pi(x)\frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{\ln x} + \frac{\ln x}{\ln x - 2\ln(\ln(x))}\frac{\psi(x)}{x}. \tag{14}$$

Izračunajmo limito

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\ln x - 2\ln(\ln(x))} &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 - 2\frac{\ln(\ln(x))}{\ln x}} \\ &= \frac{1}{1 - 2\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln x}}.\end{aligned}$$

Zadnja enakost velja le, če zadnja limita obstaja in ni enaka $1/2$. Ta je po l'Hôpitalovem pravilu enako 0, saj je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} = 0.$$

Torej velja

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\ln x - 2\ln(\ln(x))} = 1.$$

Dokazali bomo obe implikaciji. Najprej predpostavimo da velja $\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$. Dokazati želimo $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} = 1$. Če neenakost (14) pogledamo v limitnem primeru, dobimo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \leq \lim_{x\to\infty} \left(\pi(x)\frac{\ln x}{x}\right) \leq \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{\ln x}{\ln x - 2\ln(\ln(x))}\frac{\psi(x)}{x}\right).$$

Ker je $\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$ in ker limiti $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x}$ in $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\ln x - 2\ln(\ln(x))}$ obstajata, velja

$$1 \leq \lim_{x\to\infty} \left(\pi(x)\frac{\ln x}{x}\right) \leq \left(\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\ln x - 2\ln(\ln(x))}\right)\left(\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x}\right) = 1.$$

Torej je po pravilu sendviča $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} = 1$. Za dokaz druge implikacije predpostavimo $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} = 1$. Dokazati želimo $\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$. Spet pogledamo neenakost (14) v limitnem primeru. Iz prve neenakosti dobimo, da limita $\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x}$ obstaja. Posledično je

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{\ln(x)} + \frac{\ln x}{\ln x - 2\ln(\ln(x))}\frac{\psi(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x}.$$

Iz neenakosti

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \leq 1 \leq \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x}$$

sledi $\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$.

Lema 16. *Obstaja taka konstanta $C > 0$, da za vsak $x > 0$ velja $\psi(x) \leq Cx$.*

Dokaz. Z natančno obravnavo funkcije celi del, bomo funkcijo ψ ocenili kot zahteva lema. Po trditvi 13 vemo, da je $\psi(x) = \sum_{p\leq x} \lfloor \frac{\ln x}{\ln p} \rfloor \ln p$. Če je vrednost funkcije celi del $\lfloor \frac{\ln x}{\ln p} \rfloor$ večja od 1, je $\frac{\ln x}{\ln p} \geq 2$. Takrat je $x \geq p^2$ in torej $p \leq \sqrt{x}$. Ocenimo

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{p\leq\sqrt{x}} \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln p} \right\rfloor \ln p + \sum_{\sqrt{x}<p\leq x} \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln p} \right\rfloor \ln p \\ &\leq \sum_{p\leq\sqrt{x}} \frac{\ln x}{\ln p} \ln p + \sum_{\sqrt{x}<p\leq x} \ln p \\ &\leq \pi(\sqrt{x}) \ln x + \sum_{p\leq x} \ln p. \end{aligned} \tag{15}$$

Poiščimo zgornjo mejo za drugi člen v neenakosti. Za vsako praštevilo p, za katero velja $n < p \leq 2n$, p deli $(2n)!/n! = n!\binom{2n}{n}$. Ker p ne deli $n!$, mora deliti $\binom{2n}{n}$. Ker so si taka praštevila med sabo tuja, tudi njihov produkt deli $\binom{2n}{n}$. Torej velja

$$\prod_{n\leq p\leq 2n} p \leq \binom{2n}{n} < \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} = (1+1)^{2n} = 2^{2n}.$$

Če to neenakost logaritmiramo, dobimo

$$\sum_{n\leq p\leq 2n} \ln p = \ln \left(\prod_{n<p\leq 2n} p \right) < 2n \ln 2$$

in posledično

$$\sum_{p\leq 2^m} \ln p = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{2^{k-1}\leq p\leq 2^k} \ln p \right) < \sum_{k=1}^{m} 2^k \ln 2 < 2^{m+1} \ln 2. \tag{16}$$

Imamo vse potrebno, da ocenimo $\sum_{p\leq x} \ln p$. Za vsak $x > 0$ obstaja tak $m \in \mathbb{N}$, da je $2^m < x \leq 2^{m+1}$. Iz ocene (16) sledi

$$\sum_{p\leq x} \ln p \leq \sum_{p\leq 2^{m+1}} \ln p < 2^{m+2} \ln 2 < 4x \ln 2.$$

Vrnimo se na prvotno neenakost (15). Če upoštevamo, kar smo ravno izračunali, dobimo

$$\begin{aligned} \psi(x) &\leq \pi(\sqrt{x}) \ln x + \sum_{p\leq x} \ln p \\ &< \sqrt{x} \ln x + 4x \ln 2 \\ &= \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 4 \ln 2 \right) x. \end{aligned}$$

Iz $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ vidimo, da je funkcija $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ navzgor omejena. Torej obstaja $C > 0$, da je $\psi(x) \leq Cx$ za vsak $x > 0$. □

3.2 Pristop s kompleksno analizo

Dokazi v tem poglavju bodo zahtevali globlje razumevanje kompleksne analize. Najprej bomo dokazali izrek, ki na prvi pogled nima nobenega opravka z dokazom praštevilskega izreka, a ta presenetljivo dokaj enostavno sledi iz njega. Videli smo že, da se funkcija ψ pojavlja tako v logaritmičnem odvodu funkcije ζ kot tudi v ekvivalentni obliki praštevilskega izreka. Izrek, ki ga bomo dokazali, nam bo omogočil, da to izkoristimo in dokažemo ekvivalentno obliko praštevilskega izreka. Za začetek dokažimo naslednjo lemo, ki bo ključna pri dokazu glavnega izreka tega podpoglavja.

Lema 17. *Naj bo $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ omejena odsekoma zvezna funkcija. Tedaj njena Laplaceova transformacija G na množici $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ obstaja in je holomorfna*

$$G(z) = \int_0^\infty F(t)e^{-zt}\, dt.$$

Velja še več, če obstaja holomorfna razširitev G na okolico imaginarne osi $\mathrm{Re}(z) = 0$ potem obstaja posplošen integral $\int_0^\infty F(t)\, dt$ in je enak $G(0)$.

Dokaz. Dokaz bo sestavljen iz dveh delov. V prvem bomo dokazali obstoj in holomorfnost funkcije G, v drugem pa obstoj posplošenega integrala funkcije F. Lotimo se prvega dela. Dokažimo, da je G na množici $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ dobro definirana. Ker je F omejena, jo lahko navzgor ocenimo z $M = \sup_{t\in[0,\infty)} |F(t)|$. S pomočjo te ocene izračunamo

$$|G(z)| \le \int_0^\infty |F(t)| \left|e^{-zt}\right| \, dt \le M \int_0^\infty e^{-t\,\mathrm{Re}(z)}\, dt = \frac{M}{\mathrm{Re}(z)},$$

od koder sledi, da Laplaceova transformacija funkcije F na $\{z \in C \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ obstaja. Dokažimo še holomorfnost. Dokaz bo slonel na trditvi 6, zato za parameter $\lambda \in (0, \infty)$ definiramo družino funkcij $G_\lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s predpisom

$$G_\lambda(z) = \int_0^\lambda F(t)e^{-zt}\, dt.$$

Analogno kot v dokazu trditve 10 s pomčjo Morerovega izreka dokažemo, da so holomorfne. Če dokažemo, da zožitve funkcij G_λ na definicijsko območje funkcije G enakomerno po kompaktih konvergirajo h G, potem po trditvi 6 sledi, da je G holomorfna. Naj bo K poljubna kompaktna podmnožica množice $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Z m označimo minimum $m = \min\{\mathrm{Re}(z) \mid z \in K\} > 0$. Naj bo $\epsilon > 0$ poljuben, iščemo $\Lambda \in (0, \infty)$, da bo za vsak $\lambda > \Lambda$, $\max_{z\in K} |G(z) - G_\lambda(z)| < \epsilon$. Ocenimo

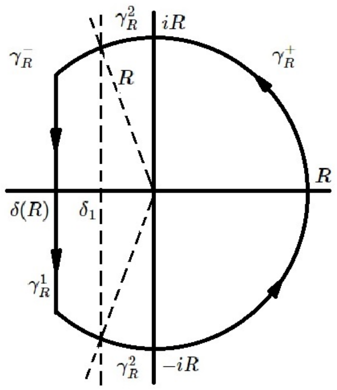
$$\begin{aligned} \max_{z\in K} |G(z) - G_\lambda(z)| &\le \max_{z\in K} \int_\lambda^\infty |F(t)||e^{-tz}|\, dt \\ &\le \max_{z\in K} M \int_\lambda^\infty e^{-t\,\mathrm{Re}(z)}\, dt \\ &= \max_{z\in K} M \frac{-e^{-t\,\mathrm{Re}(z)}}{\mathrm{Re}(z)}\Big|_{t=\lambda}^\infty \\ &= \max_{z\in K} M \frac{e^{-\lambda\,\mathrm{Re}(z)}}{\mathrm{Re}(z)} \\ &\le \frac{Me^{-\lambda m}}{m}. \end{aligned} \tag{17}$$

Ta izraz je za dovolj velike λ poljubno majhen. Torej družina funkcij G_λ enakomerno po kompaktih konvergira k G, od koder sledi, da je G holomorfna. S tem smo dokazali prvi del leme.

V drugem delu moramo dokazati, da ob predpostavki obstoja holomorfne razširitve funkcije G na okolico imaginarne osi $\mathrm{Re}(z) = 0$, obstaja posplošeni integral $\int_0^\infty F(t)\, dt$ in je enak $G(0)$. Če limita $\lim_{\lambda\to\infty} G_\lambda(0)$ obstaja velja

$$\lim_{\lambda\to\infty} G_\lambda(0) = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\lambda F(t)\, dt = \int_0^\infty F(t)\, dt.$$

Torej smo problem prevedli na dokazovanje enakosti $\lim_{\lambda\to\infty} G_\lambda(0) = G(0)$. Spomnimo se, da so funkcije G_λ definirane na celi kompleksni ravnini, zato je smiselno govoriti o njihovi limiti tudi v točki 0. Problem nastane, ker ne vemo, ali ta limita sploh obstaja in ali je res enaka $G(0)$. Za



Slika 2. Krivulja γ_R

funkcijo G vemo, da se z limitno funkcijo družine G_λ ujema na množici $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$, ne vemo pa, kaj se z njo dogaja na njeni razširitvi. Vse, kar vemo je, da je razširitev holomorfna. Cilj je dokazati, da je število $|G(0) - G_\lambda(0)|$ poljubno majhno, ko gre λ čez vse meje. Tu si bomo pomagali s Cauchyjevo formulo za holomorfne funkcije. Spomnimo se: Naj bo D omejena odprta množica z odsekoma gladkim robom, sestavljenim iz končnega števila odsekoma gladkih krivulj. Rob ∂D naj bo orientiran pozitivno glede na D. Naj bo f holomorfna funkcija na neki okolici množice D in naj bo $a \in D$, potem velja

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a}\, dz.$$

V našem primeru je f funkcija $z \mapsto G(z) - G_\lambda(z)$, ki je holomorfna na definicijskem območju razširitve funkcije G. Rob množice D po katerem bomo integrirali bomo določili s krivuljo γ_R. Naj bosta $R, \delta(R) > 0$. Krivulja γ_R je unija dela krožnice s središčem v točki 0 in polmerom R, ki leži v polravnini $\mathrm{Re}(z) > -\delta(R)$ in daljice med točkama, ki sta preseka krožnice in premice $\mathrm{Re}(z) = -\delta(R)$. Krivulja γ_R je orientirana pozitivno glede na območje D, ki ga omejuje. Pri tem je $\delta(R)$ tako majhen, da je G holomorfna na neki okolici zaprte množice $\hat{D}$. Z γ_R^+ označimo del krivulje, ki leži v polravnini $\mathrm{Re}(z) > 0$, z γ_R^- pa del, ki leži v polravnini $\mathrm{Re}(z) < 0$. Krivuljo γ_R prikazuje slika 2. Če za a iz Cauchyjeve formule vzamemo koordinatno izhodišče, dobimo

$$G(0) - G_\lambda(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{G(z) - G_\lambda(z)}{z}\, dz.$$

Z $l(\gamma_R)$ označimo dolžino krivulje γ_R. Poskusimo oceniti

$$|G(0) - G_\lambda(0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{G(z) - G_\lambda(z)}{z}\, dz \right| \leq \frac{l(\gamma_R)}{2\pi} \sup_{z \in \gamma_R} \left| \frac{G(z) - G_\lambda(z)}{z} \right|.$$

Izkaže se, da ta način ne omogoči dobre ocene, saj je supremum neskončen. Zato bomo namesto funkcije $z \mapsto (G(z) - G_\lambda(z))/z$ v Cauchyjevi formuli uporabili

$$z \mapsto (G(z) - G_\lambda(z)) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right).$$

Premislimo, da dobimo isti rezultat. Po Cauchyjevem izreku je integral funkcije $z \mapsto G(z) - G_\lambda(z))e^{\lambda z} z/R^2$ po krivulji γ_R je enak 0, saj integriramo holomorfno funkcijo. Ostane nam torej le integral funkcije $z \mapsto (G(z) - G_\lambda(z))e^{\lambda z}/z$, ki je po Cauchyjevi formuli enak $2\pi i(G(0) - G_\lambda(0))$, saj je $e^{\lambda 0} = 1$. Od tod sledi

$$G(0) - G_\lambda(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} (G(z) - G_\lambda(z)) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz. \tag{18}$$

Ponovno poskusimo oceniti $|G(0) - G_\lambda(0)|$. Tokrat se bomo problema lotili v dveh delih. Najprej bomo zgornji integral ocenjevali po krivulji γ_R^+, nato pa še po preostanku, po krivulji γ_R^-. Pri dokazovanju obstoja funkcije G, smo v neenakosti (17) dokazali, da na $\operatorname{Re}(z) > 0$ velja $|G(z) - G_\lambda(z)| \leq Me^{-\lambda \operatorname{Re}(z)} / \operatorname{Re}(z)$, kjer smo z M označili supremum funkcije F. Opazimo tudi, da se za $|z| = R$ spodnji izraz poenostavi

$$\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} + \frac{z}{R^2} = \frac{2\operatorname{Re}(z)}{R^2}. \tag{19}$$

Izračunajmo absolutno vrednost integrala (18) po krivulji γ_R^+. Na tem območju predpis za funkcijo G poznamo

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^+} (G(z) - G_\lambda(z)) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz \right| \\ &\quad \leq \frac{l(\gamma_R^+)}{2\pi} \sup_{z \in \gamma_R^+} \left| (G(z) - G_\lambda(z)) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) \right| \\ &\quad \leq \frac{R\pi}{2\pi} \sup_{z \in \gamma_R^+} \left(\frac{Me^{-\lambda \operatorname{Re}(z)}}{\operatorname{Re}(z)} e^{\lambda \operatorname{Re}(z)} \frac{2\operatorname{Re}(z)}{R^2} \right) \\ &\quad = \frac{M}{R}. \end{aligned} \tag{20}$$

Vidimo, da je zgornji izraz neodvisen od parametra λ in gre proti 0, ko gre R čez vse meje. Poglejmo še integral po krivulji γ_R^-. Ta del bo težji, saj na levi polravnini funkcije G eksplicitno ne poznamo, vemo le, da je tam holomorfna

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^-} (G(z) - G_\lambda(z)) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz \right| \\ &\quad \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^-} G(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz \right| + \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^-} G_\lambda(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz \right| \\ &\quad = |I_1(R)| + |I_2(R)|. \end{aligned}$$

Prvi integral označimo z $I_1(R)$, drugega pa z $I_2(R)$. Izračunajmo najprej $I_2(R)$. To bo lažje, saj predpis za G_λ poznamo. Ker je funkcija $z \mapsto G_\lambda(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right)$ holomorfna na $\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) < 0\}$, lahko pot γ_R^- zamenjamo s polkrožnjo potjo r_R od iR do $-iR$ na levi polravnini, imenujmo jo r_R. To vidimo iz Cauchyjevega izreka, saj imata obe poti isto začetno in končno točko. Na krivulji r_R je $|z| = R$, torej zopet velja

$$\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} = \frac{2\operatorname{Re}(z)}{R^2}.$$

Upoštevajoč zgornji razmislek dobimo

$$\begin{aligned} |I_2(R)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{r_R} G_\lambda(z) e^{\lambda z} \frac{2\operatorname{Re}(z)}{R^2} dz \right| \\ &\leq \frac{l(r_R)}{2\pi} \sup_{z \in r_R} \left| G_\lambda(z) e^{\lambda z} \frac{2\operatorname{Re}(z)}{R^2} \right| \\ &= \frac{R\pi}{2\pi} \sup_{z \in r_R} \left| \left(\int_0^\lambda F(t) e^{-zt} \, dt \right) e^{\lambda z} \frac{2\operatorname{Re}(z)}{R^2} \right|. \end{aligned}$$

Na levi polravnini izračunamo

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\lambda F(t) e^{-zt} e^{\lambda z} \, dt \right| &\leq M \int_0^\lambda e^{(\lambda - t)\operatorname{Re}(z)} \, dt = -M \frac{e^{(\lambda - t)\operatorname{Re}(z)}}{\operatorname{Re}(z)} \bigg|_{t=0}^{t=\lambda} = M \frac{1 - e^{\lambda \operatorname{Re}(z)}}{|\operatorname{Re}(z)|} \\ &\leq \frac{M}{|\operatorname{Re}(z)|}. \end{aligned}$$

Torej lahko $I_2(R)$ navzgor ocenimo z

$$|I_2(R)| \leq \frac{R}{2} \sup_{z \in r(R)} \left(\frac{M}{|\operatorname{Re}(z)|} \frac{2|\operatorname{Re}(z)|}{R^2} \right) = \frac{M}{R}. \tag{21}$$

Izračunati moramo še $I_1(R)$. Ta del je najzahtevnejši, saj G na krivulji γ_R^- eksplicitno ne poznamo in vemo le, da je tam holomorfna. Zaradi zveznosti funkcije G vemo, da za vsak $R > 0$ obstaja $M_G(R) \geq 0$, da je $|G(z)| \leq M_G(R)$, za vsak $z \in \gamma_R^-$. Izberimo δ_1 iz intervala $0 < \delta_1 < \delta(R)$. Integral $I_1(R)$ razdelimo na dva dela. Na prvem delu naj bo $\operatorname{Re}(z) < -\delta_1$, na drugem pa naj bo $\operatorname{Re}(z) \geq -\delta_1$. Krivulji po katerih bomo integrirali sta prikazani na sliki 2, za prvi integral jo označimo z γ_R^1, za drugega pa z γ_R^2. Dobimo

$$|I_1(R)| \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^1} G(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz \right| + \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^2} G(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz \right|.$$

Očitno velja $l(\gamma_R^1) < R\pi$, saj je dolžina krivulje zagotovo manjša kot obseg polkroga s polmerom R. Za drugo dolžino velja $l(\gamma_R^2) = 2R \arcsin \frac{\delta_1}{R}$, saj seštevamo dva enaka krožna loka. Najprej izračunajmo integral po krivulji γ_R^1

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^1} G(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz \right| &\leq \frac{l(\gamma_R^1)}{2\pi} \sup_{z \in \gamma_R^1} \left| G(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) \right| \\ &\leq \frac{R\pi}{2\pi} M_G(R) e^{-\lambda \delta_1} \left(\sup_{z \in \gamma_R^1} \left| \frac{1}{z} \right| + \sup_{z \in \gamma_R^1} \left| \frac{z}{R^2} \right| \right) \\ &\leq \frac{R M_G(R)}{2} \left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{R} \right) e^{-\lambda \delta_1}. \end{aligned} \tag{22}$$

Ko λ narašča čez vse meje, gre pri fiksnem R in δ_1 integral proti 0. Poglejmo si še integral po krivulji γ_R^2. Ker je $|z| = R$, kot prej velja enakost (19).

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^2} G(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz \right| &\leq \frac{l(\gamma_R^2)}{2\pi} \sup_{z \in \gamma_R^2} \left| G(z) e^{\lambda z} \frac{2 \operatorname{Re}(z)}{R^2} \right| \\ &\leq \frac{2R \arcsin \frac{\delta_1}{R}}{2\pi} M_G(R) e^{\lambda 0} \frac{2\delta_1}{R^2} \\ &= \frac{2 M_G(R) \delta_1 \arcsin \frac{\delta_1}{R}}{R\pi} \end{aligned} \tag{23}$$

Tokrat je ocena neodvisna od λ, a je pri fiksnem R zadnji izraz in posledično cel integral poljubno majhen za dovolj majhen δ_1.

Sedaj lahko končno dokažemo trditev. Spomnimo se, da dokazujemo, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\Lambda \in (0, \infty)$, da za vsak $\lambda > \Lambda$ velja

$$|G(0) - G_\lambda(0)| < \epsilon.$$

Naj bo $\epsilon > 0$. Fiksirajmo $R = 4M/\epsilon$ in izberimo tak $\delta(R)$, $0 < \delta(R) < R$, da je G holomorfna znotraj krivulje γ_R. Po oceni (20) in (21) velja

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^+} (G(z) - G_\lambda(z)) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz \right| \leq \frac{M}{R} = \frac{\epsilon}{4}$$

in

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^-} G_\lambda(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz \right| \leq \frac{M}{R} = \frac{\epsilon}{4}.$$

Po oceni (23) obstaja δ_1 iz intervala $(0, \delta(R))$, da je

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^2} G(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz \right| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Po oceni (22) pa obstaja $\Lambda > 0$, da za vsak $\lambda > \Lambda$ velja

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^1} G(z) e^{\lambda z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right) dz \right| < \frac{\epsilon}{4}$$

Ker zgornji štirje integrali po trikotniški neenakosti navzgor ocenijo $|G(0) - G_\lambda(0)|$, sledi

$$|G(0) - G_\lambda(0)| < \epsilon,$$

čim je $\lambda > \Lambda$. Torej limita $\lim_{\lambda \to \infty} G_\lambda(0)$ obstaja in je enaka $G(0)$. To pa je ekvivalentno trditvi, da obstaja posplošeni integral $\int_0^\infty F(t)\, dt$ in je enak $G(0)$. $\square$

Vse imamo pripravljeno, da dokažemo glavno orodje za dokaz praštevilskega izreka.

Izrek 18. *Naj bo f nenegativna, odsekoma zvezna in naraščajoča funkcija na $[1, \infty)$, za katero obstaja $C > 0$, da za vsak $x > 0$ velja $f(x) \leq Cx$. Potem je na množici $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$ s predpisom*

$$g(z) = z \int_1^\infty f(t) t^{-z-1}\, dt$$

Podana holomorfna funkcija g. Denimo, da obstaja konstanta c, da ima funkcija

$$z \mapsto g(z) - \frac{c}{z-1}$$

holomorfno razširitev na okolico premice $\mathrm{Re}(z) = 1$. Potem je

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = c.$$

Dokaz. Izrek bomo zopet dokazali v dveh delih. V prvem bomo dokazali obstoj in holomorfnost funkcije g, v drugem pa obstoj in vrednost limite. Naj bosta funkciji f in g kot v izreku. Dokažimo, da funkcija $g(z)$ na množici $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$ obstaja in da je g na definicijskem območju holomorfna. Preverimo obstoj

$$\begin{aligned}
|g(z)| &\leq |z| \int_1^\infty f(t) |t^{-z-1}|\, dt \\
&\leq |z| \int_1^\infty C t t^{-1-\mathrm{Re}(z)}\, dt \\
&= C|z| \int_1^\infty t^{-\mathrm{Re}(z)}\, dt \\
&= C|z| \frac{t^{1-\mathrm{Re}(z)}}{1 - \mathrm{Re}(z)} \Bigg|_{t=1}^\infty \\
&= \frac{C|z|}{\mathrm{Re}(z) - 1}.
\end{aligned}$$

Torej je na množici $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$ funkcija g res dobro definirana. Holomorfnost bomo kot običajno dokazali z uporabo trditve 6. Za $k \in \mathbb{N}$ definiramo družino funkcij $g_k : \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\} \to \mathbb{C}$ s predpisom

$$g_k(z) = \int_1^k f(t) t^{-z-1}\, dt.$$

Ker je funkcija $(z,t) \mapsto f(t)t^{-z-1}$ zvezna v spremenljivki z in odsekoma zvezna v spremenljivki t, so tudi funkcije g_k zvezne. Njihovo holomorfnost bomo dokazali z Morerovim izrekom. Naj bo T poljuben zaprt trikotnik na definicijskem območju funkcije g_k. Tedaj je

$$\int_{\partial T} g_k(z)\,dz = \int_{\partial T}\int_1^k f(t)t^{-z-1}\,dt\,dz = \int_1^k \int_{\partial T} f(t)t^{-z-1}\,dz\,dt = \int_1^k 0\,dt = 0.$$

Predzadnja enakost velja po Cauchyjevem izreku, saj je funkcija $z \mapsto f(t)t^{-z-1}$ holomorfna. Po Morerovem izreku je torej za vsak $k \in \mathbb{N}$ funkcija g_k holomorfna. Če funkcijsko zaporedje g_k konvergira enakomerno po kompaktih k funkciji $g(z)/z$, je ta po trditvi 6 holomorfna. Naj bo $\epsilon > 0$ in K poljubna kompaktna podmnožica množice $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$. Potem obstaja minimum $m = \min\{\mathrm{Re}(z) \mid z \in K\} >1$. Iščemo $T \in \mathbb{N}$, da bo $\max_{z\in K} |g(z)/z - g_k(z)| < \epsilon$ za vsak $k \geq T$. Velja

$$\begin{aligned}
\max_{z\in K} |g(z)/z - g_k(z)| &\leq \max_{z\in K} \int_k^\infty f(t)|t^{-z-1}|\,dt \\
&\leq \max_{z\in K} \int_k^\infty Ctt^{-1-\mathrm{Re}(z)}\,dt \\
&= C\max_{z\in K} \int_k^\infty t^{-\mathrm{Re}(z)}\,dt \\
&= C\max_{z\in K} \left.\frac{t^{1-\mathrm{Re}(z)}}{1-\mathrm{Re}(z)}\right|_{t=k}^{\infty} \\
&= C\max_{z\in K} \frac{k^{1-\mathrm{Re}(z)}}{\mathrm{Re}(z)-1} \\
&\leq C\frac{k^{1-m}}{m-1}.
\end{aligned}$$

Ker je $1-m<0$, je zgornji izraz poljubno majhen za dovolj velik k. To pomeni, da je konvergenca po kompaktih enakomerna in da je funkcija $g(z)/z$ holomorfna. Od tod sledi, da je holomorfna tudi funkcija g, saj je produkt holomorfnih funkcij. S tem smo končali prvi del dokaza.

V drugem delu bomo ob predpostavki, da ima za neko konstanto c funkcija $z \mapsto g(z) - c/(z-1)$ holomorfno razširitev na okolico premice $\mathrm{Re}(z) = 1$, dokazali, da obstaja limita $\lim_{x\to\infty} f(x)/x$ in da je ta enaka c. Pomagali si bomo s prejšnjo lemo. Definirajmo $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$F(t) = e^{-t} f\left(e^t\right) - c.$$

Očitno je funkcija F odsekoma zvezna. Dokažimo, da je omejena. Ker je funkcija f nenegativna, je F navzdol omejena. Omejenost navzgor sledi iz zveze

$$F(t) = e^{-t} f\left(e^t\right) - c \leq e^{-t}Ce^t - c = C - c.$$

Funkcija F tako izpolnjuje pogoja leme 17, kar pomeni, da obstaja njena Laplaceova transformacija

$$G(z) = \int_0^\infty \left(e^{-t} f\left(e^t\right) - c\right) e^{-zt}\,dt,$$

ki je definirana na množici $\{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Predpis za G poenostavimo tako, da v integral uvedemo novo neznanko $s = e^t$. Dobimo

$$\begin{aligned} G(z) &= \int_1^\infty \left(\frac{f(s)}{s} - c\right) s^{-z} \frac{ds}{s} \\ &= \int_1^\infty f(s) s^{-z-2}\, ds - c \int_1^\infty s^{-z-1}\, ds \\ &= \int_1^\infty f(s) s^{-(z+1)-1}\, ds - c \frac{-1}{z s^z}\Big|_{s=1}^\infty \\ &= \frac{g(z+1)}{z+1} - \frac{c}{z} \\ &= \frac{1}{z+1}\left(g(z+1) - \frac{c}{z} - c\right). \end{aligned}$$

V predzadnji enakosti smo upoštevali, da na množici $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ velja formula

$$g(z+1) = (z+1) \int_1^\infty f(t) t^{-(z+1)-1}\, dt.$$

Po predpostavki izreka vemo, da ima funkcija $g(z) - c/(z-1)$ holomorfno razširitev na okolico premice $\mathrm{Re}(z) = 1$, kar je ekvivalentno trditvi, da ima funkcija $g(z+1) - c/z$ holomorfno razširitev na okolico imaginarne osi $\mathrm{Re}(z) = 0$. Torej ima tudi funkcija G holomorfno razširitev na okolico imaginarne osi. Po lemi 17 velja

$$\int_0^\infty F(t)\, dt = G(0),$$

oziroma, če zopet uvedemo novo spremenljivko $x = e^t$, da posplošeni integral

$$\int_1^\infty \left(\frac{f(x)}{x} - c\right) \frac{dx}{x} \tag{24}$$

obstaja. Dokazati želimo, da je $\lim_{x\to\infty} f(x)/x = c$. Naj bo $\epsilon > 0$. Najprej bomo dokazali, da obstaja število $M_1 \geq 1$, da za vsak $a > M_1$ velja $f(a)/a - c \leq 2\epsilon$. Denimo nasprotno. Torej, da obstaja tako navzgor neomejno zaporedje števil $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, da za poljuben $a \in \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ velja $f(a)/a - c > 2\epsilon$. Ker je f naraščajoča, za

$$x \in \left(a, \frac{c+2\epsilon}{c+\epsilon} a\right)$$

velja

$$f(x) \geq f(a) > a(c+2\epsilon) > x(c+\epsilon).$$

Torej za x iz zgornjega intervala dobimo $f(x)/x - c > \epsilon$. Posledično je

$$\int_a^{\frac{c+2\epsilon}{c+\epsilon}a} \left(\frac{f(x)}{x} - c\right) \frac{dx}{x} > \int_a^{\frac{c+2\epsilon}{c+\epsilon}a} \frac{\epsilon}{x}\, dx = \epsilon \ln\left(\frac{c+2\epsilon}{c+\epsilon}\right).$$

Ker integral (24) obstaja, gre integral $\int_{b_1}^{b_2} \left(\frac{f(x)}{x} - c\right) \frac{dx}{x}$ proti 0, ko gresta $b_1, b_2 \to \infty$. Torej za vsak dovolj velik a velja

$$\int_a^{\frac{c+2\epsilon}{c+\epsilon}a} \left(\frac{f(x)}{x} - c\right) \frac{dx}{x} < \epsilon \ln\left(\frac{c+2\epsilon}{c+\epsilon}\right),$$

kar pa je protislovje. Torej obstaja tako število M_1, da je $f(a)/a - c \leq 2\epsilon$, čim je $a > M_1$. Dokažimo še, da obstaja tako število $M_2 \geq 1$, da za vsak $a > M_2$ velja $f(a)/a - c \geq -2\epsilon$. Denimo nasprotno.

Torej, da obstaja tako navzgor neomejno zaporedje števil $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, da za poljuben $a \in \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ velja $f(a)/a - c < -2\epsilon$. Ker je f naraščajoča, za

$$x \in \left(\frac{c-2\epsilon}{c-\epsilon}a, a\right)$$

velja

$$f(x) \leq f(a) < a(c-2\epsilon) < x(c-\epsilon).$$

Torej je za x iz zgornjega intervala $f(x)/x - c < -\epsilon$. Dobimo

$$\int_{\frac{c-2\epsilon}{c-\epsilon}a}^{a} \left(\frac{f(x)}{x} - c\right)\frac{dx}{x} < \int_{\frac{c-2\epsilon}{c-\epsilon}a}^{a} \frac{-\epsilon}{x}\, dx = -\epsilon \ln\left(\frac{c-\epsilon}{c-2\epsilon}\right).$$

Kot prej sklepamo, da gre, zaradi obstoja integrala (24), integral $\int_{b_1}^{b_2}\left(\frac{f(x)}{x} - c\right)\frac{dx}{x}$ proti 0, ko gresta $b_1, b_2 \to \infty$. Posledično je za vsak dovolj velik a integral

$$\int_{\frac{c-2\epsilon}{c-\epsilon}a}^{a} \left(\frac{f(x)}{x} - c\right)\frac{dx}{x} > -\epsilon \ln\left(\frac{c-\epsilon}{c-2\epsilon}\right).$$

Kar pa je protislovje. Torej res obstja tako število M_2, da za vsak $a > M_2$ velja $f(a)/a - c \geq -2\epsilon$. Dokazali smo, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tako število $M = \max\{M_1, M_2\}$, da za vsak $a > M$ velja

$$\left|\frac{f(a)}{a} - c\right| < 2\epsilon.$$

Po definiciji to pomeni, da je $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = c$.

Vse, kar nam še ostane, je dokaz praštevilskega izreka. Dokazali bomo njegovo ekvivalento obliko, ki smo jo našli v trditvi 15.

Izrek 19 (Ekvivalentna oblika Praštevilskega izreka).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x} = 1$$

Dokaz. Za dokaz trditve bomo uporabili prejšnji izrek. Po trditvi 13 je

$$\psi(x) = \sum_{p\leq x}\left\lfloor\frac{\ln x}{\ln p}\right\rfloor \ln p$$

nenegativna, odsekoma zvezna in naraščajoča funkcija na $[1,\infty)$, po lemi 16 pa obstaja $C > 0$, da za vsak $x > 0$ velja $\psi(x) \leq Cx$. Ker funkcija ψ izpoljnjuje zahteve izreka 18, lahko na $\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) > 1\}$ definiramo funkcijo

$$g(z) = z\int_1^\infty \psi(x)x^{-z-1}\, dx.$$

Opazimo, da je funcija $-g(z)$ enaka logaritmičnemu odvodu Riemannove funkcije ζ, ki smo ga izračunali v trditvi 14. Dokažimo, da ima funkcija

$$z \mapsto g(z) - \frac{1}{z-1} = -\left(\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} + \frac{1}{z-1}\right)$$

holomorfno razširitev na okolico premice $\mathrm{Re}(z) = 1$. Po trditvi 14 vemo, da ima $\zeta'(z)/\zeta(z)$ na okolici te premice meromorfno razširitev z edinim polom v $z = 1$, za katerega velja $\mathrm{Res}(\zeta'(z)/\zeta(z), 1) = -1$. Torej je funkcija

$$z \mapsto \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} + \frac{1}{z-1}$$

holomorfna na okolici premice $\mathrm{Re}(z) = 1$, posledično pa ima tudi

$$z \mapsto g(z) - \frac{1}{z-1}$$

želeno holomorfno razširitev. Po izreku 18, velja

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1,$$

kar smo želeli pokazati. □

4. Zaključek

Torej je praštevilski izrek dokazan. Celoten dokaz ni bil enostaven. Razviti smo morali kar nekaj teorije, predvsem v povezavi z neskončnimi produkti, izpeljali smo mnogo lastnosti Riemannove funkcije zeta in dokazali kar zahteven izrek kompleksne analize. Presenetljivo se izkaže, da je kompleksna analiza pogosto odgovor na probleme teorije števil. Bralec lahko podobne probleme najde v knjigi [3].

LITERATURA

[1] R. B. Ash and W. P. Novinger, *Complex Variables*, 2004, [ogled:5.7.2021], dostopno na: `https://people.math.sc.edu/girardi/m7034/book/AshComplexVariablesWithHyperlinks.pdf`.

[2] J. Lebl, *Guide to Cultivating Complex Analysis*, 2020, [ogled: 5.7.2021], dostopno na: `https://www.jirka.org/ca/ca.pdf`.

[3] T. M. Apostol, *Introduction to analytic number theory*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, California, 2000.