

# UGANKA PROTONSKEGA RADIJA

GREGOR RIHTARŠIČ

Fakulteta za matematiko in fiziko  
Univerza v Ljubljani

V članku je predstavljeno neskladje meritev nabojnega radija protona, ki v svetu jedrske fizike zadnje desetletje odmeva pod vzdevkom "uganka protonskega radija". Podrobneje je predstavljena meritev radija z obravnavo elastičnega sipanja elektronov na protonih in eksperiment na mikrotronu v Mainzu. V članku so predstavljeni rezultati ponovne regresije s pridobljenima radijema ( $0.876 \pm 0.006$ ) fm in ( $0.868 \pm 0.048$ ) fm, ki podpirata večjo vrednost radija. Sledi kratek pregled meritve Lambovih premikov in eksperimentov, ki napovedujejo razrešitev uganke ter obravnava pomena uganke za jedrsko in atomsko fiziko.

## PROTON RADIUS PUZZLE

This article deals with discrepancies between measurements of the proton charge radius which gained their reputation over the past decade under the nickname "proton radius puzzle". Firstly the elastic electron-proton scattering measurements are discussed with emphasis on the experiment at the Mainz Microtron. After that the results of the reanalysis of the data from Mainz are presented yielding charge radius values of ( $0.876 \pm 0.006$ ) fm and ( $0.868 \pm 0.048$ ) fm which coincide with the larger proton radius. Then, Lamb shift measurements are explained and a short overview of the latest experiments which may foreshadow the solution of the puzzle is provided. At the end the impact of the puzzle on nuclear and atomic physics is discussed.

## 1. Uvod

Proton je kot osnovni gradnik snovi razmeroma dobro razumljen in preučen delec. Kaj lahko bi si mislili, da na področju merjenja njegove razsežnosti in porazdelitve naboja potemtakem že dolgo ni več mnogo prostora za nova odkritja in pretrese razumevanja. Randolph Pohl [8] in Jan C. Bernauer [3] sta leta 2010 pokazala, da temu ni tako. V prizadevanju, da bi preverila uveljavljeno vrednost nabojnega radija protona (0.877 fm), ki so jo potrjevali tako pretekli rezultati spektroskopije vodika kot jedrski poskusi z elektroni, sta leta 2010 objavila rezultate, ki so se na presenečenje vseh med seboj razlikovali za kar  $8\sigma$ . Medtem ko so rezultati sipanja elektronov na protonih potrdili uveljavljeno vrednost, so rezultati merjenja Lambovega premika na mionskem vodiku njej nasproti postavili vrednost 0.842 fm. Neskladnost, ki je hitro pridobila vzdevek *uganka protonskega radija*, je hitro postala ena najbolj odmevnih tem jedrske in atomske fizike v preteklem desetletju, kar se odražalo v naglo rastočem številu objavljenih člankov, ki so se občasno znašli celo na naslovnica najuglednejših revij (npr. Nature [8]).

Motivacij za razrešitev vprašanja je bilo precej. Šlo je za ključno potezo v preverjanju našega razumevanja kvantne elektrodinamike [7] in določanja Rydbergove konstante [12]. V letih po objavi je prišlo do različnih teorij, zakaj bi lahko prišlo do omenjenega odstopanja, pri čemer je vse kazalo na to, da razlog ne tiči v morebitnih merskih napakah, marveč v nerazumevanju fizike. Vrstiti so se pričeli podobni eksperimenti, ki so namesto vodika obravnavali devterij [12] in merili različne prehode med elektronskimi nivoji [10, 11], poleg tega pa je prišlo do številnih ponovnih analiz eksperimentov elastičnega sipanja [4, 18, 19], pri čemer pa nobena izmed metod ni uspela priti do enotnega rezultata.

Leto 2019 je bilo za uganko protonskega radija prelomno. Jeseni je prišlo do objav rezultatov dveh eksperimentov. Kanadska ekipa (Hessels idr.) je uspela izmeriti Lambov premik na elektronskem vodiku in potrebo po novih fizikalnih teorijah postavila pod vprašaj [15]. Ekipa kolaboracije PRad je med tem objavila rezultate ponovnega poskusa elastičnega sipanja elektronov s še izboljšano

natančnostjo in dobila rezultat, ki je ustrezal enaki, manjši vrednosti nabojnega radija [21]. Vse kaže na to, da se uganka protonskega radija po desetletju raziskav bliža svojemu zaključku, prevladujoča vrednost nabojnega radija je 0.8414 fm [14]. Vendar pa kljub temu mnogo vprašanj še vedno ostaja nerazrešenih.

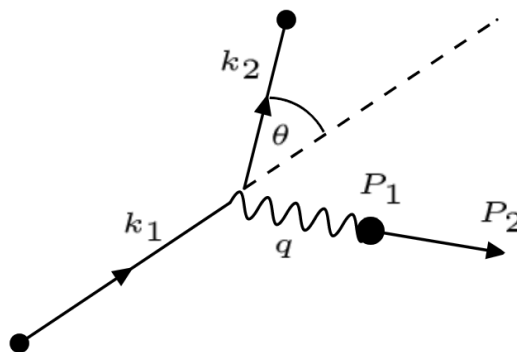
## 2. Nabojni radij protona in oblikovni faktor

Ker proton nima jasno definirane meje, o njegovem dejanskem radiju ne moremo govoriti. Da bomo bolje razumeli pojme, ki nam bodo pomagali razložiti proton, si najprej ogledamo, kako se s tem soočimo pri obravnavi težjih jeder. S pomočjo porazdelitve naboja v jedru  $f(r)$  v odvisnosti od razdalje od središča jedra  $r$  definiramo tako imenovan nabojni radij, ki je enak korenu povprečnega kvadrata radija (rms):

$$\langle r^2 \rangle = 4\pi \int_0^\infty r^2 f(r) r^2 dr. \quad (1)$$

Ugotavljanja porazdelitve naboja se je najlažje lotiti z opazovanjem elastičnega sipanja elektronov na jedrih (ali nukleonih). Tu igra veliko vlogo kvantna elektrodinamika, teorija, ki zelo natančno opiše, kako svetloba interagira s snovjo in ki naj bi po naših prepričanjih z izjemno natančnostjo napovedala izide eksperimentov, o čemer se lahko prepričamo z obravnavo strukture majhnih atomov ali v našem primeru kar protonov. V luči tega dejstva je lažje razumeti začetno razburjenje ob odkritju odstopanja meritev protonskega radija, saj je to namigovalo, da je naše razumevanje kvantne elektrodinamike nepopolno [7] (več v 7. poglavju).

Sipanje elektronov nas zanima, ker so točkasti delci brez notranje strukture. Njihov prispevek pri trkih je točno izračunljiv, kar nam pri raziskovanju tarčnih delcev pride zelo prav. Interakcijo med elektronom in jedrom v okviru kvantne elektrodinamike opišemo s pomočjo izmenjave virtualnega fotona, katerega valovna dolžina je odvisna od prenosa gibalne količine. Za raziskovanje notranje strukture tarčnega delca, moramo doseči čim boljšo resolucijo, torej čim manjšo valovno dolžino fotona in čim večji prenos gibalne količine. Pri interakciji s težjimi jedri prenos gibalne količine zapišemo kot vektor  $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$ , kjer  $\mathbf{p}$  in  $\mathbf{p}'$  predstavljata vektorja gibalne količine elektrona pred in po interakciji.



**Slika 1.** Skica elastičnega sipanja elektrona na jedru. Valovna vektorja  $\mathbf{k}_1$  in  $\mathbf{k}_2$  pripadata gibalnima količinama elektrona  $\mathbf{p}_1$  in  $\mathbf{p}_2$ .

Pri sipanju elektronov na jedrih je količina, ki jo lahko izmerimo, diferencialni sipalni presek  $\frac{d\sigma}{d\Omega}(E, \theta)$ , ki je sorazmeren s številom zaznanih delcev v določenem prostorskem kotu. Zanima

nas odvisnost diferencialnega sipalnega preseka od energije in kota  $\theta$ . Pri iskanju dovolj dobrega teoretičnega modela sipalnega preseka, si najprej ogledamo Mottov sipalni presek

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} = \frac{4Z^2\alpha^2(\hbar c)^2 E'^2}{|\mathbf{q}c|^4} \left(1 - \beta^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right), \quad (2)$$

ki je popravljen Rutherfordov sipalni presek, ki upošteva tudi relativistično naravo in spin elektrona.  $E$  predstavlja energijo elektrona pred sipanjem,  $E'$  pa po sipanju<sup>1</sup>. Izkaže se, da Mottov sipalni presek sovpada z meritvami zgolj v limiti majhnih vrednosti  $\mathbf{q}^2$ , pri velikih vrednostih pa so izmerjene vrednosti sistematično manjše. Razlog za to je manjša valovna dolžina virtualnega fotona in torej večja resolucija, kar pomeni, da zaradi prostorske razporeditve naboja elektron ne čuti več celotnega naboja, marveč le del. V primeru obravnave težjih jeder brez spina (z zanemarljivim odzivom in uporabo Bornove aproksimacije) sipalni presek popravimo z uvedbo oblikovnega faktorja  $F$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{eksp.}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} |F(\mathbf{q}^2)|^2, \quad (3)$$

za katerega se izkaže<sup>2</sup>, da ustreza kar Fourierjevi transformaciji gostote naboja  $f(\mathbf{r})$

$$F(\mathbf{q}^2) = \int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}/\hbar} f(\mathbf{r}) d^3r. \quad (4)$$

Z merjenjem sipalnih presekov pri različnih energijah in kotih  $\theta$  in torej različnih prenosih gibalne količine  $\mathbf{q}^2$  lahko načeloma določimo porazdelitev naboja v obravnavanem jedru in nato z izrazom (1) pridobimo vrednost nabojnega radija, vendar pa v praksi tega ne moramo storiti s poljubno natančnostjo zaradi omejenih energij vpadnega žarka in padca vrednosti sipalnih presekov pri velikih prenosih gibalne količine  $\mathbf{q}^2$ . Za določanje nabojnega radija uporabimo drugo metodo. Če izraz (4) razvijemo za majhne vrednosti  $\mathbf{q}^2$ , se izkaže, da je odvod oblikovnega faktorja pri  $\mathbf{q}^2=0$  sorazmeren z nabojnim radijem:

$$\langle r^2 \rangle = -6\hbar^2 \left. \frac{dF(\mathbf{q}^2)}{d\mathbf{q}^2} \right|_{\mathbf{q}^2=0}. \quad (5)$$

Žal tudi tukaj velja, da je naša natančnost omejena, saj sipalnih presekov pri  $\mathbf{q}^2 = 0$  ni mogoče izmeriti, saj se mora žarek odkloniti vsaj za nek kot  $\theta$ , če ga hočemo izmeriti z detektorji. Zato je pri tej metodi določanja radija potrebno kljub vsemu do ničle ekstrapolirati s pomočjo modela in nato določiti odvod. S takšnim pristopom obravnavamo tudi proton.

Navedene formule so dober približek, ki ga uporabljamo pri obravnavi težjih jeder (npr. ogljik), kjer je  $E \approx E'$ , in služijo boljšemu razumevanju njihovega nabojnega radija, vendar pa moramo pri obravnavi protona naše izračune nekoliko spremeniti. Ker odriva ne moremo več zanemariti, pri interakciji elektron izgubi nekaj energije, zato prenosa gibalne količine ne moremo več obravnavati kot trivektor  $\mathbf{q}$ , marveč ga obravnavamo kot četverec:

$$q^2 = (p - p')^2 = 2m_e^2 c^2 - 2(EE'/c^2 - |\mathbf{p}||\mathbf{p}'| \cos \theta) \approx \frac{-4EE'}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (6)$$

pri čemer smo zanemarili mirovno maso elektrona, kar je pri energijah reda nekaj sto MeV smiselna aproksimacija. Da imamo opravka s pozitivnimi količinami, označimo še  $Q^2 = -q^2$ . Ustrezno

<sup>1</sup>pri zapisanem Mottovem sipalnem preseku smo zanemarili odziv jedra in njegovo strukturo, obravnavamo ga kot točkast delec.

<sup>2</sup>Točnejše izpeljave oblikovnega faktorja bi se lotili s pomočjo Fermijevega zlatega pravila, kjer bi matrični element s pomočjo Greenove formule prevedli na integral gostote naboja  $f(\mathbf{r})$  po volumnu.

moramo popraviti tudi Mottov sipalni presek (enačba (2)), ki mu zaradi odnosa moramo dodati faktor  $E'/E$ , namesto količine  $|\mathbf{q}|^2$  pa nam nastopa  $Q^2$ . Ker se izkaže, da je oblikovni faktor pri takšni obravnavi odvisen le od vrednosti  $Q^2$ , ki je kvadrat četverca in ne trivektorja, ga ne moremo več obravnavati kot Fourierovo transformacijo (enačba 4) in ga torej ne moremo neposredno povezati s porazdelitvijo naboja<sup>3</sup>. Kljub temu se držimo definicije radija z odvodom pri  $Q^2 = 0$  (enačba (5)), vendar pa je v tem primeru povezava z gostoto naboja (enačba (1)) le še približna.

Upoštevati moramo, da elektron interagira s protonom tudi prek magnetnega momenta. Za opis naboja in magnetizacije potrebujemo dva oblikovna faktorja, električni oblikovni faktor  $G_E(Q^2)$  in magnetni oblikovni faktor  $G_M(Q^2)$ . S pomočjo dejstva, da ima proton polovičen spin in da upošteva Diracovo enačbo, lahko izpeljemo *Rosenbluthovo formulo* za sipalni presek:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \left[ \frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2(Q^2) \tan^2 \frac{\theta}{2} \right], \quad (7)$$

kjer je

$$\tau = \frac{Q^2}{4M^2c^2}.$$

Ko imamo znan model električnega oblikovnega faktorja  $G_E(Q^2)$ , lahko nabojni radij dobimo iz njegovega odvoda po formuli (5). Iskanje modela, ki bi dobro opisal izmerjene sipalne preseke ni preprosta naloga. Prvi uveljavljen teoretičen model  $G_E$ , t.i. standardni dipol

$$G_E(Q^2) = G^{dipol}(Q^2) = \left(1 + \frac{Q^2}{0.71(GeV/C)^2}\right)^{-2}, \quad (8)$$

ki narekuje eksponentno porazdelitev naboja, eksperimentalnih podatkov ne opiše točno, posledično tudi nabojni radij, ki ga s tem modelom pridobimo (0.81 fm [1]), ni pravilen. Za boljši opis resničnosti se moramo torej zateči h kompleksnejšim modelom, ki so slabše teoretično utemeljeni.

### 3. Opis eksperimenta na mikrotronu v Mainzu (MAMI)

Pri pregledu poskusov, namenjenim določanju nabojnega radija protona, bomo najpodrobneje obravnavali poskus iz Maniza, ki je leta 2010 botroval začetku uganke protonskega radija. Šlo je za eksperiment elastičnega sipanja elektronov na protonih, ki ga je v svojem doktorskem delu analiziral Jan Bernauer (takrat Johannes Gutenberg-Universität Mainz) [3], opravljenega v letih 2006 in 2007 na mikrotronu v Mainzu (MAMI) v okviru kolaboracije A1.

Pri eksperimentu je bil uporabljen sestav treh spektrometrov, vsak izmed njih je vrtljiv okrog tarče na sredi, kar omogoča merjenje delcev pri različnih sipalnih kotih  $\theta$ . V vsakem spektrometru lahko s pomočjo opazovanja trajektorije delcev v magnetnem polju sistema dipolnih, kvadrupolnih in sekstupolnih magnetov dobro določimo kot in gibalno količino sipanega elektrona. Detektor delcev, ki ga pri tem uporabimo, vsebuje scintilatorje, ki sprožijo meritev, vertikalne žične komore, ki določijo položaj in kot delca po preletu magnetnih polj, ter detektor sevanja Čerenkova.

<sup>3</sup>Težavi bi se lahko do neke mere izognili, če bi sipanje obravnavali v t.i. Breitovem sistemu [2], kjer je prenos energije enak 0 in velja  $\mathbf{p} + \mathbf{p}' = 0$ , vendar pa tudi v tem primeru ne moremo zanemariti vpliva interakcije na porazdelitev naboja.



**Slika 2.** Fotografija dvorane A1 (Mainz) s tremi velikimi spektrometri v rdeči, modri in zeleni barvi (A, B in C) ter manjšim spektrometrom SOS (ang. *Short-Orbit Spectrometer*) nameščenim pred tarčo v sredini. Slika je dostopna na spletni strani kolaboracije A1, kjer je eksperiment tudi podrobneje opisan [23].

Pri eksperimentu je šlo za sipanje elektronov z energijami 160, 315, 450, 585, 720 in 855 MeV na vodik. Skupno 1400 meritev sipalnih presekov pokriva območje  $Q^2$  med  $0.004 \text{ (GeV/c)}^2$ <sup>4</sup> in  $1 \text{ (GeV/c)}^2$ . Obdelava meritev in odstranjevanje ozadja, je podrobno opisana v viru [3] in zadeva natančno spremljanje svetlosti vpadnega curka elektronov, odstranjevanje ozadja in druge popravke. Bernauer nato na meritve sipalnih presekov prilagaja več različnih modelov  $G_E(Q^2)$  in  $G_M(Q^2)$  po enačbi (7), pri tem pa mora podatke normalizirati, zato uvede 31 normalizacijskih parametrov, s katerimi pomnoži posamezne skupine meritev in jih obravnava kot parametre regresije. Posebno pozornost tudi nameni številu uporabljenih parametrov samega modela. Pri tem si pomaga z reducirano vrednostjo  $\chi^2$  (z minimiziranjem le-te išče tudi optimalne parametre vsakega modela):

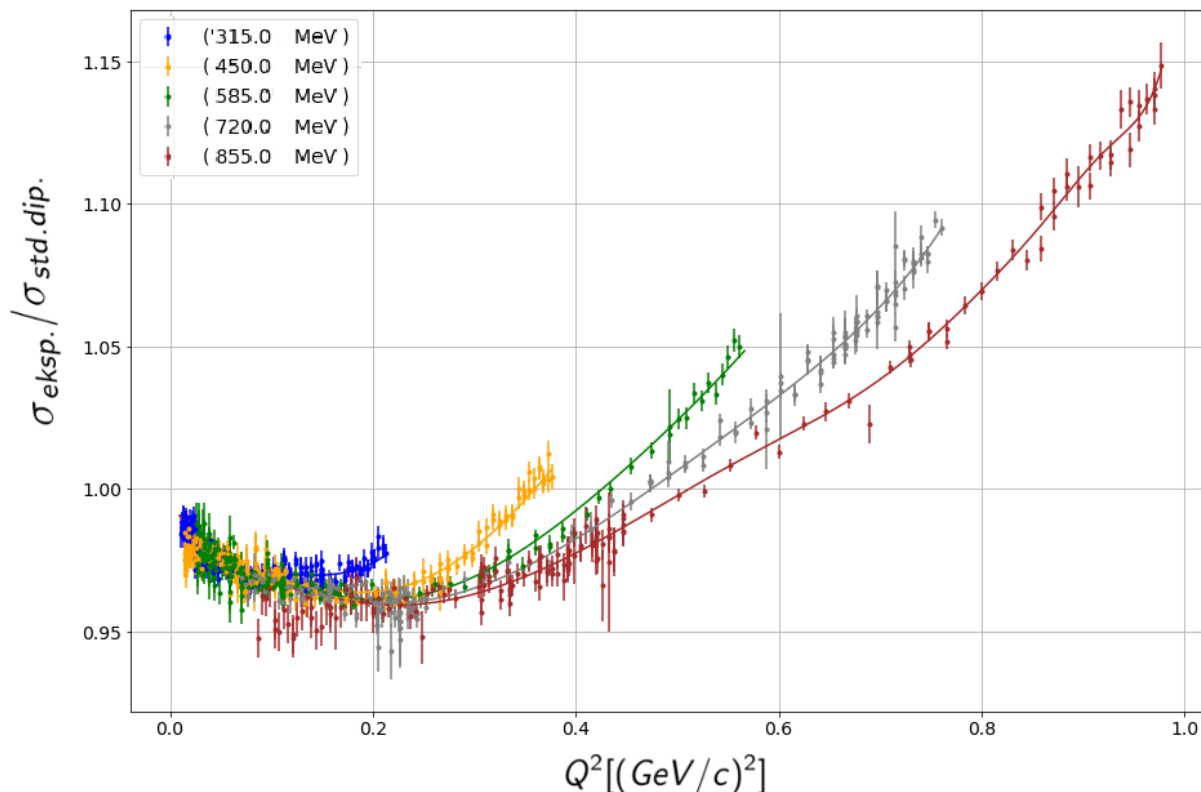
$$\chi^2 = \sum_i \left( r_i - n_i \frac{\int_{A_i} \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{model}} d\Omega}{\int_{A_i} \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{std. dipol}} d\Omega} \right)^2 / (\Delta r_i)^2, \quad (9)$$

$$\chi_{\text{red}}^2 = \frac{\chi^2}{\text{št. meritev} - \text{št. param.}}, \quad (10)$$

pri čemer je  $r_i$  razmerje med izmerjenim sipalnim presekom in standardnim dipolom,  $A_i$  sprejemljivost spektrometra,  $\Delta r_i$  statistična napaka in  $n_i$  normalizacijski parameter, ki pripada skupini meritev. Tu je treba omeniti tudi, da v opisanem primeru  $\chi^2$  ne pomeni običajne vrednosti, ki se uporablja v statistiki, kjer predstavlja mero za odstopanje od resničnega modela (izpostavljeno v [6]). Tukaj namreč resnični model ni znan, zato vrednost predstavlja odstopanje od domnevnega

<sup>4</sup>Zaradi povezave med radijem in sipalnimi preseki (enačba (5)) je bilo pri eksperimentu ključno, da se je približal čim manjšim vrednostim  $Q^2$ .

modela. Kljub temu pa je vrednost  $\chi_{\text{red}}^2$  nekakšna mera za kvaliteto modela. Optimalno število parametrov posameznega modela Bernauer izbere tako, da gleda, kje vrednost  $\chi_{\text{red}}^2$  z dodajanjem parametrov ne pada več bistveno. S takšno regresijo in opazovanjem odvoda modelov  $G_E(Q^2)$  Bernauer določi nabojni radij protona ( $0.879 \pm 0.015$ ) fm, kar je bilo leta 2010 skladno z dotlej uveljavljeno vrednostjo.



**Slika 3.** Prikaz obdelanih meritev sipalnih presekov do katerih v viru [3] pride Jan C. Bernauer pri vseh vpadnih energijah in z ocenjenimi merskimi napakami. Zvezna krivulja predstavlja model kubičnih zlepkov, ki je en najbolj natančnih modelov v Bernauerjevem doktorskem delu. Sipalni preseki so deljeni z dipolnim sipalnim presekom, da je odstopanje resničnosti od takšnega modela kar najbolj opazno.

#### 4. Ponovna analiza podatkov

Od objave Bernauerjevega rezultata je bilo narejenih precej ponovnih regresij na omenjene podatke, pridobljene vrednosti nabojnega radija pa si niso enotne. Regresije na podatke sem se lotil tudi sam, pri tem pa ubral način, ki se od Bernauerjevega v nekaterih pogledih nekoliko razlikuje.

Namesto da bi hkrati prilagajal modela  $G_E(Q^2)$  in  $G_M(Q^2)$ , sem si problem nekoliko poenostavil, tako da sem za model  $G_M(Q^2)$  vzela kar Bernauerjevo regresijo modela kubičnih zlepkov (*cubic spline fit*), ki v njegovi doktorski nalogi [3] zelo dobro opiše podatke. Da omenjen približek ne bo bistveno pokvaril rezultata si lahko potrdimo, če si ogledamo enačbo (7). Opazimo da v limiti majhnih vrednosti  $Q^2$  (kjer nas zanima odvod, iz katerega pridobimo nabojni radij) in torej majhnih vrednosti  $\tau$ , ki vedno nastopa pred  $G_M(Q^2)$ , vrednost  $G_M$  igra bistveno manjšo vlogo kot vrednost  $G_E$ . Posledično lahko s privzetjem približnega modela  $G_M(Q^2)$  prek Rosenbluthove formule (7) podatke sipalnih presekov prevedemo na podatke  $G_E(Q^2)$ , s čimer precej zmanjšamo število prostih parametrov, ne da bi znatno vplivali na pridobljeni nabojni radij.

Kot že omenjeno pri izbiri modelov nimamo teoretičnih smernic za izbiro, paziti moramo le, da so dovolj fleksibilni. Odločil sem se za regresijo naslednjih:

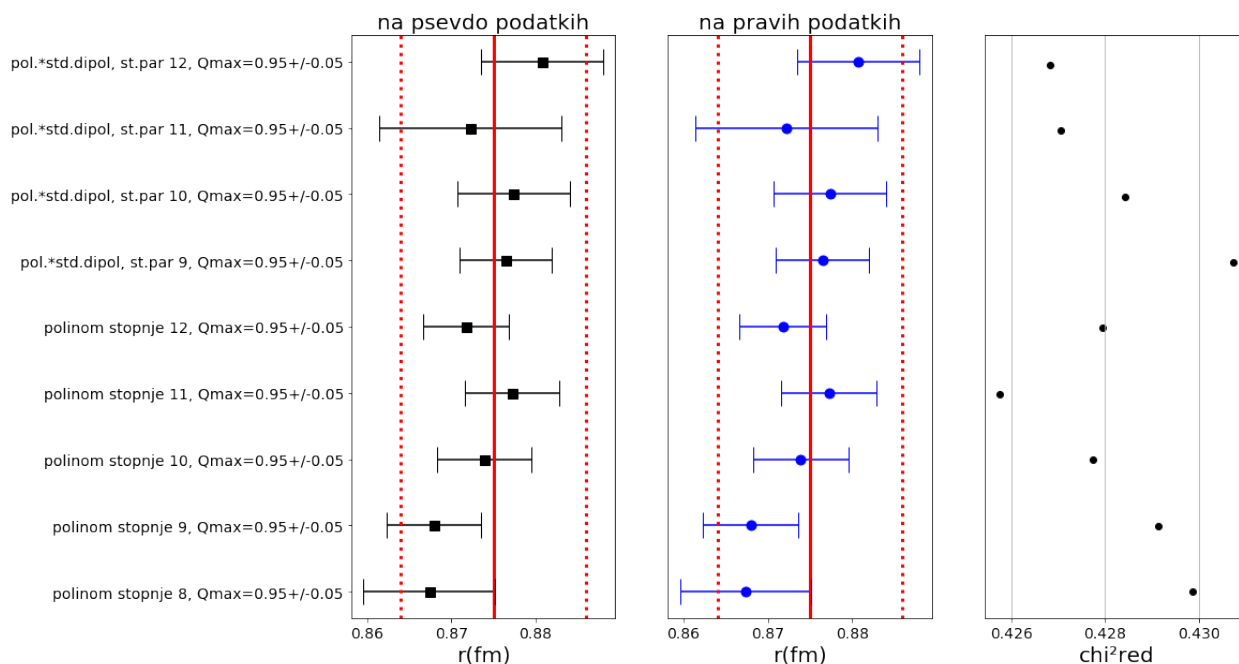
- Polinom:  $1 + c_1 Q^2 + c_2 Q^4 + \dots$
- Rekurzivni ulomek:  $\frac{1}{1 + \frac{c_1 Q^2}{1 + \frac{c_2 Q^4}{\dots}}}$
- Standardni dipol:  $\left(1 + \frac{Q^2}{c}\right)^{-2}$
- Standardni dipol · polinom:  $\left(1 + \frac{Q^2}{c}\right)^{-2} (1 + c_1 Q^2 + c_2 Q^4 + \dots)$
- Standardni dipol + polinom:  $\left(1 + \frac{Q^2}{c}\right)^{-2} + c_1 Q^2 + c_2 Q^4 + \dots$
- Racionalna funkcija  $\frac{1 + c_1 Q^2 + c_3 Q^4 + \dots}{1 + c_2 Q^2 + c_4 Q^4 + \dots}$

Pri vsakem modelu lahko spreminjamo število parametrov, paziti pa je treba tudi na pravilno implementacijo lebdeče (*floating*) normalizacije, kot je opisano v podpoglavju 3. Kot prvi kriterij za optimalno število parametrov posameznega modela sem podobno kot Bernauer [3] spremljal vrednost  $\chi_{\text{red}}^2$  in strmino njenega padanja z dodajanjem parametrov. Zgolj s tem kriterijem sem lahko izločil nekaj modelov (celotne analize zavoljo jedrnatosti tukaj ne navajam) in se omejil na polinome in njihove vsote oziroma produkte z modelom standardnega dipola.

Bernauer [3] se v svoji doktorski nalogi omeji na globalno regresijo in modele prilagaja na podatke na celem obsegu  $Q^2$ , Griffioen idr. [4] pa se pri ponovni regresiji omejuje na podatke s  $Q^2$  manjšim od  $0.02 \text{ (GeV/c)}^2$ . Za lažjo primerjavo sem modele primerjal pri različnih vrednostih maksimalnega  $Q^2$ . V tem članku navajam dva rezultata, saj nam nekaj pove tako globalna regresija, kjer model skuša opisati fizikalne zakonitosti na vsem območju, kot regresija na omejenem območju  $Q^2$ , pri kateri nekaj informacije sicer zavržemo, vendar pa pričakujemo lepši opis dogajanja okrog  $Q^2=0$ , kjer nas zanima odvod.

Nekaj pozornosti pri iskanju zanesljivega rezultata je potrebno nameniti tudi pristranskosti modelov. Model, ki lepo opiše meritve, ne opiše namreč nujno tudi resničnosti. Za oceno pristranskosti modela bi potrebovali pravo funkcijsko odvisnost, ker pa je ne poznamo, se zatečemo k umetno generiranim psevdo podatkom, za katere poznamo resnično odvisnost. Zopet se poslužimo Bernauerjevega modela kubičnih zlepkov [3]. Vzamemo vrednosti  $G_E$ , ki jih pri vrednostih  $Q^2$ , za katere imamo tudi prave meritve, razberemo iz njegovega modela in s pomočjo standardnih odklonov naših meritev generiramo zadostno število setov psevdo podatkov. Nato naše modele prilagajamo generiranim podatkom in gledamo povprečne vrednosti nabojnega radija ter jih primerjamo z vrednostjo, ki jo z modelom kubičnih zlepkov pridobi Jan Bernauer (3. poglavje). Ker je resnična odvisnost naših generiranih psevdo podatkov znana (model kubičnih zlepkov), pričakujemo, da se bo nabojni radij, pridobljen iz nepristranskega modela, skladal z Bernauerjevim.

Pri regresiji na celoten nabor pravih podatkov z opazovanjem pristranskosti in  $\chi_{\text{red}}^2$  za najboljši model določim polinom stopnje 11, rezultat, ki ga dobim s pomočjo odvoda pa je v tem primeru  $(0.876 \pm 0.006) \text{ fm}$  (prikazano na sliki 4). Rezultat se sklada z Bernauerjevo vrednostjo in se odmika od danes prevladujoče vrednosti nabojnega radija.



**Slika 4.** Primerjava nabojnih radijev, pridobljenih s pomočjo regresije različnih modelov pri celotnem obsegu  $Q^2$  (v  $(\frac{\text{GeV}}{c})^2$ ) na generiranih psevdno podatkih in na pravih podatkih. Z rdečo je označen Bernauerjev rezultat, odklon od njega je nekakšno merilo za pristranskost modelov. Prikazani so le modeli, ki so se tudi sicer izkazali za dovolj dobre. Uspešnost posameznih modelov merimo z vrednostjo minimalnega  $\chi_{\text{red}}^2$ .

Pri regresiji modelov na majhne vrednosti  $Q^2$  opazimo, da zaradi manjšega števila podatkov potrebujemo manj prostih parametrov. Izkaže se, da je pristranskost modelov z določenim številom parametrov odvisna od razpona podatkov, ki ga uporabimo. Za nekaj modelov z opazovanjem pristranskosti (ki ga tukaj ne bom navajal) določim največji še smislen nabor podatkov. Poleg tega hočemo poiskati radij, ki bo karseda natančno določen, skupaj z zmanjševanjem nabora podatkov namreč rastejo napake pridobljenih radijev. Kot merilo za kvaliteto modelov zato vzamemo vsoto variance in kvadrata pristranskosti modelov. Varianca in pristranskost sta definirani kot:

$$\text{Bias}(r_{\text{model}}) = E[r_{\text{model}} - r_{\text{Bernauer}}],$$

$$\text{Var}(r_{\text{model}}) = E[(r_{\text{model}} - E[r_{\text{model}}])^2],$$

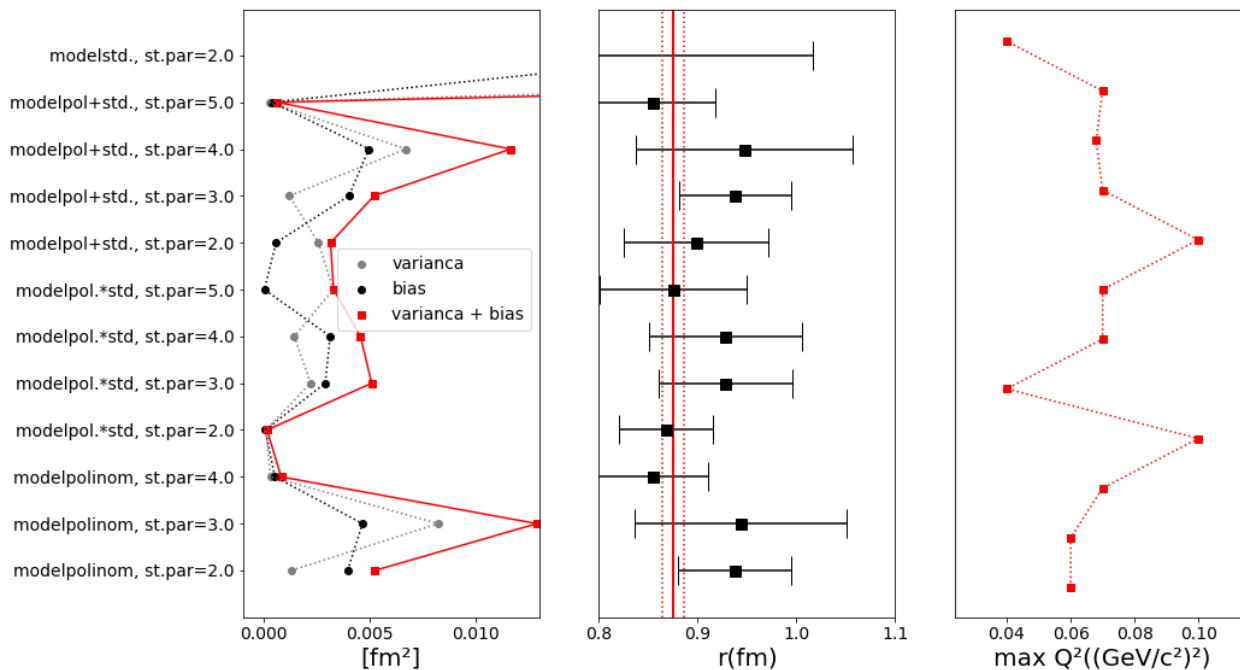
kjer funkcija  $E(x)$  predstavlja povprečno vrednost vzorca in je ocena za pričakovano vrednost naključne spremenljivke  $X$ . Med modeli, prikazanimi na sliki 5, sem po omenjenih kriterijih določil nabojni radij protona ( $0.868 \pm 0.048$ ) fm za produkt standardnega dipola in linearne funkcije na območju do  $Q^2 = 0.1(\frac{\text{GeV}}{c})^2$ . Pridobljen radij je sicer blizu Bernauerjevemu, vendar pa znotraj intervala napake leži tudi vrednost 0.84 fm. Nasploh je videti, da se tudi rezultati pri nižjih vrednostih  $Q^2$  gibajo okrog višje vrednosti nabojnega radija, vendar pa so zaradi velikih napak manj zgovorni.

## 5. Ostali rezultati obravnave elastičnega sipanja

V upanju, da bi pojasnili razliko Bernauerjevega rezultata in rezultata spektroskopskih meritev, so se številni lotili podobnih eksperimentov in ponovne analize starih meritev. Rezultati regresij so raznoliki, pri čemer dobljeni rezultati pokrivajo tako stare vrednosti nabojnega radija (poleg Bernauerjevega in tukaj dobljenega lahko navedemo še rezultate Arringtona idr. [18] ter Mihoviloviča idr. [19]) kot vrednosti, ki se skladajo z novo, manjšo vrednostjo nabojnega radija (tu gre predvsem izpostaviti rezultat Griffioena idr. [4]).



## Uganka protonskega radija



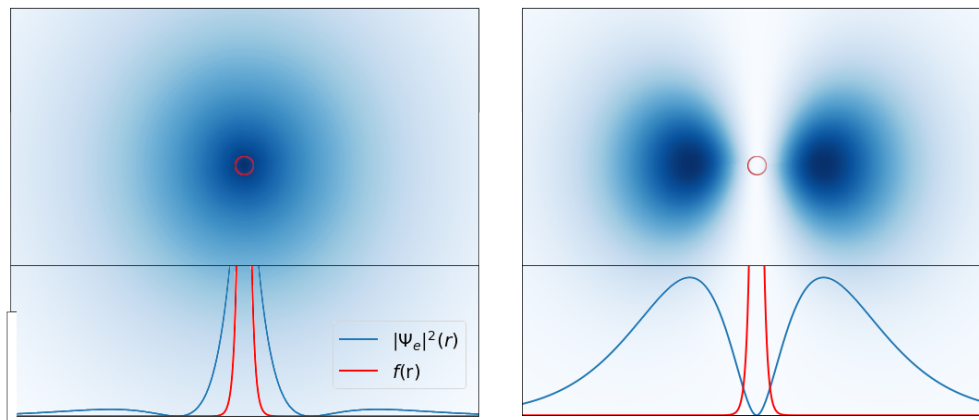
**Slika 5.** Primerjava nabojnih radijev, pridobljenih s pomočjo regresije različnih modelov pri različnih majhnih obsegih  $Q^2$  (za vsak model podano na desnem grafu) na pravih podatkih. Merilo za uspešnost regresije (na levi strani) je vsota variance in kvadrata pristranskosti (da se ujema enote  $\text{fm}^2$ ). Rdeč pas na srednjem diagramu predstavlja Bernauerjevo vrednost nabojnega radija [3].

Ključni prispevek na tem področju pa je prispevala ekipa Ashota Gaspariana idr., ki je na pospeševalniku CEBAF (Thomas Jefferson National Accelerator Facility) leta 2012 pričela s pripravami na poskus imenovan PRad. Šlo je za poskus, ki je deloval po podobnem principu kot Bernauerjev, vendar z nekaj ključnimi izboljšavami. Med detektorjem in tarčo so odstranili okna, kjer bi lahko prihajalo do nezaželenega sipanja, magnetne spektrometre pa so nadomestili z elektromagnetnimi kalorimetri, s čimer so se lahko približali še manjšim kotom in prenosom gibalne količine. Leta 2019 je ekipa PRad eksperimenta objavila meritev radija protona ( $0.831 \pm 0.019$ ) fm, kar se ujema z nižjo vrednostjo, poleg tega pa se sklada z najnovejšo vrednostjo Rydbergove konstante. Natančnost tega rezultata je večja kot pri sorodnih eksperimentih [21]. Eksperiment je v veliki meri začrtal novo vrednost protonskega radija, vendar pa kljub temu še vedno ne obstaja gotova razlaga odstopanja zgodnejših eksperimentov. V prihodnje se obeta še nekaj poskusov, ki bodo morda še bolj razjasnili vprašanja. Primer je načrtovan eksperiment sipanja mionov na protonih na inštitutu Paula Scherrera v Švici [22], ki se bo ponovno lotil vprašanja razlike med mioni in elektroni (glej 7. poglavje).

## 6. Lambov premik

Pri obravnavi vezanih stanj v vodikovem atomu je mogoče zaznati majhne zamike energijskih nivojev, imenovane Lambovi premiki, ki so močno povezani z razporeditvijo naboja po protonu. Če jih uspemo izmeriti, lahko zato natančno določimo nabojni radij protona. Lambov premik med stanji  $2S_{1/2}$  in  $2P_{1/2}$  je leta 1947 prvi opazil Wills E. Lamb mlajši. Pri premiku sicer igra vlogo nekaj prispevkov, v preprosti sliki pa si del efekta, ki nas zanima, lahko razložimo na sledeči način. V nekaterih stanjih ( $2S_{1/2}$ ) v vodikovem atomu je valovna funkcija in z njo verjetnostna gostota bistveno skoncentrirana v središču, kjer se nahaja proton. Lahko si predstavljamo, da se elektron s precejšnjo verjetnostjo nahaja znotraj protona, kjer čuti le del celotnega naboja, kar nekoliko

zmanjša energijo vezanega stanja glede na energijo, pridobljeno s točkasto obravnavo protona. Na drugi strani je valovna funkcija stanja  $2P_{1/2}$  skoncentrirana izven protona in torej ni podvržena Lambovemu premiku. Z opazovanjem energijskih prehodov med omenjenima stanjema in energije oddanih fotonov je premik mogoče izmeriti [7].



**Slika 6.** Preprosta vizualizacija orbital 2s (levo) in 2p (desno) v vodikovem atomu, ki pomaga razumeti idejo Lambovega premika. Prikazane so vrednosti verjetnostne gostote v odvisnosti od radija. Porazdelitev naboja v protonu  $f(r)$  zavoljo boljše predstave ni narisana v merilu ampak je razširjena.

Meritve Lambovega premika pri elektronskem vodikcu so zelo težavne, saj je ta velikostnega reda zgolj 0.02 odstotkov energije osnovnega stanja [7] in se nahaja v območju rentgenske svetlobe. Meritve pa si lahko nekoliko olajšamo, če elektron v vodikcu nadomestimo z mionom (uporabimo t.i. mionski vodik), ki ima Bohrov radij okrog 200 krat manjši od elektronskega. Posledično Lambov premik postane večji do reda velikosti dveh procentov, kar je preprosteje izmeriti. Lambov premik v takšnem vodikcu lahko povežemo z nabojnim radijem v fm po formuli [8]

$$\Delta E = 209.9779(49) - 5.2262\langle r^2 \rangle + 0.0347 (\langle r^2 \rangle)^{\frac{3}{2}} \text{ meV}, \quad (11)$$

kjer lahko tudi opazimo, da je prvi člen, ki ga pripišemo tvorbi parov elektron-pozitron bistveno večji od drugega člena, ki ga prispeva proton in ki nas zanima. Ekipa pod vodstvom Randolfa Pohla (Max Planck Institute) je leta 2010 objavila rezultate poskusa z mionskim vodikom. Pri poskusu so najprej obstreljevali elektronski vodik s curkom mionov, dobljen mionski vodik pa nato vzbujali z laserji, pri čemer je bil namen spraviti atome v stanje  $2P_{1/2}$ . Valovna dolžina laserja, pri kateri se je dogajalo vzbujanje, je sorazmerna z energijsko razliko obeh stanj. Rezultat, ki ga je dobil Pohl ( $(0.84184 \pm 0.00067)$  fm [8]), je za kar  $8\sigma$  odstopal od dotlej uveljavljene vrednosti in vrednosti, ki jo je v istem letu objavil Jan C. Bernauer, kar je povzročilo precej razburjenja in sprožilo t.i. uganko. Nekateri so razliko pripisovali različnemu obnašanju miona in elektrona, kar je odprlo pestro paleto novih teorij (7. poglavje). Pohl je leta 2016 izvedel podoben eksperiment z mionskim devterijem, vrednost, ki jo je dobil pa je bila podobna vrednosti prvega eksperimenta [9].

Očitna rešitev dvoma, ali je za razliko v nabojnih radijih kriva uporaba miona, je bila raba elektronskega vodika namesto mionskega, kar je kot že omenjeno predstavljalo mnogo večji izziv. Nekateri so se lotili merjenja prehodov med drugimi, lažje izmerljivimi stanji, pri katerih se je spreminjala vrednost glavnega kvantnega števila (prehod 2S v 4P [10], prehod iz 1S v 3S [11]), zato so bile te meritve odvisne ne le od nabojnega radija, ampak tudi od Rydbergove konstante (glej 7. poglavje).

Izzivom natančnega merjenja prehoda med stanji  $2S_{1/2}$  in  $2P_{1/2}$  pa je bila nazadnje vendarle kos ekipa pod vodstvom Erica Hesselsa [15], ki se je merjenja izjemno majhnega premika lotila s pomočjo Ramseyjeve interferometrije, metode, ki temelji na magnetni resonanci in katere uporabo lahko danes najdemo tudi v atomskih urah. Ekipa je poskusu in težavni obdelavi rezultatov namenila kar osem let, pri tem pa veliko pozornost namenila odstranjevanju dejavnikov, ki bi lahko nezaželeno vplivali na premik energijskih nivojev [16]. Septembra 2019 je bil v reviji *Science* objavljen njihov rezultat ( $0.833 \pm 0.010$ ) fm, kar se sklada z rezultati, pridobljenimi s pomočjo mionskega vodika, in kar na videz razreši marsikateri dvom, ki se je porajal ob prejšnjih poskusih podobnega tipa.

Vendar pa tudi na področju spektroskopskega merjenja nabojnega radija obstajajo nerazrešena odstopanja, med katerimi posebej izstopa meritev prehoda iz  $1S$  v  $3S$ , ki so jo leta 2018 objavili Fleuerbaey idr. [11]. Njihov dobljen nabojni radij ( $0.877 \pm 0.013$ ) fm se odlično sklada z višjo vrednostjo, ki je prevladovala pred letom 2010. Za dokončno razrešitev vprašanja spektroskopije bodo torej najbrž potrebni nadaljnji eksperimenti, ki bodo razširili nabor obravnavanih atomov ter vključili denimo helij ali manjše molekule [17].

## 7. Pomen uganke protonskega radija

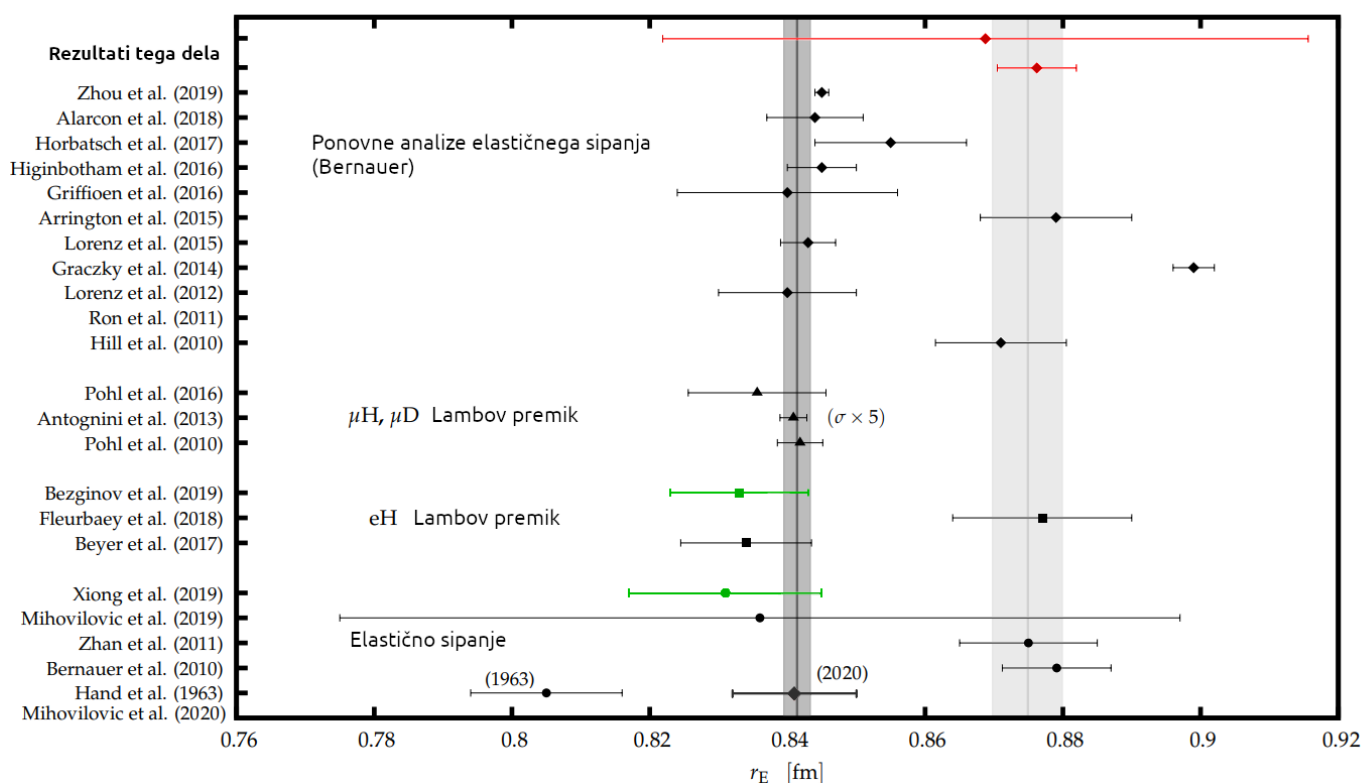
Prva in na prvi pogled najbolj očitna motivacija za razrešitev vprašanja o protonskem radiju, je želja po poznavanju velikosti osnovnega gradnika snovi. Pred letom 2010 je bila uveljavljena vrednost 0.877 fm, v najnovejših zbirkah priporočenih vrednosti CODATA pa se že navaja nova prevladujoča vrednost 0.8414 fm [14]. Vendar pa je treba omeniti, da čeprav je vrednost nabojnega radija iz marsikaterega teoretičnega in eksperimentalnega vidika zanimiva, pa na širše področje fizike nima neposrednega vpliva.

Odmevnejše je bilo vprašanje, kakšna teoretična podlaga privede do razlik, ki sta jih leta 2010 zabeležila Randolph Pohl (6. poglavje) in Jan C. Bernauer (3. poglavje). Pojavil se je dvom o našem razumevanju interakcije med protonom in mionom, kar bi morda lahko povezali z našim nerazumevanjem magnetnega momenta miona, nekateri pa so celo menili, da bi razliko lahko pripisali nekemu novemu še neodkritemu delcu, ki naj bi povzročil drugačno obnašanje miona in elektrona. Uganka protonskega radija je med drugim postala odmevna prav zaradi obetanja odkritij, ki bi segala preko standardnega modela, vendar pa je z nedavno ponovitvijo poskusov, ki so vrednosti poenotili, ta možnost na razočaranje nekaterih postala manj verjetna [16].

Pomemben prispevek protonskega radija k razumevanju fizike sledi tudi iz dejstva, da je vrednost  $\langle r^2 \rangle$  močno povezana z vrednostjo Rydbergove konstante  $R_\infty$ , ki nam določa energijske nivoje v atomih. Energijske nivoje v atomu vodika lahko parametriziramo [12]:

$$E(n, l, j)/h = -\frac{cR_\infty m_{red}}{n^2 m_e} + \frac{E_{NS}}{n^3} \delta_{l0} + \Delta(n, l, j), \quad (12)$$

kjer je  $E_{NS}$  v prvem redu sorazmeren vrednostjo  $\langle r^2 \rangle$ . Če pride torej do spremembe vrednosti nabojnega radija protona, pride tudi do spremembe vrednosti  $R_\infty$ , če hočemo, da enačba še vedno opiše izmerjene energijske nivoje. Rydbergova konstanta sicer zaradi pretvorbe enot nastopa tudi v členih  $E_{NS}$  in  $\Delta(n, l, j)$ , vendar pa za te člene ne potrebujemo njene polne natančnosti. Posledično se lahko pri merjenju prehodov, kjer se glavno kvantno število  $n$  ohrani, povečini otresemo kritične odvisnosti od  $R_\infty$  [12].



**Slika 7.** Prikaz najpomembnejših rezultatov nabojnih radijev protona skupaj z avtorji in letnicami objave. Siva pasova predstavljata vrednost v zbirki CODATA, temno siva je v veljavi sedaj, svetlo sivo pa zbirka navaja v letu 2010. Rdeči meritvi sta pridobljeni v tem delu poleg ostalih rezultatov ponovnih analiz obravnavanih podatkov, z zeleno pa sta poudarjena rezultata ekipe PRad [21] in ekipe Hesselsa idr. [15]. Rezultat Handa iz leta 1963 je bil ponovno analiziran leta 2020 [20], prvotno odstopanje je šlo pripisati računski napaki. Diagram je prirejen po [20].

Težavo pri določanju vrednosti Rydbergove konstante, ki nastopi ob nejasnem nabojnem radiju protona, si je potrebno ogledati v luči dejstva, da je  $R_\infty$  ena najbolj določenih fundamentalnih konstant v naravi z relativno natančnostjo  $1.2 \cdot 10^{-12}$ . Če upoštevamo, da so fundamentalne konstante med seboj marsikdaj povezane in se opirajo druga na drugo pri svojih definicijah, vloga natančno določene vrednosti  $R_\infty$  kaj hitro postane jasna [13]. Poskusi, ki so v preteklem desetletju s spektroskopijo zasledovali radij protona, so dejansko pripomogli k spreminjanju vrednosti  $R_\infty$  [12]. Vrednost, ki jo katalog priporočenih vrednosti fundamentalnih konstant CODATA navaja v letu 2018 se znatno razlikuje od vrednosti, navedene v letu 2010 (za več kot  $6\sigma$ ) [14].

## 8. Zaključek

Po desetletju prizadevanj je videti, da se uganka, ki sta jo leta 2010 nepričakovano sprožila Pohl [8] in Bernauer [3] naposled le bliža svoji rešitvi. Nov rezultat merjenja Lambovega prehoda v elektronskem vodiku [15] in nadgrajen poskus elastičnega sipanja [21] sta razblinila marsikateri dvom in uveljavila novo vrednost nabojnega radija protona. Vendar pa kljub temu nekatere podrobnosti ostajajo nerazrešene, na primer zakaj nekateri rezultati obdelav podatkov sipalnega eksperimenta iz leta 2010 [3], ki jim pridružujem tukaj pridobljen rezultat  $(0.876 \pm 0.006)$  fm in  $(0.868 \pm 0.048)$  fm, in celo en izmed nedavnih poskusov merjenja Lambovega premika [11] še vedno govorijo v prid večji vrednosti protonskega radija. Temu vprašanju je bilo namenjene precej pozornosti in ni videti očitnega odgovora. Zato bo za dokončen odgovor na uganko protonskega radija po vsej verjetnosti

treba počakati na nadaljnje eksperimente [22].

## 9. Zahvala

Zahvaljujem se doc. dr. Mihi Mihoviloviču za gradivo, pomoč in nasvete pri pisanju članka.

### LITERATURA

- [1] B. Povh, R. Klaus, C. Scholz in F. Zetsche, *Particles and Nuclei*, New York: Springer (1995), ISBN 978-3540793670.
- [2] V. Hughes, F. Iachello in D. Kusnezov, *The Gregory Breit Centennial Symposium*, Yale University, USA, Singapore River Edge, N.J: World Scientific. p. 9., (2001), ISBN 978-981-02-4553-5.
- [3] J. C. Bernauer, *Measurement of the elastic electron-proton cross section and separation of the electric and magnetic form factor in the  $Q^2$  range from 0.004 to 1 GeV*, PhD Thesis (2010), Institut für Kernphysik Johannes Gutenberg-Universität, Mainz.
- [4] K. Griffioen, C. Carlson in S. Maddox, *Are Electron Scattering Data Consistent with a Small Proton Radius*, Phys. Rev. C **93**, 065207 (2016).
- [5] B.C. Bernauer idr., *The electric and magnetic form factors of the proton*, Phys. Rev. C **90** (2014), 015206.
- [6] B.C. Bernauer in M.O. Distler, *Avoiding common pitfalls and misconceptions in extractions of the proton radius*, Discussion basis for the ECT\* workshop on 'The proton radius puzzle', Trento 2016 (2016), arXiv:1606.02159 [nucl-th].
- [7] B.C. Bernauer in R. Pohl, *The Proton Radius Puzzle*, Scientific American, Volume **310**, Issue 2 (2014).
- [8] R. Pohl, A. Antognini, F. Nez idr., *The size of the proton*, Nature **466** (2010), 213–216.
- [9] R. Pohl, F. Nez, M.P. Luis idr., *Laser spectroscopy of muonic deuterium*, Science 12 Aug 2016: Vol. **353**, Issue 6300, pp. 669-673.
- [10] A. Beyer, L. Maisenbacher, A. Matveev idr., *The Rydberg constant and proton size from atomic hydrogen*, Science 06 Oct 2017:Vol. **358**, Issue 6359, pp. 79-85.
- [11] H. Fleurbaey, S. Galtier, S. Thomas, *New Measurement of the 1S-3S Transition Frequency of Hydrogen: Contribution to the Proton Charge Radius Puzzle*, Phys. Rev. Lett. **120** (2018), 183001.
- [12] R. Pohl idr., *Deuteron charge radius and Rydberg constant from spectroscopy data in atomic deuterium*, Metrologia **54** L1 (2017).
- [13] *The Rydberg Constant A Fundamental Constant*, URL: <https://www.fossilhunters.xyz/hydrogen-atom/the-rydberg-constant-a-fundamental-constant.html> (uporabljeno 28.2.2020).
- [14] *CODATA Internationally recommended 2018 values of the Fundamental Physical Constants*, <https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html> (uporabljeno 28.2.2020).
- [15] N. Bezginov, T. Valdez in M. Horbatsch, *A measurement of the atomic hydrogen Lamb shift and the proton charge radius*, Science 06 Sep 2019: Vol. **365**, Issue 6457, pp. 1007-1012.
- [16] J. Ouellette, *Physics not "broken" after all? We're close to resolving proton radius puzzle*, Arstechnica (2019), URL: <https://arstechnica.com/science/2019/09/physics-not-broken-after-all-were-close-to-resolving-proton-radius-puzzle/> (uporabljeno 28.2.2020)
- [17] J.-P. Karr, D. Marchland, *Progress on the proton-radius puzzle*, Nature **575**(2019), 61-62 .
- [18] J. Arrington in I. Sick, *Evaluation of the Proton Charge Radius from Electron-Proton Scattering*, Journal of Physical and Chemical Reference Data **44** (2015), 10.1063/1.4921430.
- [19] M. Mihovilovič, P. Achenbach, T. Beranek idr., *The proton charge radius extracted from the Initial State Radiation experiment at MAMI*, (2019), doi: 10.1038/d41586-019-03364-z.
- [20] M. Mihovilovič, D.W. Higinbotham, M. Bevc idr., *Reinterpretation of Classic Proton Charge Form Factor Measurements*, Front.in Phys. **8** (2020) 36.
- [21] W. Xiong, A. Gasparian, H. Gao idr., *A small proton charge radius from an electron-proton scattering experiment*, Nature **575**(2019), 147–150.
- [22] R. Gilman, E.J. Downie, G. Ron, *Technical Design Report for the Paul Scherrer Institute Experiment R-12-01.1: Studying the Proton "Radius" Puzzle with  $\mu p$  Elastic Scattering*, (2017), arXiv:1709.09753v1.
- [23] Institut für Kernphysik, A1, URL: <https://www1.kph.uni-mainz.de/A1/gallery/> (uporabljeno 28.4.2020)
- [24] L. Hand idr., *Electric and Magnetic Formfactor of the Nucleon*, Rev. Mod. Phys. **35** 335 (1963).