

NEKAJ O UPORABI ADS/CFT V FIZIKI KONDENZIRANE SNOVI

MARTIN ULAGA

Inštitut Jožef Štefan
Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Članek povzema nekaj rezultatov s področja korespondence AdS/CFT. To je dualnost ali ekvivalenca med močno interagirujočo kvantno teorijo polja z dodatno konformno simetrijo in teorijo gravitacije v anti de Sitterjevem prostoru. Zaradi omejitev oblike članka je zgolj naštetih nekaj konceptualnih vsebin dualnosti, več pozornosti pa je namene nekaterim elementom "slovarja" za prevajanje količin iz ene teorije v drugo. Članek se začne z AdS prostorom in nadaljuje z izračunom korelatorjev v vakuumu. V drugi polovici prispevka je orisana vpeljava termodinamskih okoliščin, ki so zanimive za aplikacijo v fiziki kondenzirane snovi: končna temperatura, entropija in gostota naboja.

Vsebina prispevka je sintetizirana iz več virov. Največ je črpano iz McGreevy 2009, ki tvori podlago za računske dele. Zelo uporabna in vsebinsko bistveno obsežnejša referenca pa sta mi tudi Zaanen in sodelavci 2015 ter Hartnoll, Lucas in Sachdev 2018.

ON THE APPLICATION OF ADS/CFT IN CONDENSED MATTER PHYSICS

The article summarises some notable results from the fields of the AdS/CFT correspondence. This is the duality or equivalence of a strongly interacting quantum field theory, equipped with a conformal symmetry, and the theory of gravitation in anti de Sitter space. Because of the form of this text only some of the conceptual ingredients of the duality with an emphasis on the "holographic cookbook" for transcribing physical quantities between the theories are listed. The article begins with a description of AdS spacetime and continues with the evaluation of simple correlators in a vacuum. The second half of this article sketches how temperature and other thermodynamic quantities, relevant for condensed matter physics, are introduced to the gravitational theory: temperature, entropy and charge density.

The contents of this article are a synthesis of several works. The main source is McGreevy 2009, which forms the basis for the mathematical parts. For their usefulness in the context of this article and their considerable scope I also mention Zaanen in sodelavci 2015 and Hartnoll, Lucas in Sachdev 2018.

1. Anti-deSitterjev prostor

Anti-de Sitterjev (AdS) prostor je maksimalno simetričen prostor s konstantno negativno kozmološko konstanto. Za maksimalno simetričen prostor velja, da je homogen in izotropen. V jeziku Killingovih vektorjev pa rečemo, da jih vsebuje največ možno. d -dimenzionalni maksimalno simetrični prostor poseduje $d(d+1)/2$ Killingovih vektorjev (Blau 2011, p.310). Riemannov tenzor, ki ustreza taki rešitvi Einsteinovih enačb, ima obliko

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{L^2}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}), \quad (1)$$

kjer je L^2 konstanta (včasih imenovana *radij*) in g metrični tenzor. De Sitterjev prostor lahko zapišemo na enak način, le gornji izraz dobi predznak minus. Riccijev tenzor je

$$R_{\mu\nu} = \frac{(d-1)}{L^2}g_{\mu\nu} \quad (2)$$

in Riccijev skalar je

$$R = \frac{d(d-1)}{L^2}. \quad (3)$$

Metrični tenzor v štiridimenzionalnem AdS prostoru (AdS₄) je rešitev Einsteinovih enačb v vakuumu

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad (4)$$

kjer je $2\Lambda = -R$ negativna kozmološka konstanta. Prostor ima metriko, ki je dana z dolžinskim elementom

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (-dt^2 + dy_1^2 + dy_2^2 + dz^2), \quad (5)$$

kjer so $t, y_i \in (-\infty, \infty)$ in $z \in (0, \infty)$. To je Poincaréjeva polravnina (cf. Socolovsky 2017, en. 3.31, kjer je uporabljena drugačna konvencija za signaturo). Izpostavimo pomembno lastnost AdS prostora, da je metrika invariantna na transformacijo skale

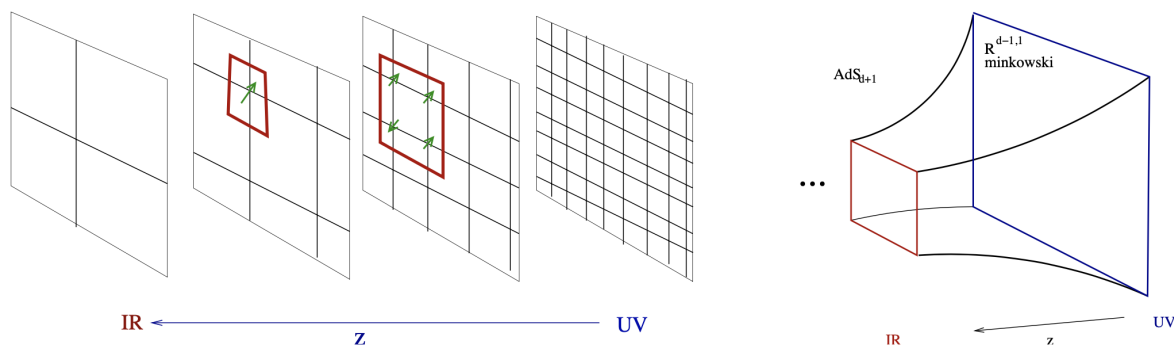
$$\{t, y_i, z\} \rightarrow \lambda\{t, y_i, z\}. \quad (6)$$

To spominja na od velikostne skale neodvisno obnašanje teorij v kritični točki. Po drugi strani na rezini s fiksnim z metrika opisuje plosk prostor v eni dimenziji manj. Izbiri $z = 0$ pravimo rob AdS prostora, ploskvi $z \rightarrow \infty$ pa *Poincaréjevo obzorje*. V enem izmed naslednjih razdelkov bomo tja postavili črno luknjo. Rob AdS prostora zaradi napihovanja metrike blizu njega ni dostopen po nobenem geodizijki s končno dolžino.

Za motivacijo AdS/CFT dualnosti je pomenljiva identifikacija dimenzije z in energijske skale. Tako “dodatno” dimenzijo v poljubni teoriji prikažemo kot fizično dimenzijo, ki pa v teorijo doda ukrivljenost. Premikanje v tej “energijski” dimenziji ustreza renormalizacijskemu toku, ki je tako geometriziran (ilustracija na sliki 1). Zaenkrat smo zapisali metriko prostora AdS₄, v dualnosti pa štiridimenzionalni prostor Minkowskega pogledamo kot rezino konstantnega z v petih dimenzijah. Metriko petdimenzionalnega AdS prostora zapišemo kot

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2), \quad (7)$$

kjer je $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Specifična rezina, ki vsebuje CFT stran dualnosti, se nahaja na robu AdS prostora oz. na majhni razdalji ϵ . Dovolj je, da ima petdimenzionalni prostor zgolj tu (torej, asimptotsko v $z \rightarrow 0$) metriko AdS prostora. V notranjosti ($z > 0$) prostora pa je dovoljena drugačna odvisnost g in tudi prisotnost polj. Vse to ima posledice na vsebino teorije na robu.



Slika 1. Ilustracija ideje renormalizacije (levo) in relacije do AdS prostora (desno). Prehajanje med energijskimi skalami v RG ustrza prehajanju med prostorskimi skalami, kar je v AdS prostoru izraženo v vrednosti z .

2. Kvantna teorija polja

Kvantno teorijo polja (KTP) opisuje particijska funkcija oz generacijski funkcional, ki ga zapišemo s Feynmannovim integralom

$$Z_{QFT} = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}, \quad (8)$$

kjer je ϕ kvantno polje in S akcija, dana z Lagrangevo gostoto. Integral je čez vse konfiguracije polj. Zaradi preprostosti obravnavamo skalarna polja ϕ , čeprav pravzaprav ničesar ne bomo izračunali znotraj te teorije polja (ravno to omogoča dualnost). Rešiti kvantno teorijo polja se običajno razume kot izračun korelacijskih funkcij, to so splošni objekti tipa

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) \dots \mathcal{O}_n(x_n) \rangle, \quad (9)$$

kjer so \mathcal{O} neki operatorji. To lahko izračunamo s pomočjo generacijskega funkcionala, kjer v akcijo za polje dodamo člen z izvorom¹ $j\mathcal{O}$. Potem je korelacijska funkcija dana z funkcionalnim odvodom $Z[j]$:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\delta}{\delta j} \log Z[j] \Big|_{j=0}. \quad (10)$$

Kvantno teorijo polja razumevamo tudi s konceptom renormalizacije, tj. vpeljavo neke referenčne energijske skale Λ , nakar od-integriramo prostostne stopnje nad oz. pod njo. V Sachdev 2011 najdemo shematski prikaz za razcepljeni polji $\phi = \phi_{<} + \phi_{>}$

$$Z = \int \mathcal{D}\phi_{<} \mathcal{D}\phi_{>} e^{iS[\phi_{<}, \phi_{>}]} = \int \mathcal{D}\phi_{<} e^{i\tilde{S}[\phi_{<}]}, \quad (11)$$

kjer renormalizirana akcija \tilde{S} vsebuje samo polja $\phi_{<}$ in renormalizirane sklopitvene konstante. Če od-integriramo visokoenergijske prostostne stopnje, govorimo o ultravijoličnem (UV) rezu. Predstava je sledeča: teorijo polja prestavimo na mrežo z osnovno celico z robom $\tilde{\epsilon}$, s čimer odstranimo fiziko, ki se dogaja na krajših razdaljah. Obratni primer je infrardeči (IR) rez, ki ga lažje razumemo v recipročnem prostoru. Dualnost AdS/CFT preslika UV v kvantni teoriji polja v IR v AdS prostoru. To je ravno omejitev na z nad neko vrednost ϵ v AdS₅. To lahko razumemo na sledeč način: motnje, ki izvirajo globoko iz območja $z \rightarrow \infty$ so med propagiranjem k robu podvržena rdečemu zamiku (v IR). Pot do roba ustreza neskončnemu rdečemu premiku, če pa se ustavimo pred robom, te motnje ne dosežejo prostostnih stopenj pod določeno energijo. Izkaže se, da je $\epsilon = \tilde{\epsilon}$, torej da sta ti dve regularizaciji točno ekvivalentni. V McGreevy 2009 je to podprto tudi s štetjem prostostnih stopenj v eni in drugi teoriji (razdelek 2.1).

3. Korelacijske funkcije v AdS prostoru

Glavna izjava holografske dualnosti je povzeta v t.i. pravilu GKPW (Gubser, Klebanov, Polyakov, Witten), ki je predpis za izračun količine v enačbi 10. Shematsko je tu povzeta po McGreevy 2009, več diskusije pa se nahaja v originalnem članku (Witten 1998):

$$Z_{QFT}[j] \equiv \langle e^{-\int j\mathcal{O}} \rangle = Z_{\text{kvantna gravitacija z robnim pogojem}}. \quad (12)$$

Desne strani te enačbe načeloma ne znamo izračunati, razen v posebnem primeru, ko lahko akcijo za kvantno gravitacijo izračunamo po metodi stacionarne faze. To je ekvivalentno semiklasični limiti v kvantni mehaniki. Klasična limita predstavlja omejitev za režim aplikabilnosti dualnosti na kvantne teorije polja z velikim številom prostostnih stopenj na mesto (t.i. *large-N approximation*, kar je svojevrstni teoretski problem). Robni pogoj za teorijo gravitacije postane, da je dodatno polje v AdS, ϕ , izvrednoteno na rezini $z = \epsilon$, enako izvoru j za operator \mathcal{O} . Tako lahko izračunamo

$$\langle e^{-\int j\mathcal{O}} \rangle \sim e^{iS_{\text{gravitacija}}|_{\phi(\epsilon)=j}}. \quad (13)$$

S tem receptom lahko torej korelacijske funkcije v kvantni teoriji polja izračunamo z objekti v gravitacijski teoriji. Dva primere korespondence polja v AdS in izvora v CFT sta:

1. V Maxwellovi teoriji je to denimo $J_\mu A^\mu$.

1. Tenzor energije in mase $T_{\mu\nu}$ je odziv na perturbacijo metričnega tenzorja. V CFT je torej "sklopljen" z inducirano metriko, označimo jo z $\gamma_{\mu\nu}$. V praznem prostoru je $\gamma_{\mu\nu} = (L/\epsilon)^2 \eta_{\mu\nu}$.
2. Tokovi j se sklapljajo z umeritvenimi polji A . Tok naboja je sklopljen z elektromagnetnim poljem. K temu primeru se vrnemo v kasnejšem razdelku.

3.1 Valovna enačba za skalarno polje

Osredotočimo se na najpreprostejši primer skalarnega polja v AdS_{d+1} prostoru. Sledeč McGreevy 2009 metriko zapišemo kot

$$ds^2 = L^2 \frac{dz^2 + dx_\mu dx^\mu}{z^2} \equiv g_{AB} dx^A dx^B, \quad (14)$$

torej grški indeksi referirajo na prostor Minkowskega ali na rezini ali robu AdS prostora (označimo ∂AdS), veliki latinski pa na AdS_{d+1} . Akcija za masivno skalarno polje je

$$S[\phi] = -\frac{1}{2} \int_{\text{AdS}} d^{d+1}x \sqrt{g} (g^{AB} \partial_A \phi \partial_B \phi + m^2 \phi^2 + \dots), \quad (15)$$

kjer je $g = |\det g_{AB}| = (L/z)^{d+1}$ determinanta metrike. Ker gre za skalarno polje, so parcialni odvodi enaki kovariantnim odvodom. Odvod po D_A potegnemo pred kinetični člen, da dobimo totalni odvod

$$\sqrt{g} D_A (g^{AB} \phi) \partial_B \phi = D_A (\sqrt{g} g^{AB} \phi \partial_B \phi) - \phi D_A (\sqrt{g} g^{AB} \partial_B \phi) \quad (16)$$

in nato za prvi člen na desni strani uporabimo Stokesov teorem

$$\int_{\text{AdS}} d^{d+1}x D_A (\sqrt{g} g^{AB} \phi \partial_B \phi) = \int_{\partial\text{AdS}} d^d x \sqrt{\gamma} \phi \partial_n \phi. \quad (17)$$

Tu je γ determinanta inducirane metrike in ∂_n odvod v smeri normale $\partial_n = n^A \partial_A$. Normala n kaže v smer z , torej je $\partial_n = (\sqrt{g_{zz}})^{-1} \partial_z = z/L \partial_z$. Ta robni člen se v primeru prostora Minkowskega lahko postavi na 0, tu pa igra vlogo robnega pogoja za polje v notranjosti prostora. Akcijo smo prepisali v obliko

$$S[\phi] = -\frac{1}{2} \int_{\text{AdS}} d^{d+1}x \sqrt{g} \phi (-D_A D^A + m^2) \phi - \frac{1}{2} \int_{\partial\text{AdS}} d^d x \sqrt{\gamma} \phi \partial_n \phi, \quad (18)$$

kjer prvi člen predstavlja gibalne enačbe za polje v notranjosti. Akcija za polja, ki so rešitev teh gibalnih enačb, je dana samo z robnim pogojem. Zdej lahko izračunamo polje ϕ z uporabo Fourierove transformacije v d dimenzijah:

$$\phi(z, x^\mu) = \sum_k e^{ik_\mu x^\mu} f_k(z), \quad k_\mu x^\mu = -\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}. \quad (19)$$

Ovodi po x^μ v valovni enačbi na nastavek delujejo samo kot množenje s k_μ , odvod po z pa kot je opisano v enačbi 16. Fourierova komponenta f_k torej zadošča enačbi

$$\left(g^{\mu\nu} k_\mu k_\nu - \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_z (\sqrt{g} g^{zz} \partial_z) + m^2 \right) f_k(z) = \quad (20)$$

$$L^{-2} \left(z^2 k^2 - z^{d+1} \partial_z (z^{-d+1} \partial_z) + m^2 L^2 \right) f_k(z) = 0. \quad (21)$$

Upošteval sem, da je $g^{\mu\nu} = z^2/L^2\eta^{\mu\nu}$. Rešitve te enačbe so modificirane Besslove funkcije. Za razliko od navadnih Besslovih funkcij imajo te eksponentno naraščujoče oziroma padajoče obnašanje namesto osciliranja. V limiti $z \rightarrow 0$ pa lahko uporabimo preprostejši potenčni nastavek $f_k = z^\Delta$. Dobimo

$$(k^2 z^2 - \Delta(\Delta - d) + m^2 L^2) z^\Delta = 0, \quad (22)$$

kar se za $z \rightarrow 0$ prepiše v

$$\Delta(\Delta - d) = m^2 L^2 \quad (23)$$

z rešitvama

$$\Delta_{\pm} = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + m^2 L^2}. \quad (24)$$

Rešitvi sta različno predznačeni - tista z Δ_+ ob bližanju roba pade proti 0, tista z Δ_- pa divergira. Govorimo o "normalizabilnih" in "nenormalizabilnih" rešitvah. Asimptotsko obnašanje zapišemo kot

$$\phi(z, x) \approx z^{\Delta_-} \phi_0(x) + z^{\Delta_+} \phi_1(x), \quad z \rightarrow 0. \quad (25)$$

Izpadajoča rešitev je tista, ki jo povežemo z robnim pogojem. Taka rešitev mora biti kompatibilna z izometrijami AdS prostora. Ena izmed njih je invariantnost na $z \rightarrow \lambda z$. Zaradi nje mora potenčno obnašanje spremljati člen, ki skalira obratno, tj. $\phi_0 \rightarrow \lambda^{-\Delta_-} \phi_0$, če naj bo ϕ invarianten. Ta koeficient je določen z robnim pogojem, da je polje ϕ na robu $z = \epsilon$ enako izvoru j za operator \mathcal{O} . Ta sta sklopljena na robu, zato \mathcal{O} skalira z Δ_+ (v jeziku renormalizacijske grupe temu pravimo tudi skalirna dimenzija), ki je dana z maso polja ϕ (glej en. 24).

3.2 Pričakovane vrednosti v KTP

Asimptotsko obnašanje polja ϕ lahko zdaj uporabimo za izračun pričakovane vrednosti $\langle \mathcal{O} \rangle$. Uporabimo pravilo GPKW, da zapišemo

$$\langle \mathcal{O}(x) \rangle = \frac{\delta \log Z_{QFT}}{\delta j(x)} = i \frac{\delta}{\delta \phi_0(x)} S_g[\phi(\epsilon, x) = j(x)], \quad (26)$$

torej računamo variacijo akcije skalarnega polja v AdS. Za izračun akcije vpeljemo rob pri $z = \epsilon$, ki ga bomo na koncu limitirali proti 0. Od akcije ostane le robni prispevek

$$\langle \mathcal{O}(x) \rangle = -\frac{i}{2} \frac{\delta}{\delta \phi_0(x)} \int_{z=\epsilon} d^d x' \sqrt{\gamma} \phi(x') n^\mu \partial_\mu \phi(x'), \quad (27)$$

$$\partial_z \phi = \Delta_- \phi_0 z^{\Delta_- - 1} + \Delta_+ \phi_1 z^{\Delta_+ - 1}, \quad (28)$$

$$(\phi \partial_z \phi)|_{z=\epsilon} = \Delta_- \phi_0^2 \epsilon^{2\Delta_- - 1} + (\Delta_- + \Delta_+) \phi_0 \phi_1 \epsilon^{\Delta_- + \Delta_+ - 1} + \dots \quad (29)$$

Zdaj lahko vstavimo inducirano metriko $\sqrt{\gamma} = (L/\epsilon)^d$ in normalo, ki tokrat kaže v smeri roba $n = -\epsilon/L\partial_z$. Variacija po $\phi_0(x)$ bo prispevala $\delta(x - x')$, upoštevamo pa še, da je $\Delta_- + \Delta_+ = d$. Ker je $|2\Delta_-| < d$, prvi člen v vrstici 29 divergira, vendar se ga da sistematično renormalizirati². Drugi člen da končno vrednost, ki je proporcionalna ϕ_1 . Povedano z enačbo,

$$\langle \mathcal{O}(x) \rangle \propto \phi_1. \quad (30)$$

2. Glej diskusijo v McGreevy 2009, str. 33-34. Kmalu za tem se nahaja tudi opis postopka za obvladovanje sklopljenih polj z rekurzivnim postopkom.

To lahko združimo z zahtevo, da je $j \sim \phi_0$, da povemo nekaj o Greenovi funkciji. V teoriji linearnega odziva lahko napišemo $\delta\langle\mathcal{O}\rangle = \delta\phi_0 G$, iz česar shematsko sledi

$$G_{\mathcal{O}\mathcal{O}}(\omega, k) = \langle\mathcal{O}\mathcal{O}\rangle \sim \frac{\text{“odziv”}}{\text{“motnja”}} \sim \frac{\langle\mathcal{O}\rangle}{j} \sim \frac{\phi_1}{\phi_0}. \quad (31)$$

Točne predfaktorje v tem izrazu najdemo v Zaanen in sodelavci 2015, razdelek 5.1. Hitra skalirna analiza iz prejšnjega razdelka nam sugerira, da ima taka Greenova funkcija prostorsko odvisnost $|x|^{-2\Delta_+}$, kar je skladno z prejšnjo identifikacijo Δ_+ kot skalirne dimenzije za \mathcal{O} . Izvrednotenje korelacijskih funkcij je tako ekvivalentno reševanju diferencialne enačbe z danim robnim pogojem. Postopek postane bolj kompliciran, če gre za vektorska ali umeritvena polja.

4. Oris povezav z “kvantno materijo”

Greenova funkcija, ki smo srečali v prejšnjem razdelku, v teoriji linearnega odziva vsebuje informacije o transportnih koeficientih. Gre za proporcionalnost odziva snovi, tj. pričakovane vrednosti tokov, v novem ravnovesnem stanju, v katerega se premakne sistem v prisotnosti motenj. Transportni koeficienti so navadno kompleksni: realni del je povezan s ravnovesnimi količinami (denimo električna prevodnost), imaginarni del pa z disipativnimi procesi. Tu se ne morem posvetiti podrobnostim konkretnih izračunov katere izmed teh količin, lahko pa na koncu navedem en slaven rezultat.

Ena izmed trenutno zelo zanimivih raziskovalnih usmeritev je aplikacija holografske dualnosti na sisteme močno interagirajočih elektronov, tj. fiziko kondenzirane snovi. Aplikacija ni direktna v smislu, da ponuja možne razlage za eksperimente, ampak služi bolj za teoretsko paradigmo v razumevanju (tako Zaanen in sodelavci 2015), kaj sestavlja materijo, kdaj lahko zanjo govorimo, da je kvantna, in kaj lahko povemo o njej. Kvantno materijo lahko opredelimo kot stanja sistema elektronov, ki kažejo znake kvantne prepletenosti na makroskopski ravni. Teoretsko zanimivi primeri so denimo t.i. kvantne Hallove tekočine, kvantno vsebino pa ima tudi preprost elektronski oz. Fermijev plin.

V tem razdelku nesistematično povzamem sestavine kondenzirane snovi z vidika teorije gravitacije.

4.1 Končna temperatura

Schwazschildova rešitev Einsteinovih enačb v vakuumu in asimptotsko ploskem 3+1 dimenzionalnem prostoru je

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (32)$$

kjer je $f(r) = 1 - 2GM/r$ temnilni faktor (*emblackening factor*) in $d\Omega^2$ element prostorskega kota. G je Newtonova konstanta, M pa interpretiramo kot maso črne luknje. V limiti $r \rightarrow \infty$ temnilni faktor teži k 1 in prostor postaja plosk. V točki $r_0 = 2GM$ je $f(r_0) = 0$, čemur pravimo obzorje črne luknje, se nahaja koordinatna singularnost, ki pa jo lahko prečimo z izbiro bolj sofisticiranega koordinatnega sistema. S to črno luknjo je asociirana Hawkingova temperatura

$$T_S = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B GM}, \quad (33)$$

kjer je \hbar reducirana Planckova konstanta, c svetlobna hitrost in k_B Boltzmannova konstanta (vse te z izbiro enot postavimo na 1). Ta rezultat se običajno dobi s pomočjo Wickove rotacije v imaginarni čas $t \rightarrow i\tau$. Konični singularnosti v r_0 smo se izognili tako, da smo Evklidski čas τ proglasili za periodičen s periodo $1/T_S$. Črne luknje so torej termalni objekti. Enak rezultat da tudi Hawkingov

kvantnomehanski izračun, vendar je postopek z Wickovo rotacijo za holografski primer zaradi svoje klasičnosti bolj nazoren.

Zelo podobna metrika velja tudi za asimptotsko AdS prostor. Podana je z

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (-f dt^2 + \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + f^{-1} dz^2), \quad (34)$$

temnilni faktor pa je tu $f(z) = 1 - (z/z_0)^d$, kjer je z_0 horizont³. Temnilni faktor se približuje 1 za $z \rightarrow 0$, torej je geometrija pri robu asimptotsko AdS. Podobno kot za asimptotsko plosko metriko lahko tudi tu naredimo Wickovo rotacijo in v bližino horizonta odpravimo konično singularnost z vpeljavo periodičnega Ekvilidskega časa (podrobnosti so v McGreevy 2009, str. 43-47, ali Zaanen in sodelavci 2015, str. 183-185). Hawkingova temperatura v naravnih enotah se glasi

$$T = \frac{d}{4\pi z_0}. \quad (35)$$

Opazimo lahko, da masa $M \sim z_0^{-1}$ nastopa na drugi strani ulomka v primerjavi s črno luknjo v ravnem prostoru (enačba 33). Izkaže se, da je to izraz tudi za temperaturo teorije polja na robu AdS prostora, saj ima rob AdS prostora isto periodičnost v τ . Če prazen AdS prostor dualizira vakuum v kvantni teoriji polja, Schwarzschildova črna luknja dualizira termična stanja.

Omenimo še Bekensteinovo entropijo črne luknje. Dana je s površino dogodkovnega obzorja

$$S = \frac{A}{4G} = k_B \frac{A}{4\ell_P^2}, \quad (36)$$

kjer je $\ell_P = \sqrt{G\hbar/c^3}$ Planckova dolžina. To površino lahko izračunamo z integralom po x^μ pri obzorju $z = z_0$ in fiksnem času

$$A = \int_{z=z_0, \text{ fiksni } t} d^{d-1}x \sqrt{g} = \left(\frac{L}{z_0}\right)^{d-1} V. \quad (37)$$

Kot smo videli v enačbi 35, je položaj obzorja povezan s temperaturo črne luknje $T \sim z_0^{-1}$. Od tu dobimo skalirno obliko za entropijo $S \sim T^{d-1}$. Ob odsotnosti internih energijskih skal v teoriji - torej v kritični točki - je to ravno oblika, ki jo pričakujemo. Fizikalen pomen ima sicer prefaktor pri tem skaliranju, ki ga nisem izračunal (v $\mathcal{N} = 4$ supersimetrični Yang-Mills teoriji je ta prefaktor enak $\pi^2 N^2/2$).

4.2 Končna gostota

Na podlagi korespondence med Hawkingovo temperaturo črne luknje in termičnostjo kvantne teorije polja, ki je orisana v prejšnjem razdelku, lahko (z veliko dodatnimi koraki in subtilnostmi, glej McGreevy 2009, str. 45-46) izračunamo prsto energijo KTP kot $F = -\log Z_g$. Ta je zaenkrat oblike

$$F = E - TS, \quad (38)$$

radi pa bi k temu dodali še člen $-\rho\mu$. S tem bi se približali situaciji denimo v kovini, kjer velja ohranitev naboja. Po teoremu Nötherjeve je s to simetrijo povezan nabojni tok J^μ , ki je v dualni teoriji sklopljen z umeritvenim Maxwellovim poljem A^μ . Opravka imamo torej z AdS Einstein-Maxwellovo teorijo z akcijo

3. Metrika je tu še vedno v Poincaréjevih koordinatah sledeč McGreevy 2009. To ni izbira pri vseh avtorjih; Zaanen in sodelavci 2015 ter Socolovsky 2017 delajo v koordinatah, kjer je metrični element radialne koordinate z invertiran, tj. $z = 0$ ustreza notranjosti črne luknje namesto ∂AdS .

$$S = \int d^{d+1}x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) - \frac{1}{4g^2} F^2 \right\}, \quad (39)$$

kjer je g sklopitvena konstanta za A_μ in $F^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Obstoj nabojev na robu z gostoto ρ je robni pogoj za polje A_μ , ki mora imeti nekakšne izvore v notranjosti. To je nabita črna luknja (*Reissner-Nordström black hole*), ki ima v asimptotsko AdS prostoru metriko

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (-f dt^2 + \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + f^{-1} dz^2) \quad (40)$$

s temnilnim faktorjem

$$f(z) = 1 - Md^d + Qz^{2d-2}, \quad (41)$$

kjer je M masa in Q naboj. Podobno kot v asimptotsko ravnem prostoru ima nabita črna luknja potencialno dve obzorji, ki ločujeta kavzalno povezane regije AdS prostora. Obzorji lahko tudi sovpadata, v tem primeru govorimo o ekstremalni črni luknji. Maso M , naboj Q in gostoto nabojev ρ je mogoče izraziti s temperaturo, kemijskim potencialom μ in sklopitveno konstanto g (Hartnoll, Lucas in Sachdev 2018, str. 60-62).

5. Dva hidrodinamska rezultata

V tem razdelku na hitro predstavim holografske račune za dva transportna koeficienta: viskoznost η in prevodnost σ . Računa vsebujeta mnogo podrobnosti, za katere tu ni prostora. Filozofija postopka pa je v bistvu enaka: v teoriji linearnega odziva je transportna limita dolgovalovni ($k \rightarrow 0$) in neskončno počasni ($\omega \rightarrow 0$) način pranašanja ohranjenih količin po sistemu (limiti ne komutirata, gl. Luttinger 1964). To lahko povzamemo s Kubojevo formulo v frekvenčnem prostoru

$$\delta\langle \mathcal{O} \rangle = \lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} i\omega G_{\mathcal{O}\mathcal{O}}^R(\omega, k) \equiv i\omega \chi_{\mathcal{O}\mathcal{O}}, \quad (42)$$

kjer je χ posplošena susceptibilnost oziroma transportni koeficient, G^R pa retardirana Greenova funkcija. Za nabojni tok je susceptibilnost dana kot korelacijska funkcija tok-tok, z uporabo Ohm-vega zakona pa jo povežemo s prevodnostjo. Hidrodinamiko lahko razumemo kot naslednji korak od teorije linearnega odziva, saj gre za sistematično vključevanje višjih odvodov in mešanih odvodov v odzivno funkcijo. Tu ostajamo pri prvem redu hidrodinamike, račun pa, kot omenjeno, vključuje zapis diferencialnih enačb za izvorna polja v AdS prostoru in njihovo rešitev ob primernem robnem pogoju. Nato iz rešitve z uporabo pravila GPKW razberemo funkcijsko odvisnost v retardirani Greenovi funkciji G^R , ki v transportni limiti da zeleni rezultat.

5.1 Minimalna viskoznost

Ta račun je bil zgodovinsko eden izmed prvih holografskih rezultatov. V resnici gre za velik uspeh holografske dualnosti, saj so teoretski rezultat lahko primerjali z eksperimentalnimi rezultati dinamike visokoenergijske plazme gluonov in kvarkov (Kovtun, Son in Starinets 2004; Shuryak 2004) in opazili zmerno ujemanje.

V splošni teoriji relativnosti dinamiko mase zapišemo s tenzorjem energije in momenta, ki uboga relativistične Navier-Stokesove enačbe za tekočine

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (43)$$

Tenzor lahko izračunamo iz mikroskopske teorije kot variacijo akcije po metriki, v hidrodinamiki pa privzamemo gledišče razvoja $T_{\mu\nu}$ po gradientih hitrostnega polja in hidrostatskega pritiska.

Tekočina prav tako uboga določene konstitutivne relacije, kot so kontinuitetne relacije za ohranjene količine. Glede vseh teh zakonitosti na tej točki ostajamo agnostični in se osredotočimo zgolj na transport gibalne količine v skoraj idealni tekočini. Viskoznost je povezana s transverzalnimi izgubami gostote gibalne količine, torej

$$\eta = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\text{Im}G_{T_{xy}T_{xy}}^R(\omega, k=0)}{\omega}, \quad (44)$$

kjer zaradi disipativne narave procesa potrebujemo le imaginarni del G^R . Kot omenjeno, se izračun Greenove funkcije reducira na reševanje diferencialnih enačb za dualno polje v notranjosti AdS. To je v primeru tenzorja energije in momenta kar metrični tenzor, izgube momenta pa so kot robni pogoj zapisane kot tok gravitonov (perturbacij metrike) v črno luknjo (za rezultate pri končni temperaturi mora AdS prostor vsebovati črno luknjo).

Izkaže se, da je rezultat takega računa (podrobnosti se nahajajo v Zaanen in sodelavci 2015, str. 230-238) povezava med viskoznostjo in lastnosmi črne luknje, ki ravno sestavljajo entropijo

$$\frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi} \frac{\hbar}{k_B}, \quad (45)$$

kjer je s gostota entropije $S/V = A/(4GV)$ ("gostota površine obzorja"). Ta rezultat predstavlja omejitev za približevanje idealni tekočini, kot jo lahko realizirajo močno interagirajoči kvantni sistemi. Na podlagi te omejitve obstajajo tudi hipoteze o spodnjih mejah za bolj splošne transportne koeficiente v kvantni materiji (Hartnoll 2014).

5.2 Prevodnost

Kot omenjeno je za končno gostoto naboja v notranjosti AdS prostora potrebna prisotnost Maxwellovega polja. Akcija je dana z enačbo 39 na ozadju z nabito črno luknjo, ki je izvor električnega polja. Tu se omejimo na bolj enostaven primer brez nabojev ($Q = 0$) sledeč Zaanen in sodelavci 2015. Prevodnost lahko z Ohmovim zakonom prepisemo v Kubovo formulo

$$\sigma(\omega) = \frac{\text{Im}G_{J_x J_x}^R(\omega, k=0)}{\omega}, \quad (46)$$

kjer je J_x nabojni tok v smeri x kot posledica polja E_x . Ta se v AdS dualizira v polje A_μ , za katero je potrebno izbrati še umeritev. Uporabimo nastavek

$$A_x(t) = \int d\omega a_x(z, \omega) e^{i\omega t}, \quad (47)$$

kjer smo se v skladu s transportno limito omejili na $k = 0$. Komponente a_x so rešitve Maxwellovih enačb v ukrivljenem prostoru, kot jih dobimo iz variacije akcije:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\nu\alpha}) = 0. \quad (48)$$

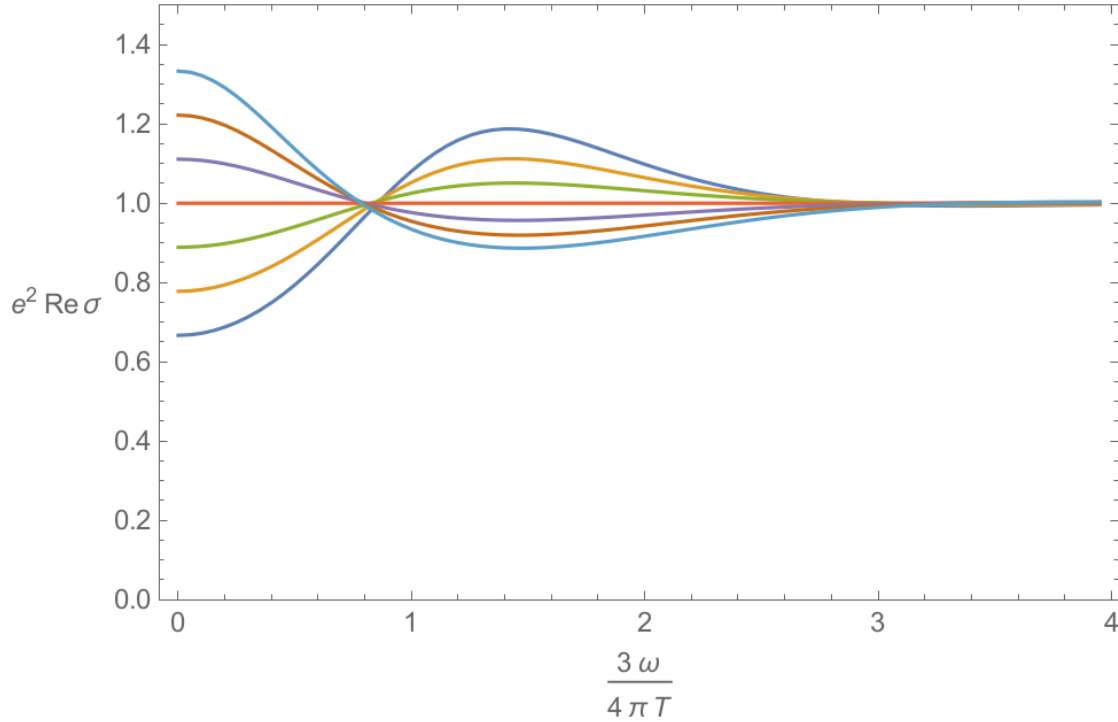
Za rešitev potrebujemo še robni pogoj. Podobno kot v prejšnjem razdelku je robni pogoj za $a_x(z, \omega)$ dan s tokom delcev - fotonov - v črno luknjo. Nato zopet uporabimo pravilo GPKW, da zapišemo Greenovo funkcijo. Izkaže se (podrobnosti v Zaanen in sodelavci 2015, str. 249-253), da je prevodnost pri končni temperaturi, limiti $N \rightarrow \infty$, dveh dimenzijah in brez gostote naboja konstantna

$$\sigma(\omega/T) = \frac{1}{g^2}. \quad (49)$$

V kovinah ipd. seveda opazimo bistveno drugačno obnašanje. Rezultat se da do neke mere posplošiti. Prvi popravek k akciji za elektromagnetno polje je člen v akciji, ki je proporcionalen

$$\frac{\gamma L^2}{g^2} C_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}, \quad (50)$$

kjer je γ brezdimenzijski parameter in $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ Weylov tenzor. Dodajanje tega člena ima dve posledici. Prva je zlomitev samo-dualnosti Maxwellovega polja brez izvorov, torej ekvivalentnost električnih in magnetnih nabojev. Druga je netrivialna odvisnost $\sigma(\omega/T)$, ki jo da holografski izračun. Rezultat je narisano na sliki 2.



Slika 2. Holografski rezultat za prevodnost pri končnem γ med $-1/12$ (spodaj pri ordinatni osi) in $1/12$ (zgoraj). Rdeča črta ustreza $\gamma = 0$. Povzeto po Hartnoll, Lucas in Sachdev 2018.

6. Zaključki

V članku sem opisal pristop k razumevanju močno koreliranih faz snovi, kot jih nudi holografska dualnost. V zadnjih petnajstih letih je to postalo zelo živo področje v povezavi s fiziko kvantnih kritičnih faz v snoveh, kot so grafen, visokotemperaturni superprevodni kuprati ipd. Zaradi formata sem izpustil večino računske vsebine in poskušal izluščiti splošne pomene oziroma filozofijo. Rezultat je, upam, vsaj v enaki meri informativna kot površna impresija t.i. pokrajine AdS/CMT (CMT - *condensed matter physics*) - kaj lahko izračunamo in okvirno kako. S podobnimi metodami *state-of-the-art* rezultati vključujejo komplicirane faze z zlomljenimi simetrijami, superprevodnimi ureditvenimi parametri, korelirane Fermijeve in ne-Fermijeve površine, Hallove tekočine itd. Nekatere izmed teh faz so obravnavane v citirani literaturi. Gre za netrivialne povezave med na videz povsem ločenimi kontinenti fizike, kar tovrstnim znanjem po mnenju avtorja daje skrajno zanimive kvalitete.

Literatura

- Blau, Matthias. 2011. *Lecture notes on general relativity*. Albert Einstein Center for Fundamental Physics. <http://www.blau.itp.unibe.ch/newlecturesGR.pdf>.
- Hartnoll, Sean A. 2014. *Theory of universal incoherent metallic transport*. arXiv: 1405.3651 [cond-mat.str-el].
- Hartnoll, Sean A, Andrew Lucas in Subir Sachdev. 2018. *Holographic quantum matter*. MIT press.
- Kovtun, P., D. T. Son in A. O. Starinets. 2004. "Viscosity in Strongly Interacting Quantum Field Theories from Black Hole Physics". arXiv: hep-th/0405231 [hep-th].
- Luttinger, JM. 1964. "Theory of thermal transport coefficients". *Physical Review* 135 (6A): A1505.
- McGreevy, John. 2009. "Holographic duality with a view toward many-body physics". arXiv: 0909.0518 [hep-th].
- Sachdev, Subir. 2011. *Quantum Phase Transitions*. Cambridge University Press.
- Shuryak, E. V. 2004. "What RHIC Experiments and Theory tell us about Properties of Quark-Gluon Plasma". arXiv: hep-ph/0405066 [hep-ph].
- Socolovsky, M. 2017. *Schwarzschild Black Hole in Anti-De Sitter Space*. arXiv: 1711.02744 [gr-qc].
- Witten, Edward. 1998. *Anti De Sitter Space And Holography*. arXiv: hep-th/9802150 [hep-th].
- Zaanen, Jan, Yan Liu, Ya-Wen Sun in Koenraad Schalm. 2015. *Holographic duality in condensed matter physics*. Cambridge University Press.