

GEOMETRIJA FOUCAULTOVEGA NIHALA

GREGA SAKSIDA

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

51M09, 53A05, 70A05

Članek z elementarno matematiko in fiziko razišče vrtenje nihajne ravnine Foucaultovega nihala. Kot zasuka ravnine poveže z geometrijo gravitacijskega polja Zemlje, katere površje je v približku popolne sfere ekvipotencialna ploskev polja. Izpelje odvisnost kota zasuka od geografske širine nihala in trajanja opazovanja. Z Gauss-Bonnetovim izrekom iz diferencialne geometrije nato izsledke kratko posploši na ekvipotencialne ploskev poljubnih polj v prostoru.

THE GEOMETRY OF THE FOUCAULT PENDULUM

The article examines the rotation of the swing plane of the Foucault pendulum. It employs only elementary mathematics and physics. It relates the angle of rotation of the plane to the geometry of the Earth's gravitational field, which is in the approximation of a perfect sphere an equipotential surface of the field. The magnitude of the rotation is expressed as a function of geographical latitude of the pendulum and length of the observation period. Finally, using the Gauss-Bonnet theorem of differential geometry, the results are briefly generalised to equipotential surfaces of arbitrary fields space.

1. Uvod

Foucaultovo nihalo, imenovano po Léonu Foucaultu, je priljubljena fizikalna naprava za prikaz vrtenja Zemlje okoli svoje osi. Velika utež je obešena tako, da lahko niha v poljubni smeri. Nihajna ravnina se tako ne vrti skupaj z Zemljo. Lahko bi rekli, da se tla vrtijo pod njo. Manj poznana posebnost nihala pa je, da obrata ne zaključi v enem dnevu, kot bi naivno pričakovali. Izjemi sta pola, kjer opravi obrat v natanko enem dnevu. Na ekvatorju se nihajna ravnina ne vrti glede na tla.

V članku bomo z geometrijskega vidika raziskali mehanizem in lastnosti tega vrtenja. Večina člankov na to temo obnašanje nihala raziskuje z uporabo Coriolisove sile ali pa z geometrijskega vidika, a z vektorsko analizo. V tem članku pa bosta z izjemo razdelka 4.4 uporabljeni zgolj elementarna matematika in fizika. Začeli bomo s fizikalno motivacijo iskanja krivulj na ploskvah, ki se obnašajo kot premice, v razdelku 2., ter nato v razdelku 3. poiskali take krivulje na sferi. Izpeljali bomo še nekatere rezultate sferne geometrije, ki jih bomo potrebovali kasneje, denimo površino sfernega trikotnika.

Nato bomo v razdelku 4. postopoma povezali spreminjanje nihajne ravnine nihala z geometrijskimi lastnostmi sfere in naposled v razdelku 4.4 kratko nakazali še posplošitev na ostale ukrivljene ploskve. Bralec si lahko več o diferencialni geometriji prebere v viru [5], predvsem v razdelkih II.1–II.4 in IV.3. Več od Gauss-Bonnetovem izreku lahko bralec najde v viru [2] v poglavju 13, predvsem v 13.1 in 13.2.

V celotnem članku bomo kroženje Zemlje okoli Sonca kot pospešeno gibanje zanemarili.

2. Prvi Newtonov zakon na ploskvah

Spomnimo se prvega Newtonovega zakona: *telo, na katerega ne deluje nobena sila ali pa je vsota vseh sil nanj enaka 0, miruje ali se giblje enakomerno premočrtno*. Osredotočimo se na premočrtnost. V trirazsežnem evklidskem prostoru se telesa, na katera sile ne delujejo, gibljejo po premicah.

Zamislimo si sedaj poljubno gladko ploskev v \mathbb{R}^3 , ki je lahko ukrivljena. Ploskev naj bo gladka tako v matematičnem smislu: nima ostrih kolen, kot v fizikalnem: trenja na ploskvi ni. Postavimo

na to ploskev telo in predpostavimo, da se ploskev ukrivlja proč od telesa, ne proti njemu (denimo telo na zunanji površini sfere). Dodelimo telesu neko hitrost, recimo s kratkotrajnim sunkom sile, v smeri tangентno na ploskev. Po prvem Newtonovem zakonu se telo po sunku giblje enakomerno premočrtno. Premica, po kateri se telo giblje, pa seveda ne sledi nujno ploskvi, saj je ta ukrivljena. Vemo le, da je premica tangентna na ploskev v točki začetnega položaja telesa.

Če naj se telo giblje po ukrivljeni ploskvi, mora nanj ves čas delovati primerna sila, ki ga na ploskvi zadržuje. Takšno silo lahko razdelimo na dve komponenti: prva naj bo normalna na ploskev, druga pa tangентna. Normalna komponenta sile telo zadržuje na ploskvi. Nanj ne opravlja dela, saj je stalno pravokotna na tir telesa, spreminja pa smer njegovega gibanja. Tangентna komponenta telo pospešuje po ploskvi. Spreminja lahko tako velikost hitrosti telesa kot tudi njegovo smer vzdolž ploskve, ne zadržuje pa telesa na ploskvi.

Če želimo telo zadržati na ploskvi, je torej dovolj, da nanj deluje le sila v smeri normale na ploskev. Za opazovalca, omejenega na ploskev, je ta sila vseprisotna in bi jo morda obravnaval kot mi obravnavamo silo teže na Zemlji. Sila teže je namreč primer prav takšne sile: če obliko Zemlje poenostavimo na popolno kroglo, je sila teže ves čas normalna na podlago, saj kaže venomer proti središču Zemlje. Odgovorna je, da telesa ostanejo "prilepljena" na zemeljsko površje.

Zamislimo si, da je Zemlja povsem brez terenskih ovir, torej brez hribov in dolin ali podobnega. Če bi na taki Zemlji brcnili žogo v vodoravni smeri in na žogo ne bi delovala nobena sila, torej niti sila teže, niti sila podlage, niti sila upora, niti sila trenja, bi žoga potovala brez zavijanja po ravni premici in sčasoma zapustila Zemljo, ko bi se ta ukrivila proč od nje. Žoge nič ne bi sililo, da sledi ukrivljenemu zemeljskemu površju, zato bi potovala po premici v \mathbb{R}^3 , ki pa je tangентna na Zemljo. Seveda tega ne bi takoj opazili, saj se Zemlja zaradi svoje velikosti zelo počasi ukrivlja.

Nadaljujmo z istim primerom, a naj tokrat na žogo delujeta sili teže in podlage. Obe sta pravokotni na ploskev (sile trenja ni). Skupaj ti sili telo zadržujeta na ploskvi. V lokalnem sistemu ploskve, to je sistem, v katerim živi prebivalec Zemlje, je žoga v ravnovesju. Ko žogo brcnemo, bo ta drsela po površju Zemlje v nedogled. Žoga ne zavija v smeri vzdolž ploskve (natančneje povedano: pospešek nima tangентne komponente), saj nanjo ne deluje nobena sila, tangентna na ploskev, zato bi lahko gibanje žoge označili kot enakomerno premočrtno po sferi, tir gibanja žoge pa kot premico na sferi. Tir žoge pa seveda ni premica v \mathbb{R}^3 , zato žoga očitno ni v ravnovesju v zunanjem (vesoljnem) inercialnem sistemu, ki ni odvisen od ploskve (to je na primer sistem vesoljca, ki Zemljo opazuje od daleč). Za telesa, omejena na ploskev, bi zato lahko uvedli inercialnemu sistemu prilagojeno različico prvega Newtonovega zakona, ki je enakovreden navadnemu Newtonovemu zakonu v lokalnem sistemu ploskve. Pogoj, da na telo, omejeno na ploskev, ne deluje nobena sila ali pa je njihova vsota enaka 0, lahko spremenimo v pogoj, da v zunanjem inercialnem sistemu na telo delujejo zgolj sile v normalni smeri ali pa ima vsota vseh sil smer normale na ploskev.

Takšno telo se ne giblje več enakomerno premočrtno z vidika \mathbb{R}^3 . Giblje se po krivulji na ploskvi, ki ne zahteva zavijanja vzdolž ploskve, velikost hitrosti telesa pa je konstantna. Spomnimo se, da normalne sile na telo ne opravljajo dela in mu zato velikosti hitrosti ne spreminjajo, prav tako pa mu ne spreminjajo smeri vzdolž ploskve (to je tangентno na ploskev). Takšnim krivuljam v diferencialni geometriji pravimo *geodetske krivulje* ali *geodetke*, v tem članku pa jih bomo imenovali kar *premice na ploskvi*. Povzemimo zadnja odstavka v naslednji definiciji.

Definicija 1. *Premica na ploskvi* je krivulja na ploskvi, po kateri se telo, omejeno na ploskev, giblje, če v zunanjem inercialnem sistemu nanj delujejo le sile, usmerjene normalno na ploskev, ali če je vsota vseh sil nanj usmerjena normalno na ploskev.

Definicija bi lahko bila malo manj stroga, a bi porodila iste rezultate. Ker nas zanima le premočrtnost na ploskvi, je v zgornji definiciji dovolj zahtevati že, da na telo v vsakem trenutku delujejo le sile, ki so bodisi normalne na ploskev bodisi tangентne na trenutno smer gibanja telesa. Dovolimo

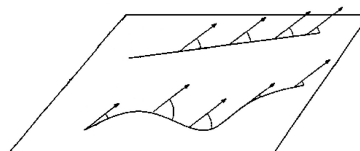
torej, da je telo pospešeno v smeri svojega gibanja. Zahteva, da so vse sile na telo normalne na ploskev, nam doda enakomernost gibanja.

V diferencialni geometriji se geodetske krivulje definira kot tiste naravno parametrizirane krivulje $\vec{\gamma}$, katerih drugi odvod po naravnem parametru, $\vec{\gamma}''$, je pravokoten na krivuljo $\vec{\gamma}$. Več o tem si lahko bralec prebere v viru [5, razdelek IV.3]. Omenimo še, da so lokalno, a ne nujno globalno, geodetske krivulje tudi krivulje najkrajših razdalj: najkrajša pot med dvema točkama na ploskvi je del neke geodetske krivulje, ki poteka skozi ti dve točki.

2.1 Vzoredni premik

Še zadnjič se vrnimo h gibajoči se žogi na Zemlji. Če je rezultanta sil na žogo v lokalnem sistemu Zemlje enaka 0, se vektor njene hitrosti (ali pa gibalne količine) v tem sistemu ne spreminja, saj se žoga giblje enakomerno premočrtno. V zunanjem inercialnem sistemu pa rezultanta sil na žogo ni enaka 0 in se vektor hitrosti ne ohranja. Žoga namreč potuje po (glavni) krožnici, ki ni premica v \mathbb{R}^3 . Premiku vektorja po ploskvi, pri katerem se vektor v lokalnem sistemu ploskve ne spremeni, pravimo *vzoredni premik po ploskvi*. Bralcu bo poznan vsaj vzoredni premik vektorja v evklidski ravnini: to je translacija vektorja, kot smo je vajeni. Če je v lokalnem sistemu Zemlje rezultanta sil na gibajočo se žogo enaka 0, je vektor hitrosti žoge podvržen vzorednemu premiku po Zemlji.

Očitno je, da se kot med premico in vektorjem, ki ga vzoredno premikamo vzdolž nje, ne spreminja. Nasprotno pa se kot med neko poljubno ravninsko krivuljo in vektorjem, ki ga vzoredno premikamo vzdolž nje, lahko spreminja. Kot med vektorjem in krivuljo je kot med vektorjem in tangento nanjo. Bralcu je v pomoč lahko slika 1. Podobno se tudi kot med premico na ploskvi in vektorjem, ki ga vzoredno premikamo po ploskvi vzdolž te premice, ne spreminja. Kot med poljubno krivuljo na ploskvi in vektorjem, ki ga vzoredno premikamo po ploskvi vzdolž te krivulje, pa se lahko spreminja. To dejstvo nam bo prišlo prav pri razumevanju sukanja nihajne ravnine Foucaultovega nihala.



Slika 1. Pri vzorednem premiku vektorja vzdolž krivulje se kot med vektorjem in tangento na krivuljo ne ohranja nujno. Slika je prirejena po sliki 3 v viru [1].

3. Sferna geometrija

3.1 Premice na sferi

Določimo sedaj geodetske krivulje oziroma premice na sferi. Zamislimo si gibajoče telo na sferi, na katerega delujejo le normalne sile. Opazujmo ga v zunanjem inercialnem sistemu. Normalna smer na sferi je kar središčna smer. Če predpostavimo, da je rezultanta središčnih sil na telo konstantne velikosti, kar je v primeru sil teže in podlage na Zemlji povsem smiselna predpostavka, in da je velikost rezultante taka, da se telo ne pogrezne v sfero niti ne zleti z nje (če se telo giblje hitreje, mora biti sila podlage manjša), hitro ugotovimo, da telo kroži po krožnici, katere središče se ujema s središčem sfere. Krožnicam na sferi, katerih središče se ujema s središčem sfere, pravimo *glavne krožnice* (definicija v viru [4, točka 3]). Bralcu je morda bolj domač izraz *glavni krogelni krog*, ki se nanaša na kroge, katerih središče in polmer se ujemata s središčem in polmerom krogle. Očitno velja še, da je krožnica na sferi glavna natanko tedaj, ko leži središče sfere v njeni ravnini.

Pokazali smo, da je vsaka premica na sferi, kot smo jo definirali v definiciji 1, glavna krožnica. Velja pa tudi obratno: vsaka glavna krožnica je premica na sferi. Denimo, da se telo giblje po glavni krožnici. Z vidika opazovalca v \mathbb{R}^3 tako telo kroži po krožnici, zato je rezultanta sil nanj vedno usmerjena proti središču kroženja, ki je v tem primeru središče krožnice in sfere. Rezultanta je torej

normalna na sfero, zato je po prilagojenem Newtonovem zakonu glavna krožnica premica na sferi.

Omenimo, da so glavne krožnice na sferi tudi krivulje najkrajših razdalj: najkrajša pot med dvema krajema na Zemlji je del loka glavne krožnice. Najkrajša pot med točkama na sferi je, gledano v \mathbb{R}^3 , tetiva med njima, najkrajšo pot na sferi pa očitno dobimo s središčno projekcijo tetive na sfero. Ker ležijo vse točke projekcije v isti ravnini kot središče sfere, je projekcija lok na glavni krožnici. Omenimo še, da z izjemo ekvatorja vzporedniki niso glavne krožnice. Z vidika opazovalca na Zemlji je pot po vzporedniku, ki ni ekvator, kriva pot in ni najkrajša pot med njegovo začetno in končno lego. Letala na primer ne letijo po vzporednikih, ampak po krivuljah, ki se na večini zemljevidov ne zdijo smiselne. Nasprotno pa so vsi poldnevnikih glavne krožnice oziroma natančneje polovice glavnih krožnic.

Pokažimo še dve lastnosti glavnih krožnic, ki nam bodo občasno prišle prav. Skozi dve točki na sferi, ki si nista antipodni, poteka natanko ena glavna krožnica (trditev v viru [4, točka 4]). Če si točki nista antipodni, ti dve točki in središče sfere niso kolinearne, zato poteka skozi njih natanko ena ravnina. Presek te ravnine s sfero je iskana glavna krožnica.

Poljubni dve (različni) glavni krožnici se sekata v natanko dveh točkah (trditev v viru [4, točka 10]). Na ravnini poljubne glavne krožnice vedno leži tudi središče sfere. Presek ravnin dveh različnih glavnih krožnic je očitno premica, ki poteka skozi središče sfere. Ta premica seka sfero v dveh antipodnih točkah, ki sta natanko presečišči krožnic. Poljubni (a ne isti) glavni krožnici se torej sekata v natanko dveh antipodnih točkah.

3.2 Sferni trikotniki

Sedaj ko poznamo premice na sferi, lahko definiramo še trikotnike na sferi. Skozi dve točki na sferi poteka vsaj ena glavna krožnica. Če tri nekolinearne točke med seboj paroma povežemo z glavnimi krožnicami, dobimo sferni trikotnik. Stranice trikotnika so krožni loki, ki jih na glavnih krožnicah omejujejo začetne tri točke. Točke na sferi so nekolinearne, če ne vse tri ležijo na isti glavni krožnici.

Oglišča trikotnika bomo označevali z A , B in C , stranice z a , b in c , notranje kote trikotnika pa z α , β in γ . Notranji koti trikotnika so koti med glavnima krožnicama, ki se v pripadajočem oglišču sekata, kot med krožnicama pa je kot med njunima tangentama kot premicama v \mathbb{R}^3 in je enak kotu med ravninama, ki potekata skozi posamezni krožnici in središče sfere. Oznake notranjih kotov niso standardne, a bodo za potrebe tega članka primernejše od standardnih. V naslednjem razdelku bomo pokazali, da je površina sfernega trikotnika odvisna le od polmera sfere in notranjih kotov trikotnika.

3.3 Površina sfernega trikotnika

Bralec lahko najde izčrpniji dokaz v viru [4, točke 96–98]. Med celotnim dokazom v tem članku si bralec lahko pomaga s skicama 2a in 2b.

Vzemimo poljuben sferni trikotnik ABC , njegove stranice pa podaljšajmo do celotnih glavnih krožnic. Vsaki dve od teh treh krožnic se sekata v enem od oglišč trikotnika. Ker pa se glavni krožnici vedno sekata v natanko dveh antipodnih točkah, tvorijo te tri krožnice na drugi strani sfere nov trikotnik, čigar oglišča so antipodna prvotnemu trikotniku. Imenujmo ga trikotnik $A'B'C'$, kjer so točke A' , B' in C' zaporedoma antipodne točkam A , B in C . Zaradi simetrijskih lastnosti sfere med trikotnikoma ne moremo razlikovati, zato sta si skladna (trditev v viru [4, točka 98]). (Opomba: trikotnika si nista povsem enaka, ampak sta zrcalni sliki drug drugega).

Krožnice razdelijo sfero na več delov. Premislimo, na koliko. Poljubni dve od treh krožnic se sekata v natanko dveh točkah. Skupaj dobimo šest presečišč, saj se v nobenem presečišču ne sekajo vse tri krožnice, sicer bi bil trikotnik ABC izrojen. Vsako presečišče je torej oglišče štirih likov. Pokažimo, da so vsi ti liki trikotniki. Izberimo si neko krožnico in označimo s P in P' ter z R in R'

zaporedoma njena presečišča s prvo in z drugo izmed preostalih dveh krožnic. Med potovanjem po krožnici bomo med presečiščema P in P' , ki sta si antipodni, naleteli na natanko eno od presečišč R in R' , saj si v nasprotnem primeru R in R' ne bi mogli biti antipodni. Vrnimo se sedaj na poljubno presečišče dveh krožnic, imenujmo ga T , ki je oglišče prej omenjenih štirih likov. Krožnici, ki se v tem presečišču sekata, bosta do svojega drugega presečišča presekani vsaka natanko enkrat; presekala ju bo tretja krožnica. Ti dve presečišči tvorita skupaj s presečiščem T sferni trikotnik.

Ker je vseh oglišč oziroma presečišč šest, dobimo 24 trikotnikov. A vsak trikotnik smo šteli trikrat, za vsako njegovo oglišče enkrat. Vseh trikotnikov je torej osem. Dva od njih sta trikotnika ABC in $A'B'C'$. Imenujmo ju glavna trikotnika. Ostalih šest trikotnikov imenujmo priležni trikotniki. Vsak priležni trikotnik si deli eno stranico z enim od glavnih trikotnikov. Oglejmo si glavni trikotnik ABC in priležni trikotnik, ki leži ob stranici a . Ker si trikotnika delita stranico a , si delita še oglišči B in C . Oglišče trikotnika ABC nasproti stranice a je A , oglišče izbranega priležnega trikotnika nasproti stranice a pa je A' . Oglišči A in A' sta si antipodni. Hkrati pa je tudi točka A oglišče enega od priležnih trikotnikov. Stranica, ki v tem priležnem trikotniku leži nasproti oglišča A , je a' , in si jo priležni trikotnik deli z glavnim trikotnikom $A'B'C'$. Ker si delita stranico a' , si delita tudi oglišči B' in C' . Nasproti stranice a' v trikotniku $A'B'C'$ leži oglišče A' . V pomoč je lahko slika 2a. Vidimo torej, da imata omenjena priležna trikotnika antipodna oglišča. Prvega tvorijo oglišča A' , B in C , drugega pa A , B' in C' .

S podobnim premislekom na ostalih štirih priležnih trikotnikih ugotovimo, da lahko vseh šest priležnih trikotnikov razvrstimo v tri pare, kjer imata trikotnika v posameznem paru antipodna oglišča. Kot smo bili premislili že za glavna trikotnika, sta si taka trikotnika skladna.

Sfero smo tako razdelili na osem trikotnikov, ki jih lahko razdelimo v štiri pare skladnih si trikotnikov (trije pari priležnih in en par glavnih trikotnikov). Ker vsi trikotniki skupaj pokrivajo celotno sfero, štirje paroma neskladni trikotniki skupaj pokrivajo polovico sfere. Njihova skupna površina je torej $2\pi R^2$.

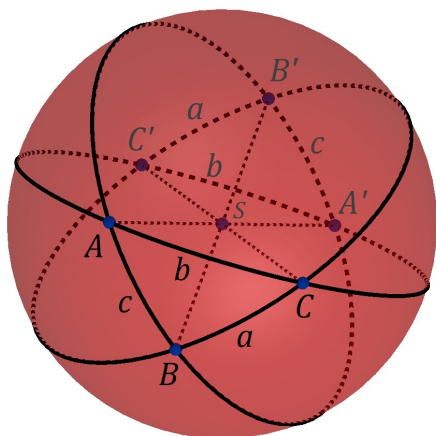
Izberimo si sedaj poljubnega od priležnih trikotnikov in ga zlepimo z glavnim trikotnikom, s katerim si deli stranico. Dobimo *krhelj sfere* (v resnici je poimenovanje krhelj bolj primerno za torozsežno telo, ki bi ga dobili pri obravnavi krogle). Krhelj je omejen z dvema glavnima krožnicama, kot je prikazano na sliki 2b. Ker sta si oglišči priležnega in glavnega trikotnika, ki ležita nasproti stranice, vzdolž katere smo ju zlepili, antipodni, je zlepek res krhelj. Ker sta si krajišči krljja antipodni, je njegova površina očitno odvisna le od kota, ki ga oklepata krožnici (dokaz je v viru [4, točka 96]). Zaradi simetrije sfere mora biti odvisnost linearna. Podobno je tudi ploščina krožnega izseka linearno odvisna od središčnega kota. Če bi krožnici oklepali kot 2π , bi površina krljja bila kar površina celotne sfere, torej $4\pi R^2$. Površina krljja, omejenega s krožnicama, ki oklepata kot φ , je torej $2\varphi R^2$.

Vrnimo se sedaj na skupino glavnega trikotnika in treh paroma disjunktnih priležnih trikotnikov, ki skupaj pokrivajo polovico sfere. Naj bodo notranji koti glavnega trikotnika α , β in γ . Označimo njegovo površino s $S(ABC)$. Skupno površino vseh štirih trikotnikov lahko zapišemo kot

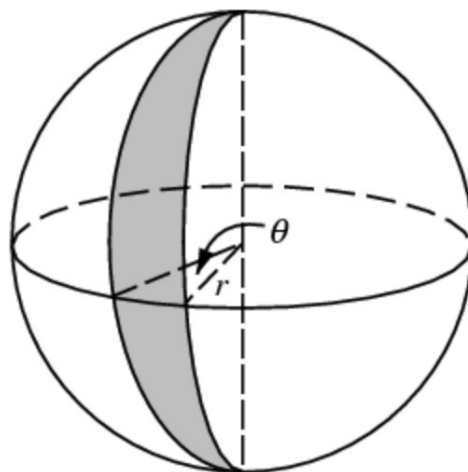
$$S = 2\alpha R^2 + 2\beta R^2 + 2\gamma R^2 - 2S(ABC).$$

Prvi trije členi so površine krljev, ki jih tvorijo priležni trikotniki skupaj z glavnim trikotnikom. A površino glavnega trikotnika smo šteli trikrat, v vsakem krlju enkrat, zato jo moramo dvakrat odšteti. Vemo, da je skupna površina vseh štirih trikotnikov enaka $2\pi R^2$. Če jo vstavimo v zgornjo enačbo, lahko izrazimo površino glavnega trikotnika, ki je

$$S(ABC) = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) R^2. \tag{1}$$



(a) Sferna trikotnika ABC in $A'B'C'$. Objekti, označeni s sivo barvo, so bodisi znotraj bodisi na drugi strani sfere.



(b) Sferni krhelj, omejen z dvema glavnima krožnicama, ki se vedno sekata v dveh antipodnih točkah. Slika je vzeta s spletne strani [6].

3.4 Gauss-Bonnetov izrek za sfero

Znano je, da je vsota vseh notranjih kotov ravninskega trikotnika vedno π . A vsota vseh notranjih kotov sfernega trikotnika je vedno večja od π (več lahko bralec najde v viru [4, točki 32]), kot bomo izpeljali. Razliki med vsoto vseh notranjih kotov trikotnika in π pravimo *kotni presežek* trikotnika. Označevali ga bomo z Ω . Za sferni trikotnik ABC je kotni presežek torej

$$\Omega(\Delta ABC) = \alpha + \beta + \gamma - \pi. \tag{2}$$

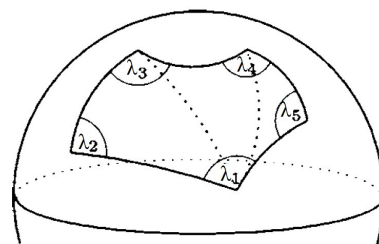
Za ravninske trikotnike je kotni presežek vedno 0, za sferne trikotnike pa vedno pozitivna količina. Opazimo lahko, da je izraz za kotni presežek sfernega trikotnika zelo podoben izrazu za njegovo površino. Če v formulo za površino sfernega trikotnika (1) vstavimo zvezo (2), dobimo

$$\Omega(\Delta) = \frac{S(\Delta)}{R^2}. \tag{3}$$

Kotni presežek sfernega trikotnika in njegova površina sta torej medsebojno enolično določena. Vidimo tudi, da je kotni presežek sfernega trikotnika res vedno večji od 0.

Posplošimo zvezo na sferne večkotnike. Stranice sfernega večkotnika so loki glavnih krožnic. Kotni presežek trikotnika smo uvedli kot razliko med vsoto vseh njegovih notranjih kotov in π , saj je vsota vseh notranjih kotov ravninskega trikotnika ravno π . Za n -kotnik, označimo ga z N , je potemtakem smiselno definirati kotni presežek kot razliko med vsoto vseh njegovih notranjih kotov in $(n - 2)\pi$. Pokazali bomo, da sta površina sfernega n -kotnika in njegov kotni presežek v enaki zvezi, kot sta za sferni trikotnik.

Vsak večkotnik lahko razdelimo na trikotnike, če poljubno njegovo oglišče, a le eno, z diagonalami povežemo z vsemi ostalimi, kot je prikazano na sliki 3. Trikotnikov je za dva manj od oglišč. Površina večkotnika je enaka vsoti površin vseh njegovih sestavnih trikotnikov. Vsota vseh notranjih kotov večkotnika je očitno enaka vsoti vseh notranjih kotov vseh trikotnikov, saj je vsak notranji kot večkotnika v celoti vsebovan v natanko enem ali dveh trikotnikih, vsak notranji kot vsakega trikotnika pa je del nekega notranjega kota večkotnika. Vsota kotnih presežkov vseh $n - 2$ trikotnikov n -kotnika je torej $\sum_{i=1}^n \alpha_i - (n - 2)\pi$,



Slika 3. Razbitje sfernega večkotnika na sferne trikotnike. Slika je vzeta iz vira [1, slika 6].

kjer je α_i notranji kot večkotnika ob oglišču A_i . Vidimo, da je vsota kotnih presežkov ravno kotni presežek n -kotnika, kot smo ga uvedli zgoraj. Po enačbi (3) lahko torej zapišemo

$$\Omega(N) = \sum_{i=1}^{n-2} \Omega(\Delta_i) = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{S(\Delta_i)}{R^2} = \frac{S(N)}{R^2},$$

kjer je Δ_i i -ti sestavni trikotnik n -kotnika N , $S(N)$ pa površina n -kotnika N .

Zamislimo si sedaj poljubno sklenjeno krivuljo na sferi in jo označimo s K . Krivulja od sfere odreže dva dela, natančneje topološka diska, označimo ju z D_1 in D_2 . Krivuljo lahko z interpolacijo poljubno natančno opišemo z večkotnikom. Pokazali smo, da za večkotnik velja zveza $\Omega(N) = \frac{S(N)}{R^2}$. Desna stran enačbe v limiti, ko narašča n čez vse meje, obstaja, saj površina večkotnika konvergira k površini manjšega od obeh diskov, zato obstaja tudi leva stran enačbe, s katero lahko definiramo kotni presežek poljubnega lika na sferi. Za poljuben lik oziroma natančneje topološki disk na sferi lahko torej zapišemo

$$\Omega(D) = \frac{S(D)}{R^2}, \tag{4}$$

kjer je $\Omega(D)$ kotni presežek diska, $S(D)$ njegova površina, R pa polmer krogle. Opazimo lahko, da se kotni presežek likov na sferi ujema z njihovim prostorskim kotom. Dobljeni izraz je Gauss-Bonnetov izrek, poenostavljen na primer sfere. Do enakega zaključka pride tudi vir [1] v enačbi (4).

Pri izpeljavi zveze za sferne trikotnike in večkotnike je bilo naravno razmišljati zgolj o območju znotraj njihovih stranic oziroma lokov, čeprav smo vedno imeli dve omejeni območji. Tiho smo privzemali, da je območje znotraj stranic tisto izmed obeh, ki je manjše. A zvezo (4) lahko uporabimo tudi za večje od obeh območij. Obravnavajmo nek poljuben sferni n -kotnik in označimo z N manjše od območij, ki ga n -kotnik odreže od sfere, z N' pa večje. Notranji koti N' se z notranjimi koti N dopolnjujejo do 2π . Kotni presežek večkotnika N' je torej

$$\begin{aligned} \Omega(N') &= \sum_{i=1}^n (2\pi - A_i) - (n - 2)\pi, \\ \Omega(N') &= 2n\pi - \left(\sum_{i=1}^n A_i - (n - 2)\pi \right) - (n - 2)\pi - (n - 2)\pi, \\ \Omega(N') &= 4\pi - \Omega(N). \end{aligned}$$

Pokažimo, da nam da Gauss-Bonnetov izrek isti rezultat. Površini notranjega in zunanjega območja večkotnika se seštejeta v površino celotne sfere, to je $4\pi R^2$. Vstavimo to v zvezo (4):

$$\Omega(N') = \frac{4\pi R^2 - S(N)}{R^2} = 4\pi - \frac{S(N)}{R^2} = 4\pi - \Omega(N),$$

kar je pa ravno kotni presežek zunanjega območja.

Gauss-Bonnetov izrek velja torej ne glede na izbiro območja, ki nam ga odreže sklenjena krivulja. Vsota kotnih presežkov dveh topoloških diskov na sferi, ki se dopolnjujeta do celotne sfere, je vedno 4π .

4. Foucaultovo nihalo

Sedaj se lahko posvetimo Foucaultovemu nihalu. Vrtenje nihajne ravnine nihala glede na opazovalca na Zemlji je posledica vrtenja Zemlje, a nihalo ima še drugo posebnost: v splošnem ne opravi celotnega obrata v enem dnevu. Pokazali bomo, da je to posledica ukrivljenosti zemeljskega gravitacijskega polja.

4.1 Nihajna ravnina nihala

Nihajna ravnina je ravnina, v kateri nihalo niha. Usmerjenost ravnine bomo določili kot smer njene normale. Postavimo se v lokalni sistem Zemlje, v katerem živi zemeljski opazovalec nihala. Privzemimo zaenkrat, da je Zemlja popolna krogla, centrifugalno silo, ki je posledica vrtenja Zemlje, pa zanemarimo. V razdelku 4.4 bomo na kratko pojasnili, da ti dve poenostavitvi ne spremenita obnašanja Foucaultovega nihala. Na nihalo delujejo le sila teže, sila žice in sila upora. Vse tri sile ležijo v ravnini, ki jo tvorita normala na površino Zemlje in vektor hitrosti nihala v poljubnem trenutku. To je ravno nihajna ravnina. Dovoljujemo tudi morebitno dušenje v spoju žice s stropom, saj tudi sila takšnega dušenja leži v nihajni ravnini. Ker so vse sile, ki delujejo na nihalo, v nihajni ravnini, njihova rezultanta nima komponente, ki bi bila pravokotna na nihajno ravnino, torej vzporedna normali nanjo. Po prvem Newtonovem zakonu se zato nihalo ne more premakniti iz svoje prvotne nihajne ravnine, saj ob začetku poskusa niha v njej, nobena sila pa ga ne pospešuje iz nje. Tu je pomembno tudi, da v lokalnem sistemu sila teže ne spreminja svoje smeri. Normala na nihajno ravnino se torej ne spreminja in ostaja venomer enaka.

Vrtenje Zemlje okoli svoje osi si lahko predstavljamo kot vrtenje zemeljskega površja nad sfero, ki je nepremična v zunanjem inercialnem sistemu in je vir gravitacijskega polja. Ta nepremična sfera je ekvipotencialna ploskev zemeljskega gravitacijskega polja in se prekriva z zemeljskim površjem. V takem pogledu nosilo nihala, ki je pritrjeno na zemeljsko površje, in prebivalci Zemlje v enem dnevu opravijo pot okoli celotne nepremične sfere vzdolž vzporednika, na katerem se nahajajo. Obnašanje nihajne ravnine lahko opišemo kot vzporedni premik normale nihajne ravnine po sferi vzdolž vzporednika. Premik je v lokalnem sistemu vzporeden, saj se normala v njem ne spreminja, kot smo premislili v prejšnjem odstavku.

Spomnimo se zadnjega odstavka razdelka 2.1. Pri vzporednem premiku vektorja po ploskvi vzdolž premice na tej ploskvi se kot med vektorjem in premico ne spreminja, spreminja pa se lahko kot med vektorjem in neko poljubno krivuljo na ploskvi, če vektor vzporedno premikamo vzdolž te krivulje. Spomnimo se še glavnih izsledkov razdelka 3.1. Z izjemo ekvatorja vzporedniki niso premice na sferi. Sedaj postane očitno, da se bo kot med normalo na nihajno ravnino in vzporednikom med vrtenjem Zemlje spreminjal. Drugače povedano: nihajna ravnina se vrti glede na opazovalca v lokalnem koordinatnem sistemu. Izjema je ekvator, ki je sferna premica. Nihajna ravnina se na ekvatorju ne vrti, saj se kot med normalo nanjo in ekvatorjem pri vzporednem premiku ne spreminja. Ko bomo govorili o vrtenju nihajne ravnine nihala, bomo vselej imeli v mislih spremembo kota med njeno normalo in vzporednikom.

Bralec, ki na podlagi dosedanjih izpeljav že sumi, da je narava vzporednega premika po ploskvi odvisna od njene ukrivljenosti, lahko že sklepa, da nihajna ravnina v splošnem ne opravi celotnega obrata v enem dnevu. Ukrivljenost Zemlje oziroma njenega gravitacijskega polja je namreč zaradi simetrije sfere povsod enaka, pot, ki jo v enem dnevu prepotuje nihalo vzdolž vzporednika, pa ni.

Omenimo še, da se normala na nihajno ravnino v zunanjem inercialnem sistemu spreminja. V tem sistemu sila teže nenehno spreminja svojo smer, zato se spreminja nihajna ravnina, saj sila teže vedno leži v njej.

V naslednjem razdelku bomo postopoma izpeljali zvezo med kotom zasuka nihajne ravnine v določenem časovnem obdobju in geografsko širino, na kateri se nihalo nahaja.

4.2 Sprehodi po sklenjenih krivuljah

Kot smo prej videli, vsota notranjih kotov sfernega n -kotnika ni $(n-2)\pi$ in ni enaka za vse n -kotnike. Poglejmo, kaj to pomeni za sprehalca na sferi, ki se sprehaja po sklenjenih krivuljah.

Postavimo se v kožo opazovalca na sferi, ki se sprehaja po poljubnem pozitivno orientiranem trikotniku ABC . Trikotnik je orientiran pozitivno, če je njegova notranjost na levi opazovalca, ki

se spreha ja vzdolž stranic trikotnika v smeri orientacije. Enako je rob poljubnega topološkega diska orientiran pozitivno, če je njegova notranjost na levi opazovalca, ki se spreha ja po robu diska vzdolž njegove orientacije. Ta pojem bomo potrebovali kasneje.

Ker so loki trikotnika deli glavnih krožnic, je za spreha jaleca premikanje po loku trikotnika premikanje po premici, zato mu ni treba zavijati. Spreha jalec mora svojo smer spremeniti le v ogliščih trikotnika, ko prestopi z enega loka na drugega.

Denimo, da začnemo sprehod v oglišču A , obrnjeni vzdolž loka c proti oglišču B (obrnjeni smo v smeri pozitivne orientacije trikotnika). Bralcu je lahko v pomoč slika 2a. Ko prispemo do oglišča B , se moramo obrniti v levo, to je pozitivna smer, za $\pi - \beta$ radianov. Pot nadaljujemo vzdolž loka a proti oglišču C , dokler ne prispemo tja in se moramo ponovno obrniti v levo, tokrat za $\pi - \gamma$ radianov. Pot nadaljujemo po loku b proti oglišču A . V oglišču A se obrnemo za $\pi - \alpha$ radianov v levo, da končamo sprehod v enakem položaju in z enako usmeritvijo, ko smo ga začeli. Skupaj smo med sprehodom opravili obrat v levo za $3\pi - \alpha - \beta - \gamma$ radianov glede na začetni položaj. Označimo to razliko s $\Theta(\Delta ABC)$. Opozoriti je treba, da je dobljeni rezultat že modulo 2π . Opazimo, da lahko skupni obrat v levo med potovanjem po sfernem trikotniku zapišemo s kotnim presežkom. Ker nismo v zgornji izpeljavi nikjer uporabili dejstva, da je trikotnik sferni, lahko zapišemo zvezo kar za poljubni trikotnik Δ : $\Theta(\Delta) = 2\pi - \Omega(\Delta)$. Opazimo lahko, da je za sprehode po ravninskih trikotnikih (ravninskih v \mathbb{R}^3) skupni obrat v levo vedno 2π . Iz naslednji izpeljav bo razvidno, da je skupni obrat pri sprehodih po poljubnih sklenjenih ravninskih krivuljah prav tako 2π .

Vrnimo se na sferne like. S povsem enakim razmislekom lahko ugotovimo, da se spreha jalec po sklenjenem sprehodu po pozitivno orientiranem n -kotniku skupaj obrne za $n\pi - \sum_{i=1}^n A_i$ radianov v levo, kjer so A_i notranji koti večkotnika. Velja torej enaka zveza kot prej: $\Theta(N) = 2\pi - \Omega(N)$.

Sprehodimo se še po večkotniku, ki naš prejšnji večkotnik dopolnjuje do celotne sfere. Kot prej ga označimo z N' . Pozitivna smer v večkotniku N' je nasprotna pozitivni smeri v večkotniku N , zato se moramo sprehoditi v nasprotni smeri kot prej. V ogliščih se bomo še vedno obračali v pozitivno smer, torej v levo. A v oglišču A_i se tako ne bomo obrnili za $\pi - A_i$ v levo, temveč za $A_i - \pi$ v levo (kota $A_i - \pi$ in $A_i + \pi$ sta si po modulu 2π enaka), saj se notranji koti večkotnika N' z notranjimi koti večkotnika N dopolnjujejo do 2π . Skupni obrat v levo bo po zaključenem sprehodu torej $\Theta(N') = \Omega(N) - 2\pi = -\Theta(N)$. Spomnimo se, da se kotna presežka dveh večkotnikov, ki se dopolnjujeta do celotne sfere, vedno seštejeta v 4π . Zapišemo lahko torej $\Theta(N') = (4\pi - \Omega(N')) - 2\pi = 2\pi - \Omega(N')$. Zveza med $\Theta(N')$ in $\Omega(N')$ je torej enake oblike kot zveza med $\Theta(N)$ in $\Omega(N)$. Izbira notranjega ali zunanega območja likov ni pomembna.

Poljuben topološki disk na sferi lahko poljubno natančno opišemo z večkotnikom, kot smo to omenili že prej, zato je celoten obrat v levo pri sprehodu po robu diska enak

$$\Theta(\partial D) = 2\pi - \Omega(D), \tag{5}$$

kjer ∂D označuje rob diska, obe strani pa smo že izlimitirali. Desna stran enačbe konvergira, zato konvergira tudi leva. Rezultat je že modulo 2π . Po Gauss-Bonnetovem izreku za sfero (enačba (4)) pa lahko kotni presežek diska izrazimo z njegovo površino, kar nam da

$$\Theta(\partial D) = 2\pi - \frac{S(D)}{R^2}. \tag{6}$$

Zadnja zveza skriva v sebi globlji rezultat. Zasuk orientacije pri zaključenem sprehodu po ploskvi lahko izmeri že dovolj natančen geodet ali tabornik, ki o ukrivljenosti svoje ploskve morda ne ve ničesar. Zgolj na podlagi merjenja zasuka lahko ugotovi več o globalni obliki svoje ploskve. Če na primer njegov zasuk ni enak 2π , gotovo ne živi na ravni ploskvi.

Omenimo še, da se spremembi orientacije ob zaključenem sprehodu (adiabatni krožni spremembi) v fiziki navadno reče *geometrijska faza*. Primera take faze sta poleg Foucaultovega nihala tudi

Berryjeva faza in sprememba faze pri pojavu Aharonov–Bohma v kvantni mehaniki. Nekaj več primerov je omenjenih v zaključku članka.

4.3 Zasuk nihajne ravnine

Izpeljane rezultate bomo sedaj uporabili na nihalu. V enem dnevu opravi prebivalec Zemlje sklenjen sprehod vzdolž vzporednika. Kot smo izpeljali v razdelku 4.2, bo med sprehodom opravil nek skupni obrat v levo za kot Θ , ki ga podaja zveza (6). Normala nihajne ravnine je podvržena vzporednemu premiku vzdolž vzporednika, zato se v lokalnem sistemu Zemlje ne spreminja. Prebivalec Zemlje bo torej opazil spremembo medsebojne orientacije z nihajno ravnino, ki pa jo bo seveda pripisal sukanju nihajne ravnine nihala in ne samemu sebi. Trdil bo, da se njegova orientacija ni spremenila in da se je v enem dnevu nihajna ravnina nihala zavrtela za kot Θ v desno. To je rezultat, ki ga mi kot prebivalci Zemlje opazimo.

Določimo sedaj kot Θ , za katerega se prebivalec obrne v levo v lokalnem sistemu Zemlje pri sprehodu po vzporedniku. Po formuli (6) je

$$\Theta = \Theta(\partial D) = 2\pi - \frac{S(D)}{R^2},$$

kjer je D disk, ki ga od Zemlje odreže vzporednik, na katerem se nahajamo. Ta disk pa je kar sferni odsek ali kapica. Sprehajalec se po vzporedniku sprehaja od zahoda proti vzhodu. Na njegovi levi je disk, ki vsebuje severni geografski pol. V formuli moramo zato uporabiti površino tega diska, saj mora biti sprehod pozitivno orientiran.

Določiti moramo torej površino sfernega odseka severno od vzporednika, določenega z geografsko širino φ . Do rezultata pridemo lahko zelo hitro z integralnim računom:

$$S(\varphi) = \int_0^{2\pi} \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos(\theta) d\theta d\vartheta = 2\pi R^2 \sin \theta \Big|_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi R^2 (1 - \sin \varphi). \quad (7)$$

Za južne geografske širine je kot φ negativen, formula pa velja v isti obliki. Integrirali smo v krogelnih koordinatah, azimutni kot meri ϑ , polarni pa θ in ga merimo od ekvatorja, njegov razpon pa je od $-\frac{\pi}{2}$ do $\frac{\pi}{2}$. Jacobijeva determinanta je enaka $r^2 \cos \theta$.

V uvodu članka je bila obljubljen povsem elementarna izpeljava vseh rezultatov (razen v zadnjem razdelku). Izpeljavo površine sferne kapice z zgolj elementarno geometrijo lahko bralec najde v dodatku 6.

Sedaj lahko določimo kot, za katerega se obrne nihajna ravnina nihala, ki se nahaja na geografski širini φ . Po formuli (6) je

$$\Theta(\varphi) = 2\pi - \frac{2\pi R^2 (1 - \sin \varphi)}{R^2} = 2\pi \sin \varphi.$$

V enem dnevu se nihajna ravnina nihala zavrti za kot $2\pi \sin \varphi$ v desno. Na južni polobli je geografska širina negativna, zato je tudi kot obrata negativen. To pomeni, da se nihalo v resnici zavrti v levo. Na severni polobli se vrtil v smeri urnega kazalca, na južni polobli pa v smeri nasproti urnega kazalca.

Zaradi simetrije sfere se mora nihajna ravnina vrteti enakomerno. Za kot zasuka velja torej zveza oblike $\Theta(t, \varphi) = c(\varphi)t$, kjer je $c(\varphi)$ hitrost vrtenja ravnine in je odvisna le od geografske širine. Po enem dnevu mora biti $\Theta(1 \text{ dan}, \varphi) = 2\pi \sin \varphi + 2k\pi$, kjer je k celo število. Zaenkrat še ne vemo, ali naredi nihalo zgolj en obrat ali jih naredi morda več. V prejšnjih rezultatih člana $2k\pi$ nismo potrebovali, saj nas je zanimal le kot zasuka, ki ga merimo po modulu 2π . Ker nas pa sedaj zanima hitrost vrtenja nihajne ravnine, potrebujemo tudi ta člen. Celó število k ni odvisno od geografske širine, saj bi sicer kot zasuka pri neki geografski širini poskočil za večkratnik 2π , to se pa seveda ne dogaja.

Ker je ekvator glavna krožnica, se nihajna ravnina tam ne vrti, saj normalo nihajne ravnine vzporedno premikamo po sferi vzdolž sferne premice. Sledi, da je k enak 0, iz tega pa lahko zaključimo, da je $c = 2\pi \sin \varphi \cdot \text{dan}^{-1}$. Opazovalec nihala na geografski širini φ bo torej po času t opazil zasuk nihajne ravnine nihala v desno za

$$\Theta(t, \varphi) = \frac{2\pi \sin \varphi}{\text{dan}} t$$

radianov. Nihajna ravnina opravi poln obrat v

$$T_0 = \frac{\text{dan}}{\sin \varphi}.$$

4.4 Splošne ploskve

Z močnejšimi orodji iz diferencialne geometrije lahko z enakimi razmisleki določimo tudi obrat nihala v enem dnevu na površini nekega poljubnega telesa, katerega površje je ekvipotencialna ploskev njegovega gravitacijskega potenciala. Lahko pa razmišljamo o Foucaultovem nihalu na vesoljski ladji, ki potuje po neki sklenjeni krivulji na ekvipotencialni ploskvi poljubnega gravitacijskega polja.

Lokalni Gauss-Bonnetov izrek za krivočrtne večkotnike na poljubni ploskvi se glasi

$$\int_{\gamma} \kappa_{\gamma} dt = \sum_i \alpha_i - (n - 2)\pi - \int_D K dA,$$

kjer je γ enostavno sklenjena naravno parametrizirana odsekoma gladka krivulja na ploskvi, κ_{γ} njena geodetska ukrivljenost, K Gaussova ukrivljenost ploskve, D topološki disk, čigar rob je krivulja γ , α_i notranji kot krivočrtnega večkotnika ob i -tem oglišču, vsota pa teče po vseh kotih. Vrhovi teh kotov so hkrati natanko točke, kjer krivulja γ ni gladka. Definicijo geodetske ukrivljenosti lahko bralec najde v viru [5, razdelek IV.]. Trenutno je pomembno le, da je geodetska ukrivljenost geodetskih krivulj (premic na ploskvi) identično enaka 0. Več o Gauss-Bonnetovem izreku lahko bralec najde v viru [2] v poglavju 13, predvsem v 13.1 in 13.2.

Za krivočrtne večkotnike, katerih stranice so premice na ploskvi oziroma geodetske krivulje, se zveza poenostavi v

$$\sum_i \alpha_i - (n - 2)\pi = \int_D K dA,$$

saj je geodetska ukrivljenost geodetskih krivulj enaka 0. V levi strani zadnje enačbe prepoznamo kotni presežek krivočrtnega večkotnika, ki je v splošnem lahko tudi negativen; tedaj se mu reče *kotni primanjkljaj*. Za krivočrtne večkotnike na poljubni ploskvi lahko torej njihov kotni presežek določimo kot

$$\Omega(D) = \int_D K dA.$$

Za povsod gladko krivuljo γ , ki izpolnjuje še vse ostale pogoje lokalnega Gauss-Bonnetovega izreka iz predprejšnjega odstavka, se zveza izreka poenostavi v

$$\int_{\gamma} \kappa_{\gamma} dt = 2\pi - \int_D K dA,$$

saj ima povsod gladka krivulja $n = 0$ oglišč oziroma kolen. Če podobno kot prej tako krivuljo interpoliramo s krivočrtnim večkotnikom, katerega stranice so geodetske krivulje, in število oglišč pošljemo proti neskončnosti, dobimo izraz za kotni presežek območja, ki ga omejuje enostavno sklenjena naravno parametrizirana povsod gladka krivulja γ :

$$\Omega(D) = \int_D K dA = 2\pi - \int_{\gamma} \kappa_{\gamma} dt.$$

Naj bo sedaj D nek poljuben topološki disk, čigar rob je enostavno sklenjena krivulja γ , ki ni nujno povsod gladka, temveč zgolj odsekoma gladka. Če krivuljo γ naravno parametriziramo, je po zgornjem premisleku kotni presežek diska D smiselno definirati kot

$$\Omega(D) = \sum_i \alpha_i - (n-2)\pi - \int_{\gamma} \kappa_{\gamma} dt = \int_D K dA,$$

kjer je α_i notranji kot diska ob i -tem oglišču, vsota pa teče po vseh njegovih ogliščih. V formuli od 2π odštejemo vsoto notranjih kotov ob robu diska in integral geodetske ukrivljenosti roba po samemu sebi. Zadnja enakost velja po Gauss-Bonnetovem izreku.

Naš premislek v razdelku 4.2 o povezavi med kotnim presežkom območja in skupnim obratom, ki ga doživi sprehajalec ob sprehodu po robu tega območja, ni bil vezan na sfero. Zveza (5) velja potemtakem tudi v splošnem primeru. Po Gauss-Bonnetovem izreku lahko torej skupni obrat Foucaultovega nihala v desno glede na opazovalca na ploskvi določimo kot

$$\Theta(D) = 2\pi - \int_D K dA,$$

kjer je D območje, ki ga od ploskve z Gaussovo ukrivljenostjo K odreže krivulja, vzdolž katere se opazovalec skupaj s ploskvijo vrti (skladno z virom [3, trditev 3 na strani 11]). Rezultat nam pravi, da je zasuk nihajne ravnine odvisen zgolj in povsem od geometrijskih lastnosti poskusa. Določen je s povprečno ukrivljenostjo dela ekvipotencialne ploskve gravitacijskega polja, zaobjetega s sklenjeno krivuljo. Gaussova ukrivljenost sfere je povsod R^{-2} , zato zgornji izraz na sferi postane enačba (6).

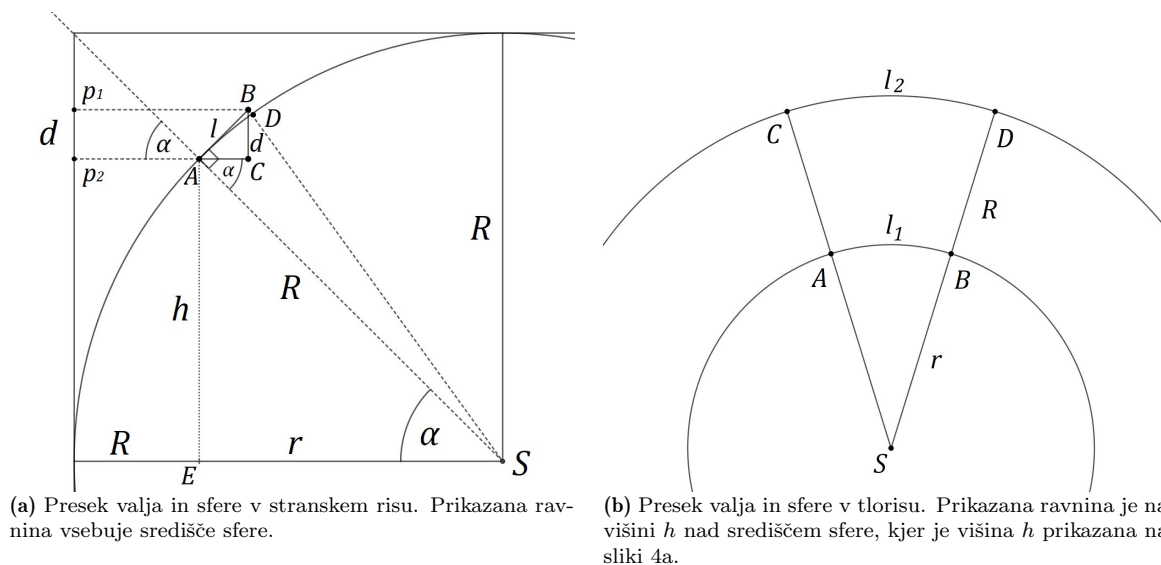
Sedaj lahko utemeljimo še, da naša predpostavka v razdelku 4.3, da je Zemlja popolna krogla in da na nihalo centrifugalna sila v lokalnem sistemu ne deluje, ni bila zares potrebna, skladno tudi z virom [1, Appendix: the effect of the centrifugal force]. Ker je Zemlja sploščena ob polih prav zaradi svojega vrtenja, je vsota sile teže in sistemske centrifugalne sile na nihalo pravokotna na površje sploščene Zemlje. Površje Zemlje je ekvipotencialna ploskev efektivnega gravitacijskega potenciala, to je vsota gravitacijskega in centrifugalnega potenciala. Vsi ostali fizikalni premisleki se ohranijo, kot, za katerega se nihajna ravnina zavrti, pa lahko dobimo z zgornjo zvezo, če dovolj dobro poznamo pravo ukrivljenost Zemlje oz. njenega efektivnega potenciala. Posebej je treba poudariti tudi, da terenske značilnosti Zemlje, kot so gorovja in nižavja, zgolj šibko vplivajo na ukrivljenost gravitacijskega potenciala. Pri računanju povprečne ukrivljenosti nekega območja Zemlje jih je tako ne le lažje, temveč tudi pravilneje zanemariti.

5. Zaključek

Z uporabo elementarne matematike in fizike smo izpeljali, da je kot, za katerega se v enem dnevu obrne nihajna ravnina Foucaultovega nihala, odvisen le geometrije Zemlje oziroma natančneje njenega gravitacijskega polja; še natančneje, od ukrivljenosti polja. Pokazali smo, da je obrat nihajne ravnine glede na opazovalca na geografski širini φ podan z zvezo $\Theta(t, \varphi) = \frac{2\pi \sin \varphi}{\text{dan}} t$, kjer opazujemo kot zasuka glede na trenutek $t = 0$. Z Gauss-Bonnetovim izrekom iz diferencialne geometrije smo nato nakazali še, da je obrat nihajne ravnine tudi v splošnem odvisen le od geometrije gravitacijskega potenciala, v katerem se nihalo nahaja.

Na podobne spremembe faz iz geometrijskih razlogov naletimo tudi drugje v fiziki. Ob zvezi (6) sta omenjeni Barryjeva faza in Aharonov-Bohmov pojav. Omenimo pa lahko še pojav v optiki, kjer se polarizacija svetlobe pri poti skozi navito optično vlakno spremeni na podlagi ukrivljenosti vlakna. Če vlakno opiše ravninsko krivuljo, se polarizacija svetlobe ne spremeni, za prostorsko navito vlakno pa v splošnem se. Več o tem lahko bralec najde v viru [1, razdelek IV.]. Poznamo tudi fizikalne pojave, ki izvirajo iz abstraktnejših topoloških lastnosti, na primer opis kvantnega Hallovega pojava s Chernovimi števili. Raziskovanja teh pojavov pa se bo moral bralec lotiti povsem sam.

Slika 4. Skica pravokotne projekcije sfere s polmerom R na valj s polmerom R in višino $2R$. Valj stoji na svoji osnovni ploskvi. Slika 4a je v stranskem risu, slika 4b pa v tlorisu.



(a) Presek valja in sfere v stranskem risu. Prikazana ravnina vsebuje središče sfere.

(b) Presek valja in sfere v tlorisu. Prikazana ravnina je na višini h nad središčem sfere, kjer je višina h prikazana na sliki 4a.

6. Dodatek: elementarna izpeljava površine sferne kapice

Pokazali bomo elementarno izpeljavo rezultata (7). Sledili bomo dokazu Arhimeda. Zaprimo sfero v valj, ki se ji tesno prilega. Če je polmer sfere R , je polmer valja R , njegova višina pa $2R$. Pokažimo, da projekcija sfere na plašč valja v radialni smeri valja (ne sfere!) ohranja površino. Izrežimo iz sfere ozek pas tako, da režemo vzporedno z osnovno ploskvijo valja, in si oglejmo njegovo projekcijo na valj. Bralcu je lahko v pomoč skica 4a. Smer projekcije je prikazana s prekinjenima črtama p_1 in p_2 .

Dolžina krožnega loka med točkama A in D je približno dolžina hipotenuze v pravokotnem trikotniku ABC s pravim kotom v oglišču C . Manjši kot je središčni kot pod lokom, natančnejši je približek. Za neskončno ozke pasove postane primerjava točna. Iz geometrije konstrukcije vidimo, da je kot $\sphericalangle CAB$ enak $\frac{\pi}{2} - \alpha$, saj je kot $\sphericalangle SAB$ pravi, ker je daljica AB tangenta na sfero v točki A . Pri pravokotni projekciji bomo pas sfere širine l preslikali v pas na valju širine d . Trikotnika ABC in SAE se ujemata v kotih, zato sta si podobna. Očitno je $\frac{d}{l} = \frac{r}{R}$.

Projekcija pasu na valj se torej skrči v navpični smeri, se pa razširi v središčni smeri, kot lahko vidimo na skici 4b. Lok AB leži na sferi, lok CD pa na valju. Polmer pasu sfere je r , polmer valja pa R . Očitno je $\frac{l_2}{l_1} = \frac{R}{r}$. Projekcija pasu sfere na valj je v navpični smeri skrčena za faktor $\frac{R}{r}$, v radialni smeri pa je za isti faktor raztegnjena. Učinka se izničita, zato se površina ohranja.

Površino sfernega odseka lahko sedaj določimo kot površino njegove projekcije na valj. Na skici 4a kot α predstavlja geografsko širino. Sferni odsek med točko A in polom se projicira na pas širine $d = R - h = R - R \sin \alpha$. Površina sfernega odseka je torej

$$S(\alpha) = 2\pi R(R - R \sin \alpha) = 2\pi R^2(1 - \sin \alpha),$$

kar se ujema z rezultatom (7).

LITERATURA

- [1] J. Bergmann in H.C. Bergmann, *Foucault pendulum through basic geometry*, Am. J. Phys., **75**, 888–892, 2007, [ogled 23. 3. 2018], dostopno na <https://doi.org/10.1119/1.2757623> in na https://www.researchgate.net/publication/228565025_Foucault_pendulum_through_basic_geometry.
- [2] A. Pressley, *Elementary differential geometry*, 2nd edition, Springer undergraduate mathematics series, Springer, London, 2010, [ogled 20. 6. 2020], dostopno na <http://dwwebs.com/combinedpdf.pdf>.

- [3] O. Stoytchev, *From Foucault's Pendulum to the Gauss-Bonnet Theorem*, november 2017, [ogled 23. 3. 2018], dostopno na <https://arxiv.org/pdf/1701.01666>.
- [4] I. Todhunter, *Spherical trigonometry: for the use of colleges and schools, with numerous examples*, 5th edition, Macmillan and co., London, 1886, elektronska verzija dela: K.F. Greiner, B. Zamanian in J. Hutchinson, 12. 11. 2006, [ogled 17. 6. 2020], dostopno na <http://www.gutenberg.org/files/19770/19770-pdf.pdf>.
- [5] I. Vidav, *Diferencialna geometrija*, Postdiplomski seminar iz matematike 18, DMFA SR Slovenije, Ljubljana, 1989.
- [6] *Spherical lune*, v: Wolfram MathWorld, [ogled 22. 6. 2020], dostopno na <https://mathworld.wolfram.com/SphericalLune.html>.