

TOPOLOŠKA SVETOLOBA

URBAN OGRINEC

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Članek opisuje obnašanje fotonov v topološko netrivialnih materialnih kot analogijo elektronom v topoloških izolatorjih. V prvem teoretičnem delu je razloženih nekaj pojmov povezanih z opisom in razumevanjem topološke svetlobe: uvedem Blochova stanja Berryjevo fazo in ukrivljenost, ki posplošujeta pojem magnetnega potenciala in pretoka na poljubno mnogoterost, Chernovo število, opisan pa je tudi vpliv simetrij na 2D in 3D topološke faze. Drugi del članka pa je namenjen aplikacijam na osnovi topološkega vodenja in kontrole svetlobnih tokov, predvsem na mikroskali, in opisu izbranih eksperimentov.

TOPOLOGICAL PHOTONICS

The article describes the behaviour of photons in topologically nontrivial materials by way of analogy with electrons in topological insulators. In the first theoretical part some key notions regarding understanding of topological light are explained e.g. Bloch states, Berry phase and Berry curvature, the latter two generalizing the concept of vector magnetic potential and flux through an arbitrary manifold, respectively. Furthermore, Chern invariant is defined together with an influence symmetries have on 2D and 3D topological phases. The second part of the article is dedicated upon applications regarding guidance and control of topological light, in particular on a microscale. In the end discussion touches upon some selected experiments in the field.

1. Uvod

Topologija je veja matematike, ki se ukvarja z invariantami, ohranjenimi pri zveznih deformacijah. Nedavno je odprla številna nova vprašanja v fotoniki. S pomočjo skrbno ustvarjenih topologij lahko pripravimo svetlobo k potovanju le v eni smeri, tj. brez sipanja nazaj [1, 2].

Topološka svetloba je torej hitro razvijajoče se področje v znanosti, ki izkorišča geometrične in topološke ideje za nadzor obnašanja svetlobe. Področje se je začelo s študijami na področju fizike elektronskih stanj v kondenzirani snovi, kot je odkritje celoštevilskega kvantnega Hallovega pojava leta 1980 [3]. Tu ima 2D elektronski plin ob prisotnosti pravokotnega magnetnega polja Hallovo prevodnost neodvisno od magnetnega polja in enako celoštevilskemu mnogokratniku osnovnega pretoka $\sigma = e^2/h$, slednji je povezan s topološko invarianto sistema, Chernovim številom¹, ki opisuje globalno strukturo valovnih funkcij v momentnem prostoru v Brillouinovi coni [4].

Pomemben vpogled v fizikalni pomen topoloških invariant ponuja prostornina-rob korespondenca, kjer na robu dveh stikajočih se materialov z različnima invariantama nujno obstajajo robna stanja z energijami, ki ustrezajo energijski reži prostornin materialov.

Haldane in Raghu sta leta 2008 [5] naredila ključno opazko, da so topološki pasovi značilna lastnost valovanja v periodičnem potencialu, ne glede na klasično ali kvantno naravo valov. Opazovala sta mikrovalovanje v 2D prostorsko-periodičnem materialu s elementi, ki kršijo časovno simetrijo, s čimer sta si zagotovila topološko netrivialnost. Takšni fotoniki sistemi dopuščajo robna stanja s frekvencami znotraj pasovne reže.

Danes si raziskovalci prizadevajo odkriti nove topološke modele in zgornji model uresničiti v optični domeni. Največji izziv je odsotnost velikih magneto-optičnih odzivov pri optičnih frekvencah. Način, da se temu izognemo, so notranje prostorske stopnje fotonov (pseudospin) in, da iščemo analogijo kvantnemu spinskemu Hallovemu sistemu (ni kršitve časovne simetrije, a vsak pseudospin¹ čuti umetno magnetno polje 3.2, 3.3) [6]. Druga pot je, da uporabimo časovno modulacijo, kar naredi efektivno časovno neodvisni Hamiltonijan, ki krši časovno simetrijo 3.3 [7]. Zadnji način so topološke črpalke [8], ki v članku ne bodo obravnavane.

¹kvantna prostostna stopnja analogna spinu elektrona

V tem članku so predstavljeni izbrani teoretični pojmi povezani s topološko svetlobo: Berryjeva faza, topološki fazni prehod, časovna in prostorska simetrija, Chernovo število, 2D in 3D pasovne degeneracije; kot tudi aplikacije v obliki sklopljenih resonatorjev, bianizotropičnih metamaterialov, kvazikristalov in giromagnetnih kristalov.

2. Osnove o topologiji svetlobnih polj

2.1 Blochova stanja

Da razumemo disperzijske pasove v topoloških fazah, si najprej oglejmo, kako nastanejo.

Oglejmo si enodelčni Hamiltonijan $H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, kjer sta \mathbf{r} in \mathbf{p} operatorja lege in gibalne količine. Ob predpostavki, da je Hamiltonijan prostorsko periodičen $H(\mathbf{r} + \mathbf{a}_i, \mathbf{p}) = H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, kjer so \mathbf{a}_i primitivni vektorji kristalne mreže, se lahko sistem opiše s Blochovimi stanji $\Psi_{n,\mathbf{k}} = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r})$, kjer je n indeks pasu, \mathbf{k} pa moment znotraj 1. Briullinove cone. Blochova stanja so periodična z enako periodo in so lastna stanja Blochovega Hamiltonijana

$$H_{\mathbf{k}} \equiv \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (1)$$

namreč,

$$H_{\mathbf{k}}u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = E_n(\mathbf{k})u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad (2)$$

kjer je $E_n(\mathbf{k})$ disperzijska energija n -tega pasu. Medtem ko je fizika energijskih pasov zaobjeta delno v disperzijski relaciji $E_n(\mathbf{k})$, je pomembna tudi *geometrična* lastnost, kako se Blochova lastna stanja spreminjajo kot funkcija \mathbf{k} . Kasneje bomo videli, da je ta geometrija lastnih stanj zakodirana v Berryjevi fazi.

2.2 Chernovo število

V tem podpoglavju je predstavljen Gauss-Bonnetov izrek kot lahko predstavljev si primer izračuna invariante ploskve iz ukrivljenosti. V nadaljevanju so uvedene Berryjeva faza, povezava in ukrivljenost, ki vodijo do definicije Chernovega števila, invariante, ki klasificira topološke materiale.

Sklenjena ploskev se lahko gladko deformira v različne oblike brez rezanja ali lepljenja. Gauss-Bonnetov izrek 3, ki povezuje geometrijo in topologijo, trdi, da je totalna Gausova ukrivljenost (produkt glavnih ukrivljenosti) pri 2D sklenjeni ploskvi vedno celo število – genus

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\text{ploskev}} K dA = 2(1 - g) = \chi, \quad (3)$$

kjer je χ Eulerjeva karakteristika. Vsaka orientabilna sklenjena ploskev je topološko ekvivalentna sferi z nekaj prilepljenimi ročaji, g šteje te ročaje. Če upogibamo in deformiramo ploskev, se Eulerjeva karakteristika, topološka invarianta, ne spremeni, medtem ko pa ukrivljenost se. Izrek trdi, presenetljivo, da integral celotne ukrivljenosti ostane enak, ne glede na deformacijo. Za primer uporabe si oglejmo torus s $\chi = 0$, tako da mora biti celotna ukrivljenost ničelna. Če predstavimo torus kot kvadrat z identificiranimi stranicami, je to takoj očitno. Najenostavnejši primer izreka je, da je vsota kotov v trikotniku enaka 180° . Kasneje v tem poglavju definiramo Chernovo invarianto, ki je prav tako integral Berryeve ukrivljenosti.

Berryjeva faza se pojavi v ciklični adiabatni spremembi. Imamo Hamiltonijan $H(\mathbf{R})$, ki je odvisen od vektorskega parametra $\mathbf{R}(t)$, ki se spreminja s časom t . Če n -ta lastna vrednost $E_n(\mathbf{R})$ ostane nedegenerirana povsod vzdolž poti in je spreminjanje s časom zadosti počasno, sistem začeni

v lastnem stanju $|n(\mathbf{R}(\mathbf{0}))\rangle$ ostane v trenutnem lastnem stanju $|n(\mathbf{R}(\mathbf{t}))\rangle$ Hamiltonijana $H(\mathbf{R}(\mathbf{t}))$ do faze natančno. Faza stanja ob času t se lahko zapiše kot

$$|\Psi_n(t)\rangle = e^{i\gamma_n(t)} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(\mathbf{R}(t'))} |n(\mathbf{R}(t))\rangle, \quad (4)$$

kjer prvi eksponentni faktor predstavlja geometrično fazo, γ_n je Berryjeva faza, drugi faktor pa dinamično fazo. $|\Psi_n(t)\rangle$ mora zadoščati časovno-odvisni Schrödigerjevi enačbi

$$i \frac{d}{dt} |\Psi_n(t)\rangle = H(\mathbf{R}(t)) |\Psi_n(t)\rangle \quad (5)$$

kamor vstavimo nastavek (4) in dobimo

$$-\left(\frac{d}{dt}\gamma_n\right) |n\rangle + i \left|\frac{d}{dt}n\right\rangle = 0. \quad (6)$$

Berryjevo fazo izpeljemo torej kot

$$\gamma_n = i \int_0^t dt' \langle n(\mathbf{R}(t')) | \frac{d}{dt'} |n(\mathbf{R}(t'))\rangle = i \int_{\mathbf{R}(\mathbf{0})}^{\mathbf{R}(t)} d\mathbf{R} \langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} |n(\mathbf{R})\rangle, \quad (7)$$

kar kaže na to, da je Berryjeva faza odvisna le od poti v parametričnem prostoru in ne od hitrosti, s katero s parametri spreminjajo. V primeru sklenjene poti \mathcal{C} , $\mathbf{R}(T) = \mathbf{R}(0)$, je Berryjeva faza

$$\gamma_n = i \oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{R} \langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} |n(\mathbf{R})\rangle. \quad (8)$$

Na tem mestu omenimo paralelni transport. Če lastnemu stanju pripišemo tako poljubno fazo $|n(\mathbf{R})\rangle \rightarrow e^{i\phi(\mathbf{R})} |n(\mathbf{R})\rangle$, da je

$$\frac{d}{dt} |n\rangle \equiv 0, \quad (9)$$

imamo iz (6)

$$\gamma_n = 0. \quad (10)$$

Berryjeva faza je torej ničelna v t.i. inercialnem sistemu, pogoj (9) pa pomeni paralelni transport.

Čeprav se lahko Berryjevo fazo definira v splošnem parametričnem prostoru, se v naši razpravi omejimo primer, ko so parametri komponente valovnega vektorja \mathbf{k} znotraj 1. Brilluinove cone. Definiramo Berryjevo povezavo kot

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}) = \langle u(\mathbf{k}) | i\nabla_{\mathbf{k}} |u(\mathbf{k})\rangle. \quad (11)$$

Definicija Blochovih stanj ne določi celotne faze $u_{n,\mathbf{k}}$, zato je lahko svobodno določena. Pri umeritveni transformaciji ² $\mathbf{u}(\mathbf{k}) \rightarrow \exp(i\phi(\mathbf{k}))u(\mathbf{k})$, Berryjeva povezava ni umeritveno invariantna in se transformira kot $\mathbf{A}_n(\mathbf{k}) \rightarrow \mathbf{A}_n(\mathbf{k}) - \nabla_{\mathbf{k}}\chi(\mathbf{k})$. Vendar enoličnost $\exp(i\chi(\mathbf{k}))$ na začetku in koncu poti zahteva, da je Berryjeva faza za sklenjeno pot umeritveno invariantna modulo 2π . Dodatno: iz umeritveno odvisne Berryjeve povezave $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})$ lahko skonstruiramo umeritveno invariantno Berryjevo ukrivljenost³, ki ima v treh dimenzijah pseudovektorsko obliko:

$$\mathbf{F}(\mathbf{k}) = \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}_n(\mathbf{k}), \quad (12)$$

²Umeritev je matematični formalizem za regulacijo odvečnih prostostnih stopenj na primer faza valovne funkcije ($\mathbf{u}(\mathbf{k}) \rightarrow \exp(i\phi(\mathbf{k}))u(\mathbf{k})$). Transformacije med možnimi umeritvami so zaobjete v simetrijskih grupah (npr. $U(1)$). Za vsako umeritev dobimo ustrezno vektorsko polje (npr. $\mathbf{A}(\mathbf{r})$), ki vsaki točki prostora izbere odvečno prostostno stopnjo (fazo).

³V splošnem je Berryjeva ukrivljenost antisimetrični tenzor 2. ranga, ki je iz Berryjeve povezave dobljen z $F_{n,\mu\nu}(\mathbf{R}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}^\mu} \mathbf{A}_{n,\nu}(\mathbf{R}) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}^\nu} \mathbf{A}_{n,\mu}(\mathbf{R})$ ali $F_j = \epsilon_{jkl} \partial_k A_l = -Im \epsilon_{jkl} \langle \partial_k n | \partial_l n \rangle$

ki v sebi skriva geometrijske lastnosti n -tega pasu. Čeprav je Berryjeva ukrivljenost umeritveno invariantna količina, ki je zvezno definirana čez vso Brilluinovo cono, sama faza Blochovih stanj ne more biti vedno izbrana tako, da je zvezna. Ali je to mogoče narediti ali ne, je odvisno od vrednosti topološke invariante pasu, Chernovega števila, definiranega kot integral čez 2D 1. Brilluinovo cono⁴:

$$C = \frac{1}{2\pi} \oint_{BC} \mathbf{F}(\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (13)$$

Če lahko definiramo fazo Blochovih stanj, in zato Berryjevo povezavo, zvezno preko vse Brilluinove cone, je direktna posledica definicije Berryjeve ukrivljenosti (12) in Stokesovega izreka, da je Chernovo število nujno nič. Nasprotno, iz neničelnega Chernovega števila sledi, da Blochovo stanje in zato Berryjeva povezava $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})$ ne moreta biti zvezno definirana.

Chernovo število zavzame vedno le celoštevilске vrednosti. Za dokaz, razdelimo integracijsko domeno enačbe (13) v dve regiji S in S' . Znotraj S izberemo zvezno umeritev za Blochovo stanje, kar da Berryjevo povezavo $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})$. Podobno znotraj S' izberemo zvezno umeritev, kar da tokrat Berryjevo povezavo $\mathbf{A}'_n(\mathbf{k})$. Z upoštevanjem, da se 1. Brilluinova cona lahko predstavi kot torus (periodični robni pogoji), lahko uporabimo Stokesov izrek znotraj S in S' ter napišemo Chernovo število kot potni integral vzdolž skupne meje $\partial S = -\partial S'$,

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2\pi} \int_S F(\mathbf{k}) d\mathbf{A} + \frac{1}{2\pi} \int_{S'} F(\mathbf{k}) d\mathbf{A} \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial S} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}_n(\mathbf{k}) - \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial S} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}'_n(\mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{2\pi} (\gamma - \gamma'), \end{aligned}$$

kjer sta γ in γ' Berryjevi fazi vzdolž ∂S . Ker sta Berryjevi fazi izračunani vzdolž iste poti, morata biti kongruentni modulo 2π . Sledi, da je Chernovo število C_n celoštevilsko.

Če ponovimo: Berry povezava (connection)⁵ meri lokalno spremembo faze valovne funkcije v momentnem prostoru. Podobno kot vektorski potencial in Aharonov-Bohmova faza sta tudi Berryjeva povezava in faza umeritveno odvisni. Faza in pretok sta povezani preko Stokesovega izreka. Integracija Berryjeve ukrivljenosti preko torusa da topološko invarianto Chernovo število, ki da število monopolo.⁶

Vsota Chernovih števil čez vse pasove je nič [9].

Tabela 1 našteje definicije Berryjeve ukrivljenosti in toka v primerjavi s magnetnim poljem in pretokov v realnem prostoru.

⁴enolično določena primitivna celica recipročnega prostora, ki se zaradi periodičnih robnih pogojev predstavi s torusom

⁵primer povezave bi bila tudi Levi-Civita povezava, ki pove npr. kdaj tangentni vektor v eni točki npr. na sferi *paralelno transportiramo* v drugo.

⁶Monopole si lahko predstavljamo na naslednji način. Če bi imeli vsi delci celoštevilski večkratnik osnovnega naboja e_0 , tuljavice iz Aharon-Bohmovega pojava z magnetnim pretokom $2\pi/e$ ne bi ustvarile dodatne faze, saj bi bil fazni faktor za vsak nabit delec $e^{2\pi i} = 1$. Taka tuljavica bi bila nerazločljiva od monopola. Drugič: točkast magneti naboj ima magnetno polje q_m/r^2 . Ker je $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ povsod, razen v izhodišču $r = 0$, lokalno lahko vedno definiramo vektorski potencial tako, da je $\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{B}$. Vendar \mathbf{A} ne moremo definirati globalno, saj je divergenca magnetnega polja sorazmerna Diracovi delta funkciji v izhodišču. Definiramo vektorski potencial na severni in južni hemisferi, na ekvatorju se definiciji ujemata, vendar razlikujeta za umeritveno transformacijo. Faza električnega naboja q_e , ki obkroži ekvator je sorazmerna $q_e q_m$. Če maksimalno razširimo definicijo \mathbf{A} iz južne hemisfere, je \mathbf{A} definirana povsod razen na poltraku, Diracovi struni, iz izhodišča skozi severni pol. Njen efekt je na valovno funkcijo je analogen učinku tuljave v Aharon-Bohmovemu pojavu. Diracova struna povezuje monopole in antimonopole nasprotnih magnetnih nabojev. Vektorski potencial ne more biti definiran na Diracovi stuni. Iz zahteve, da pozicija Diracove strune ni opazljiva, sledi Diracovo kvantizacijsko pravilo: produkt $q_e q_m = 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$.

Vektorski potencial Aharon-Bohmova faza	$\mathbf{A}(\mathbf{r})$ $\oint \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}$	$\mathbf{A}(\mathbf{k}) = \langle u(\mathbf{k}) i\nabla_{\mathbf{k}} u(\mathbf{k}) \rangle$ $\oint \mathbf{A}(\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{l}$	Berryjeva povezava (connection) Berryjeva faza
Magnetno polje Magnetni pretok	$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ $\iint \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$	$F(\mathbf{k}) = \nabla_{\mathbf{k}} \times \mathbf{A}(\mathbf{k})$ $\iint F(\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{S}$	Berryjeva ukrivljenost Berryjev pretok
Magnetni monopoli	$\# = \frac{e}{h} \iint \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$	$C = \frac{1}{2\pi} \iint \mathbf{F}(\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{S}$	Chernovo število

Tabela 1. Tabela definicij fizikalnih količin in njihovih analogij v recipročnem prostoru [10].

2.2.1 Spinor v magnetnem polju

V tem podpoglavju je predstavljen primer izračuna Chernovega števila:

Hamiltonijan za spin-1/2 v magnetnem polju, ki se zapiše kot

$$H = \mu\sigma \cdot \mathbf{B}, \quad (14)$$

kjer σ označuje Paulijeve matrike, μ magnetni moment in \mathbf{B} magnetno polje. V treh dimenzijah lastna stanja pri energijah $\pm\mu B$ za lastnimi vektorji

$$|u_{-}\rangle = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\phi} \\ -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad |u_{+}\rangle = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\phi} \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Oglejmo si stanje $|u_{-}\rangle$. Berryjeva povezava je izračuna kot $\mathbf{A}_{\theta} = \langle u | i\partial_{\theta} u \rangle = 0$, $\mathbf{A}_{\phi} = \langle u | i\partial_{\phi} u \rangle = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Berryjeva ukrivljenost je $F_{\phi\theta} = \partial_{\theta}\mathbf{A}_{\phi} - \partial_{\phi}\mathbf{A}_{\theta} = \frac{1}{2}\sin(\theta)$. Če bi uporabili drugačno umeritev s množenje $|u_{-}\rangle$ z $e^{i\phi}$, bi bila Berryjeva povezava $\mathbf{A}_{\theta} = 0$ in $\mathbf{A}_{\phi} = -\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$, medtem ko bi Berryjeva ukrivljenost ostala enaka. To je skladno z zaključkom, da je Berryjeva povezava umeritveno odvisna, Berryjeva ukrivljenost pa ne. Berryjeva ukrivljenost na prostorski kot je $\bar{F}_{\theta\phi} = F_{\theta\phi}/\sin(\theta) = \frac{1}{2}$. Berryjeva faza, ki ustreza katerikoli poti na enotski sferi \mathcal{S}^2 v magnetnopojskem prostoru, je polovica prostorskega kota, ki ga opiše pot. Integral Berryjeve ukrivljenosti čez celotno sfero je zato točno 2π . Sledi, da je Chernovo število $C = 1$.

2.2.2 Berryjeva ukrivljenost iz perturbacijske teorije

Ugotovili smo, da se Berryjeva ukrivljenost lahko zapiše kot

$$F_j = -Im\epsilon_{jkl} \langle \partial_k n | \partial_l n \rangle \quad (16)$$

$$\mathbf{F}^{(n)} = -Im \sum_{n' \neq n} \langle \nabla n | n' \rangle \times \langle n' | \nabla n \rangle. \quad (17)$$

$\langle n' | \nabla n \rangle$ se izračuna iz

$$H(\mathbf{R}) |n\rangle = E_n |n\rangle \quad (18)$$

$$(\nabla H) |n\rangle + H |\nabla n\rangle = (\nabla E_n) |n\rangle + E_n |\nabla n\rangle \quad (19)$$

$$\langle n' | \nabla H |n\rangle + \langle n' | H |\nabla n\rangle = E_n \langle n' | \nabla n \rangle \quad (20)$$

$$\langle n' | \nabla n \rangle = \frac{\langle n' | \nabla H |n\rangle}{E_n - E_{n'}}. \quad (21)$$

Z uporabo (17) dobimo

$$\mathbf{F}^{(n)} = -Im \sum_{n' \neq n} \frac{\langle n | \nabla H |n'\rangle \times \langle n' | \nabla H |n\rangle}{(E_n - E_{n'})^2}, \quad (22)$$

kar je manifestno umeritveno invariantno.

Če seštejemo po vseh stanjih

$$\sum_n \mathbf{F}^{(n)} = -Im \sum_n \sum_{n' \neq n} \frac{\langle n | \nabla H | n' \rangle \times \langle n' | \nabla H | n \rangle}{(E_n - E_{n'})^2} \quad (23)$$

$$= -Im \sum_n \sum_{n' \leq n} \frac{\langle n | \nabla H | n' \rangle \times \langle n' | \nabla H | n \rangle + \langle n' | \nabla H | n \rangle \times \langle n | \nabla H | n' \rangle}{(E_n - E_{n'})^2} \quad (24)$$

$$= 0, \quad (25)$$

kar da

$$\sum_n \gamma_n(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{S}} \sum_n \mathbf{F}^{(n)}(\mathbf{R}) d\mathcal{S} = 0, \quad (26)$$

kjer je \mathcal{S} vsaka ploskev z robom \mathcal{C} . Enačba (26) v recipročnem prostoru pomeni, da je vsota Chernovih števil čez vse pasove enaka 0.

2.3 Topološki fazni prehod

V tem podpoglavju je opisano, kako preko stika dveh topološko različnih materialov dobimo enosmerno svetlobo.

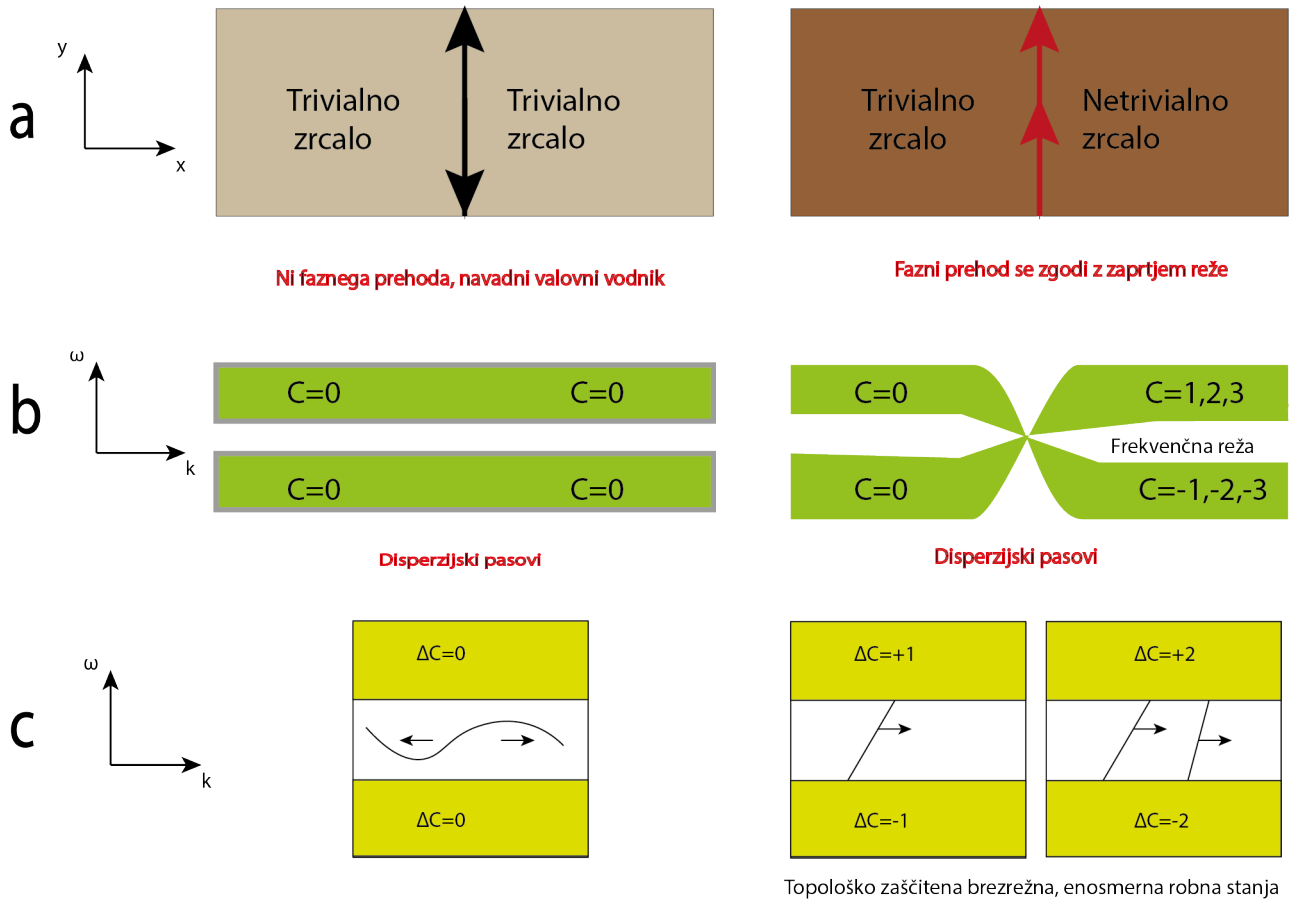
Materiali, ki imajo enako topološko invarianto so topološko ekvivalentni⁷ tj. so v isti topološki fazi, imajo enako število lukenj. Topološki fazni prehod se torej zgodi, ko se ustvarijo ali odstranijo luknje. Topologije materialov v fotoniki so definirane s disperzijskimi pasovi v recipročnem prostoru. Topološka invarianta 2D disperzijskih pasov⁸ je Chernovo število, merilo za kolektivno obnašanje valovnih funkcij v pasu. Potem, ko je fizikalna količina zapisana s topološko invarianto, se lahko ob zveznih perturbacijah spreminja le diskretno.

Optična ogledala odbijajo določeno svetlobo zaradi pomanjkanja prostih stanj v zrcalu. Podobno je s energijskimi režami v izolatorju, ki ne prevajajo frekvenc, ki jih pokrije reža. Splošno pravilo: vsota Chernovih števil disperzijskih pasov pod frekvenco reže (celotno število zavojev in odvojev (twists and untwists) sistema) določa topologijo. Prav tako je vsota Chernovih števil čez vse pasove enaka nič: $\sum_n C_n = 0$. Običajna zrcala kot so zrak (totalni odboj), prevodna kovina in Braggovi reflektorji (dielektrična zrcala z naporjenimi dielektričnimi sloji različni debelin, ki delujejo kot specifična odbojnost za različne valovne dolžine) imajo ničelno Chernovo število, kar jih naredi topološko trivialne. Zanimivo postane na robu topološko različnih zrcal. Če imata oba materiala frekvenčna pasova ničelno invarianto, se lahko direktno povežeta preko stika, brez da bi zaprla frekvenčno režo (band gap). V kolikor pa sta topološko ekvivalentna, topologija ne dovoli, da bi se zrcala povezala direktno, povezava je možna le preko zaprtja frekvenčne reže, nevtralizacije Chernovega števila in ponovnega odprtja reže 1 **a**. To je topološki fazni prehod, ki zagotavlja brezrežne robne načine (gapless frequency interfacial states). Rečemo, da je obstoj le-teh zaščiten s topologijami pasov. V splošnem je število brezrežnih robnih načinov enako razliki topoloških invariant preko stika - *bulk-edge correspondence*, ki je bil razvit na podlagi indeksnega izreka (index theorem).

Topološko zaščito robnih valovnih vodnikov je možno razumeti tudi v recipročnem prostoru. V razdelku **c** na 1 vidimo levo običajno disperzijo nepovezано s prostorninskimi (bulk) pasovi in je lahko zvezno prenesena iz frekvenčne reže v prostorninske pasove. Na desni pa brezrežna disperzija

⁷Topološko ekvivalentna telesa so tista, ki jih lahko z gnetenjem preoblikujemo druga v drugo, ne pa tudi z rezanjem ali lepljenjem.

⁸Podobno kot se v kovini enodelčne elektronske valovne funkcije na posameznih ionih zaradi majhne medmrežne razdalje začnejo prekrivati in tvorijo pasove z dovoljenimi **k** zaradi periodičnosti.



Slika 1. Topološki fazni prehodi. **a** dva valovna vodnika iz zrcal z različnimi/enakimi topologijami, **b** frekvenčni pasovi različnih topologij ne morejo preiti drug v drugega brez zaprtja frekvenčne reže, **c** robna stanja se povezujejo različno s prostorninskimi (bulk) pasovi odvisno od topologije pasov. ΔC je sprememba Chernovega števila med *bulk* pasovi desno in levo od valovnega vodnika. Velikost ΔC meri število brezrežnih (gapless) robnih načinov, predznak pa smer propagacije.

povezuje frekvenčna pasova nad in pod režo. Ne more biti prenesena iz reže s spreminjanjem robnih zaključitev (edge terminations).

Enosmerna propagacija zaščitene valovnih načinov je vidna iz strmine (grupne hitrosti) disperzij. Običajni valovni način vsebuje obojesmerne načine, saj se siplje na nečistočah. Nasprotno pa so topološko zaščiteni načini enosmerni, kar omogoča potovanje svetlobe okoli nečistoč s skoraj popolno transmisivnostjo.

2.4 Časovna simetrija

Simetrije so ključne pri ugotavljanju topoloških faz sistemov. Na primer, kvantni Hallov pojav zahteva kršitev časovne simetrije (time-reversal (TR)), po drugi strani pa je TR zaščitena pri 2D topoloških izolatorjih ali kvantnemu spinskemu Hallovemu efektu in dovoljuje hkratni obstoj nasprotno propagirajočih se spin-polariziranih⁹ robnih stanj. Ti sistemi imajo robustna robna stanja, ki so topološko zaščitena le ob prisotnosti ustreznih simetrij.

Transformacija časovnega obrata $T : t \rightarrow -t$ je osnovna lastnost fizikalnih sistemov. Ti se obnašajo različno odvisno od tega, ali so ali niso invariantni na obrat časa. Znani primer neinvariantnosti je gibanje delca v magnetnem polju: ob obratu časa delec ne bo šel nazaj po isti poti. V tem podglavju bo predstavljena časovna simetrija spinskih in brezspinskih delcev. V prisotnosti TR velja $[H, T] = 0$, kar pomeni, da sta $|\Psi\rangle$ in $T|\Psi\rangle$ hkrati lastna stanja. V veliko primerih je $|\Psi\rangle = T|\Psi\rangle$, ampak zanimive stvari se zgodijo, ko sta stanja različni – to pa je ravno razlika med celo- in polcelošteviliškimi spinskimi delci.

Primeri delcev s celim in polcelim spinom sta foton in elektron. Foton je nevtralen, neohranjajoč se, neinteragirajoč spin-1 boson, podrejen Maxwellovim enačbam, medtem ko je elektron nabit, ohranjajoč se, interagirajoč spin-1/2 fermion, ki zadošča Schrödigerjevi enačbi. Podobno kot slednja se dajo tudi Maxwellove enačbe v primeru, da ni absorpcije v mediju, prepisati v posplošen lastni problem:

$$i \begin{bmatrix} 0 & \nabla \times \\ -\nabla \times & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} \epsilon & \chi \\ \chi^\dagger & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}, \quad (27)$$

kjer je $\epsilon^\dagger = \epsilon$ in $\mu^\dagger = \mu$ in je χ bianizotropija¹¹, ki je natančneje razložena v podglavju 3.2

Antiunitarni¹² časovni operator T je podan:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} K. \quad (28)$$

Če je poleg $\epsilon^\dagger = \epsilon$, $\mu^\dagger = \mu$ in $\chi = -\chi^*$, je sistem T -invarianten, ker pomeni, da velja:

$$T \begin{bmatrix} \epsilon & \chi \\ \chi^\dagger & \mu \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} \epsilon & \chi \\ \chi^\dagger & \mu \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Rotacija spina za 2π je enako kot delovanje z T^2 . Fotoni imajo $T^2 = +1$ in elektroni pa $T^2 = -1$. Prav ta minus je po Kramerjevem izreku¹³ odgovoren za dvojno degeneracijo elektronskih stanj v Brillouinovi coni in ponuja možnost za brezrežno povezavo robnih disperzij v notranjosti reže.

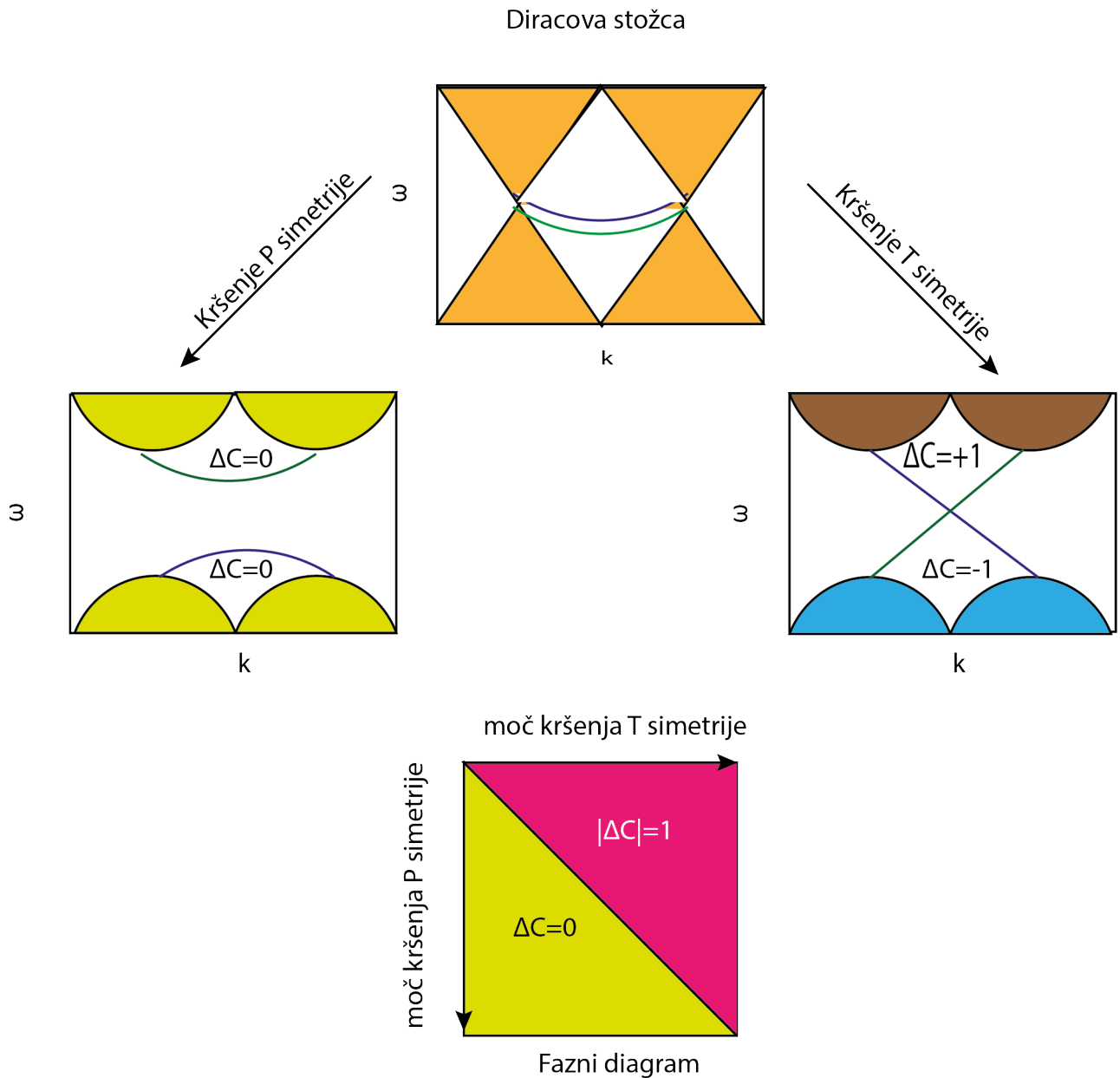
Ker je razlika med $T^2 = +1$ za fotone in $T^2 = -1$ za elektrone fundamentalnega pomena pri razlikovanju pojavov pri topoloških izolatorjih iz fizike trdne snovi in topološko svetlobo, je v dodatku navedena izpeljava identitet.

⁹Spinska polarizacija je lastnost, kako dobro je spin poravnan s smerjo v prostoru. Magnetni moment pri elektroni v feroelektrikih povzroči spin-polarizabilne tokove, magnetizacijo. Krožna polarizacija elektromagnetnih polj je posledica spinske polarizacije konstitutivnih fotonov.

¹¹Bianizotropija pomeni, da je spreminjanje \mathbf{E} odvisno ne samo od \mathbf{D} , temveč tudi od \mathbf{B} .

¹²Za antiunitarni operator velja $\langle Ux, Uy \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$, kjer sta x in y vektorja iz Hilbertovega prostora, horizontalna črta kompleksna konjugacija, U pa konjugirano-linearna bijekcija.

¹³Kramerjev izrek pravi, da za vsako lastno energijo TR simetričnega sistema z polcelim spinom obstaja še eno lastno stanje z isto energijo.



Slika 2. Topološki fazni diagram 2D kvantne Hallove faze. Slika zgoraj prikazuje pasovni diagram, v katerem pasova tvorita Diracova stožca zaščiten s parnost-čas (PT) simetrijo. Zelene in modre črte predstavljajo robne disperzije. Ko je kršena ali P ali T simetrija, pasovna reža nastane v prostornini (bulk), a ne nujno na robovih. V odsotnosti T simetrije se pasova razcepita in pridobita Chernovi števili ± 1 , na robovih pa je en brezrežen robni način za vsako od zgornjih in spodnjih stikov (interfaces).

2.5 Diracovi stožci in kvantna Hallova topološka faza

V tem podpoglavju predstavimo vpliv simetrij P in T na stik mej topološko različnih materialov, na robna stanja.

Učinkovit pristop k iskanju netrivialnih zrcal (frekvenčnih rež z neničelnim Chernovim številom) je, da s spreminjanjem sistemskih parametrov (simetrijami) identificiramo meje na topoloških faznih diagramih, kjer je frekvenčni spekter brez rež (1 c desno). V 2D periodičnih sistemih se točkovnim degeneracijam v pasovni strukturi reče Diracovi stožci, ki imajo linearno disperzijo med pasovi. V 3D pa imamo črtne degeneracije (line nodes) in Weylove točke.

Diracovi stožci so zaščiteni s PT simetrijo (parity-time) in se ustvarijo ter uničijo le v parih (Kramerjev izrek). Vsak ima kvantizirano Berryjevo fazo π okoli svoje osi. Efektivni Hamiltonian blizu Diracove točke v x-y ravnini je mogoče zapisati kot $H(\mathbf{k}) = v_x k_x \sigma_x + v_y k_y \sigma_z$, kjer so v_i grupne hitrosti (vsebujejo sklopitvene amplitude t do najbližjih sosedov $\frac{3}{2}t\hbar = v_i$), σ_i pa Paulijeve matrike. Po diagonalizaciji dobimo lastne vrednosti linearno odvisne od \mathbf{k} : $w(\mathbf{k}) = \pm \sqrt{(v_x^2 k_x^2 + v_y^2 k_y^2)}$. Čeprav P in T preslikata Hamiltonian iz \mathbf{k} v $-\mathbf{k}$, se razlikujeta za kompleksno konjugacijo

$$(PT)H(\mathbf{k})(PT)^{-1} = H(\mathbf{k})^*. \quad (30)$$

PT simetrija torej zahteva, da je Hamiltonian realen in zato ne sme vsebovati σ_y , ki je imaginarna. 2D Diracova degeneracija je lahko dvignjena s poljubno perturbacijo sorazmerno s σ_y ali splošneje s kršenjem PT simetrije. Kršiti bodisi P ali T odpre režo med pasovoma.

Vendar reže, odprte s kršenjem ali P ali T simetrije posebej, nista topološko ekvivalentni, saj imata različni Chernovi števili. Chernova invarianta predstavlja integracijo Berryjeve ukrivljenosti preko zaključene ploskve v k-prostoru. Ker je $F(\mathbf{k})$ pseudovektor, tj. lih glede na T in sod glede na P, je v prisotnosti P in T $F(\mathbf{k}) = 0$. Če je kršena bodisi P ali T, se Diracovi stožci odprejo in vsako izničenje degeneracije prispeva k Berryjevemu toku velikost π za vsak pas. V prisotnosti T (P kršena) je $F(\mathbf{k}) = -F(-\mathbf{k})$. Berryjeva pretoka v Diracovih točkah pri \mathbf{k} in $-\mathbf{k}$ sta nasprotna. Integracija po celi Brillouinovi coni da $C=0$. Nasprotno pa je v prisotnosti P (T kršena) $F(\mathbf{k}) = F(-\mathbf{k})$. Tu se Berryjev pretok sešteje v 2π , kar da $C=1$. Več parov Diracovih stožcev vodi do višjih Chernovih števil. T-kršeno 2D kvantno Hallovo topološko fazo prikazuje fazni diagram v rožnatem 2 [10].

3. Uporaba

Sedaj so opisani trije primeri, kako dejansko ustvarimo topološko netrivialne sisteme posnemajoč elektronske kvantne Hallove pojave: pri giromagnetnih fotonških kristalih svetloba lahko potuje le v eni smeri, v bianizotropičnih materialih s pomočjo nove sklopitve med \mathbf{E} in \mathbf{H} , bianizotropije χ , razklopimo degenerirani polarizaciji svetlobe (pseudospina), pri sklopljenih resonatorjih pa simuliramo magnetno polje v 2D *fotonskem "plinu"*. Na koncu so omenjeni še kvazikristali kot način, kako realizirati višjedimenzionalne topološke faze z nižjedimenzionalnimi.

3.1 Giromagnetni fotonški kristali

Prvi fotonški analog kvantnemu Hallovemu pojavu se je zgodil z mikrovalovi. 2D fotonški kristal je bil narejen iz pokončnih feritnih palic med dvema kovinskima ploščama, kar je posnemalo 2D transverzalno magnetni TM način [11]. Dodali so tudi kovinski zid na robovih proti izgubam valovanja v zrak. Brez zunanjega magnetnega polja sta 2. in 3. TM pasova povezana s kvadratično točkasto degeneracijo, ki je zaščiten s simetrijo kristala [11]. Ob prisotnosti enakomernega statičnega magnetnega polja (0.2 T), ki zlomi T, se v magnetnem permeabilnostnem tenzorju μ pojavijo antisimetrični imaginarni izvendiagonalni členi. Kvadratična degeneracija se zlomi in nastane reža

med 2. in 3. pasom, ki imata oba neničelno Chernovo število. Brezrežno robno stanje ima le pozitivne grupne hitrosti pri okoli 4,5 GHz. Numerična simulacija potrди, da lahko antena v valovnem vodniku oddaja le v smeri naprej v frekvenem območju prostornine. Sipanje nazaj je več kot 5 velikostnih redov šibkejše kot sipanje naprej pri širjenju le preko osmih mrežnih razdalj. Še več, opažena ni bila rast odbojne amplitude, četudi so vstavili velike kovinske sipalce. Zares, novi enosmerni robni načini se avtomatično ustvarijo vsakokrat, ko se reža odpre, kar omogoča svetlobi, da obide sipalca. To je topološka zaščita, ki jo dajeta netrivialni prostornini fotonov (C ≠ 0) [12].

3.2 Bianizotropija

Analog kvantnemu spinskemu Hallovemu pojavu se lahko realizira tudi v optičnih metamaterialih, ki vsebujejo dielektrične strukture manjše od valovne dolžine.

V bianizotropičnih materialih ($\chi \neq 0$) sklopitev med električnim in magnetnim poljem ponuja več parametrov, s katerimi ustvarimo topološke faze. Še več, bianizotropični fotonov kristali lahko dosežejo topološko netrivialne faze tudi brez zloma T (brez magnetne ali časovne modulacije).

Bianizotropija je za fotone podobno kot sklopitev spin-tir za elektrone. Kako narediti, da fotonov načini posnemajo elektronska spin-1/2 lastna stanja? Iz $\epsilon = \mu$ in $\chi = 0$ sledi polarizacijska ('spin') degeneracija – transverzalno električni (TE) in TM način sta degenerirana v frekvenci - ohranjena dualnost $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \rightarrow (-\mathbf{H}, \mathbf{E})$. Za dan \mathbf{k} imamo linearne kombinacije $\Psi_{\mathbf{k}}^{\pm}$ degeneriranih TM in TE načinov s posebno lastnostjo, da se $\Psi_{\mathbf{k}}^{+}$ lahko transformira v $\Psi_{-\mathbf{k}}^{-}$ s podobno simetrijsko operacijo \hat{D} ($\hat{D}^2 = -1$) kot elektronski spin spremeni predznak pri TR simetriji.

V prvem redu lahko učinek χ pogledamo v recipročnem prostoru kot sklopitev gibalne količine in polarizacije fotona: iz prve matrične enačbe sledita drugi dve:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon & -i\chi \\ -i\chi^T & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} + ic/\omega\chi\mu^{-1}\mathbf{k} \times \mathbf{E} \quad (32)$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + ic/\omega\chi^T\epsilon^{-1}\mathbf{k} \times \mathbf{H}. \quad (33)$$

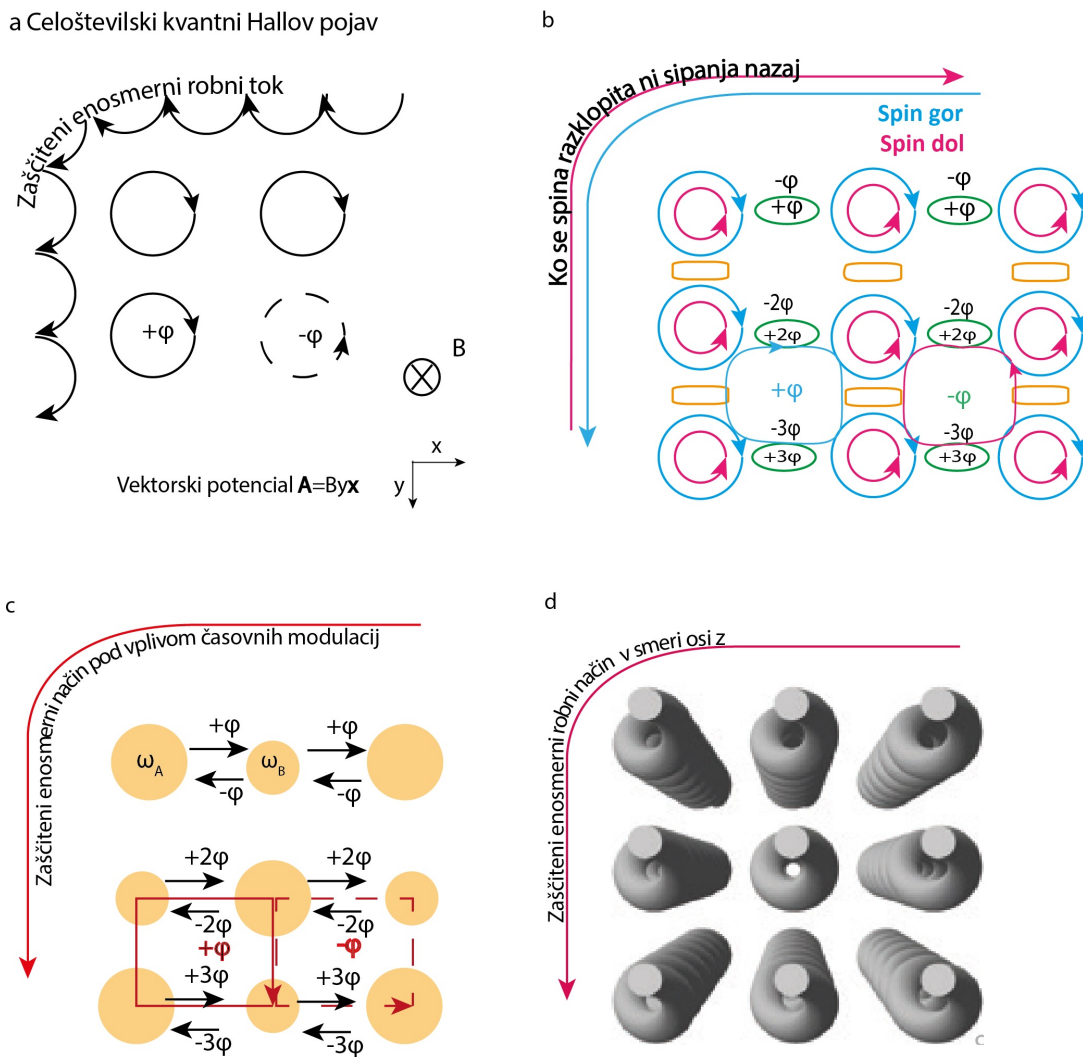
Bianizotropija χ vpliva kot magnetno polje na vsako polarizacijo z nasprotnim predznakom brez kršenja T – kršenje T ali ne je pomembna razlika med elektronskimi in fotonovskimi sistemi. Sistem se razcepi v neodvisna spinska podprostor, kjer obstajata kvantni anomalni Hallovi fazi (QAH) z nasprotnima Chernovima številoma. Podobno kot v nadaljevanju omenjene T-invariantne resonatorske mreže v **b 3** tudi bianizotropični metamateriali zahtevajo stroge pogoje, da ostaneta kopiji spinov nesklapljeni. Zahteve so predvsem po natančnih konstitutivnih parametrih med izdelavo metamaterialov. Končno so bila brezrežna robna stanja predlagana tudi v notranjosti hiperboličnih metamaterialov ¹⁴, ki imajo bianizotropične odzive [9].

Medtem ko bianizotropijo v naravi najdemo v redkih optično aktivnih medijih s kirialnimi molekulami, se večino metamaterialov izdelava na principu podkvastih resonatorjev (split-ring).

3.3 Sklopljeni resonatorji (coupled resonators)

Fotoni v mreži sklopljenih resonatorjev se obnašajo podobno kot elektroni v kovini. Določene sklopitve resonatorjev lahko naredijo topološke frekvenčne reže. Odkritih je bilo več fotonovskih analogij

¹⁴Hiperbolični metamateriali imajo v različnih smereh različno (pozitivno in negativno(kovina)) dielektrično funkcijo. Ime so dobili po hiperbolični optični indikatrisi. Običajno imamo eliptično, kar pomeni, da sta dielektrični konstanti v lastnih smereh obe pozitivni.



Slika 3. Kvantna Hallova faza za elektrone v magnetnem polju in fotone v sklopljenih resonatorjih z efektivni magnetnim poljem. a ciklotrono gibanje elektronov v statičnem magnetnem polju, b 2D mreža fotonskih resonatorjev sklopljenih s statičnimi valvnimi vodniki. Horizontalna sklopitvena faza narašča linearno s y . Dva spina sta degenerirana v efektivnem magnetnem polju zaradi T simetrije. c 2D mreža fotonskih resonatorjev z dvema vrstama enonačinskih votlin (single-mode cavities). Najbližji sosedi so sklopljeni preko časovne modulacije, z horizontalnimi fazami naraščajočimi linearno v y – to krši T. d Mreža spiralnih (helical) fotonskih valvnih vodnikov, kršitev z simetrije učinkuje kot harmonična modulacija fotonov.

celoštevilskega kvantnega Hallova efekta (integer QHE) s statičnimi in časovno harmoničnimi sklopitvami, ki simulirajo enakomerno magnetno polje. V elektronskih sistemi je bil prvi QHE opažen v 2D elektronskem plinu s pravokotnim magnetnim poljem. Pri a na sliki 3 elektroni ciklotronsko lokalno krožijo, medtem ko imajo enosmerni robni elektroni razširjeno valvno funkcijo. Ponovno je število brezrežnih robnih načinov enako Chernovemu številu. Vektorski potencial je $\mathbf{A} = By\hat{x}$. Elektroni dobijo Aharon-Bohmovo fazo $\pm\phi = \oint \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}$, zato imajo različno energijo glede na smer kroženja. Spinska degeneracija elektronov je dvignjena s Zeemanovim razcepom.

Čeprav fotoni ne interagirajo z magnetnim poljem, pridobijo fazo ob obhodu. Razlika z elektroni (pravo kvantno Hallovo topološko fazo) je, da pri fotonih *ne* kršimo T simetrije. Sipanja nazaj so dovoljena, ker časovno nasprotni načini v valvnih vodniki nastopajo vedno pri enaki frekvenci. Slika b na 3 prikazuje resonatorje, prostorsko sklopljene z valvnimi vodniki med njimi. Vsak resonator ima dva načina (moder in rdeč), ki sta drug drugemu časovno obrnjena para, podobna dvema spinskima prostostnima stopnjama pri elektronic. Dolžine sklopitvenih valvnih vodnikov

so nastavljene tako, da sklopitvene faze med resonatorji simulirajo AB (Aharon-Bohmovo) fazo iz 3 a. Vertikalne sklopitve nimajo prispevka k fazi, medtem ko so horizontalne linearne v y . Kot je prej spin elektrona doživel fazo glede na predznak, tudi tu foton prejme fazo glede na svojo sučnost (kirialnost) – polna rdeča črta b. Zato ima frekvenčni spekter Landauove nivoje¹⁵ in fraktalne vzorce (Hofstadterjev metulj¹⁶ [13]), ki sta značilni za celoštevilski QHE.

S T-simetrijo postaneta 'spinska prostora' degenerirana v frekvenci in se sklopita. Vendar samo, ko sta spina odklopljena, lahko definiramo Chernovi števili, ki sta nasprotni v predznaku. Spinsko polarizirani nasprotno propagirajoči se robni načini so analogni robnim tokovom pri kvantnem spinskem Hallovem pojavu za elektrone.

Doseči natančno in koherentno časovno-harmonsko modulacijo za veliko število resonatorjev postane eksperimentalno vedno težje, ko gremo proti optičnim frekvencam. Možna rešitev je prehod iz časovne v prostorsko modulacijo. Slika c 3 prikazuje kršenje T s prostorsko-časovno modulacijo. Na njej imamo dve vrsti resonatorjev s samo enim načinom (single-mode). Ob dominantni sklopitvi le z najbližjimi sosedi se resonatorja z različnimi frekvencami sklopita le preko časovno-harmonске modulacije. Ponovno je vertikalna sklopitvena faza nič, horizontalna pa sorazmerna z y . Fotoni, ki se gibajo v nasprotnih smereh, imajo nasprotno faze, torej, različne frekvence. Floquetov izrek¹⁷ v časovni domeni, podobno kot Blochov v prostorski, se uporabi za reševanje mrežnega sistema s časovno-periodično modulacijo.

Na sliki d 3 so raziskovalci razširili votline v z smeri in dobili periodično mrežo sklopljenih valovnih vodnikov. Smer z igra vlogo časa. Obosna aproksimacija Maxwellovih enačb, ki napovedujejo širjenje v z smeri, spominja na Schrödigerjevo, ki se razvija v času. Spiralna struktura zlomi Z simetrijo, podobno kot časovna modulacija zlomi T. Posledično se odprejo zaščitene degeneracije v pasovni strukturi, kar naredi mrežo topološko netrivialno [10].

Ideja je torej ustvarjanje učinkovitega magnetnega polja za nevtralne delce s pomočjo umetnih umeritvenih polj. Čeprav aproksimaciji "najbližji sosed v prostoru" in "rotirajoč val v času", ki sta bili uporabljeni v tem podpoglavju, popravki višjih redov ne spremenijo topološke invariante in pojava.

3.4 Kvazikristali

Kvazi kristali so *urejene* neperiodične strukture, ki prav tako imajo frekvenčne reže in robna stanja. Narejeni so s projekcijo periodičnega kristala višjih dimenzij. Kraus [14] je leta 2012 projiciral 2D kvantno Hallovo fazo na 1D kvazikristal s prilagodljivim parametrom, ki je ekvivalenten Blochovemu valovnemu vektorju, izgubljenim med projekcijo. Ko ta periodični parameter teče, reproduciramo poln brezrežni frekvenčni spekter kot pri 2D kvantni Hallovi fazi; tj. 0D robni način 1D kvazikristala, ki zvezno potuje skozi režo. Narejene so bile tudi mreže 1D optičnih valovnih vodnikov, ki se prostorsko spreminjajo vzdolž z osi glede na zvezni parameter. Tu z os igra vlogo časa. V eksperimentu se je robno stanje od enega roba mreže valovnih vodnikov premaknilo na drugi rob, medtem ko se je vmes spojilo s načini v prostornini kristala. Tako je svetloba adiabatsno prepotovala iz enega roba na drug rob. Predlagana je bila tudi potencialna realizacija kvantne Hallove faze v 4D z uporabo 2D kvazikristala [15].

¹⁵Landauovi nivoji se kvantizirane ciklotronske orbite nabitih delcev v magnetnem polju. Število elektronov na nivo je sorazmerno z močjo magnetnega polja.

¹⁶Barvni diagram, ki opisuje spektralne lastnosti 2D elektronov v magnetnem polju. Barve ponazarjajo Chernovo število rež v spektru.

¹⁷Floquetova teorija se ukvarja s rešitvami periodičnih linearnih diferencialnih enačb oblike $x = \dot{A}(t)x$, kjer je $A(t)$ periodična zvezna funkcija s periodo T . Floquetov izrek podaja koordinatno transformacijo $y = Q^{-1}(t)x$ z $Q(t + 2T) = Q(t)$, ki transformira periodični sistem v tradicionalni linearni sistem s konstantnimi koeficienti.

4. Zaključek

Področje topološke fotonike se danes široko razvija. Netrivialni topološki pojavi so bili predlagani in udeleženi pri različnih valovnih dolžinah in v treh razsežnostih. V prihodnje lahko pričakujemo odkritja novih topoloških ogledal, faz in invariant, klasificiranih glede na različne simetrije. Raziskave tečejo v smeri interakcije med fotoni (kvantna prepletenost) kot tudi prehodu k drugim bozonom. Enosmerni prenos svetlobe lahko zmanjša zahteve po moči pri klasičnih signalih. Robna stanja časovno-invariantne topološke faze nimajo odboja, zato v fotonih vezjih izolatorji ne bi bili potrebni. Veliko truda se tudi vlaga v uresničitev topološko zaščitene enosmerne valovne vodnikov pri optičnih frekvencah.

A Brezspinski delci $T^2 = 1$

Tu bomo izpeljali $T^2 = 1$ identiteto za brezspinske delce.

Jasno je, da TR komutira s prostorsko simetrijo, saj operator kraja x ostane nespremenjen, vendar enako ne velja za gibalno količino:

$$T\hat{x}T^{-1} = \hat{x}, \quad T\hat{p}T^{-1} = -\hat{p}. \quad (34)$$

Radi bi našli reprezentacijo TR operatorja. Poglejmo si njegovo delovanje na komutatorju x in p ,

$$T[\hat{x}, \hat{p}]T^{-1} = T i\hbar T^{-1} = -[\hat{x}, \hat{p}] = -i\hbar, \quad (35)$$

kar nas vodi do

$$TiT^{-1} = -i. \quad (36)$$

To pomeni, da mora biti TR operator sorazmeren operatorju za kompleksno konjugacijo. Takšni operatorji so *antiunitarni* in za razliko od ostalih nimajo lastnih vrednosti. V splošnem je

$$T = UK, \quad (37)$$

kjer je U unitarna in K kompleksna konjugacija. Potem

$$T^2 = UKUK = UU^* = U(U^T)^{-1} = \phi. \quad (38)$$

Tukaj je ϕ diagonalna matrika faz – TR operator uporabljen dvakrat nas mora pripeljati nazaj v originalno stanje do faze natančno. Z znanjem, da je transponirana diagonalna matrika diagonalna, ugotovimo

$$U = \phi U^T, \quad U^T = U\phi \quad (39)$$

in zato

$$U = \phi U^T = \phi U\phi. \quad (40)$$

To se zgodi samo, ko je $\phi = \pm 1$ in zato $T^2 = \pm 1$. To je specifično dejstvo, da je T antiunitaren – unitarni operatorji imajo lahko katerokoli fazo. Če $\phi = -1$, je $U = -U^T$. Za brezspinske delce je $\phi = 1$.

B Spinski delci $T^2 = -1$

Sedaj se lotimo še izpeljave za spinske delce.

Zdaj pa si pogledajmo delce z notranjo vrtilno količino - spinom. To nam da dodatno zahtevo, saj je vsak moment (angular momentum) lih na TR

$$T\hat{S}T^{-1} = -\hat{S}. \quad (41)$$

To pomeni, da spin prevrže predznak ob obratu časa - rotacija okoli y osi za π . Upoštevajoč tudi sorazmernost s K, saj je delovanje T na \hat{p} neodvisno od spina, dobimo

$$T = \exp(-i\pi S_y)K. \quad (42)$$

Iščemo T^2 , predpostavljamo, da je v standardni representaciji S_y čisto imaginarna. Imamo

$$\begin{aligned} T^2 &= \exp(-i\pi S_y)(K \exp(-i\pi S_y)K) \\ &= \exp(-i\pi S_y) \exp(-i\pi S_y^*) \\ &= \exp(-i2\pi S_y). \end{aligned}$$

Ta rezultat je pomemben: delovanje s TR dvakrat rotira spin za 2π , kar je pri delcih s celoštevilskim spinom identiteta, pri polcelih pa da faktor -1 . Za polcele delce se da matrični eksponent relativno lahko iz vrednotiti ($S = \frac{\hbar}{2}(\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z)$)

$$\exp(-i\pi S_y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{-i\pi\sigma_y}{2}\right)^k = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -i\sigma_y. \quad (43)$$

Preverimo lahko eksplicitno:

$$T^2 = -i\sigma_y i\sigma_y^* K K = -\sigma_y \sigma_y = -1. \quad (44)$$

Iz $T^2 = -1$ imamo za polcele delce $T^{-1} = -T$ in za $s = \frac{1}{2}$

$$T \hat{S} T^{-1} = -i\sigma_y \hat{S}^* K i\sigma_y K = -i\sigma_y \hat{S}^* (-i)\sigma_y^* K K = \sigma_y \hat{S}^* \sigma_y = -\hat{S}. \quad (45)$$

Z zadnjo enakost, če so komponente \hat{S} samo x in z, K ne naredi ničesar, matrika σ_y pa antikomutira s $\sigma_{x,z}$ [16].

Literatura

- [1] Markus Büttiker. "Absence of backscattering in the quantum Hall effect in multiprobe conductors". V: *Physical Review B* 38.14 (1988), str. 9375.
- [2] Allan H MacDonald in P Středa. "Quantized Hall effect and edge currents". V: *Physical Review B* 29.4 (1984), str. 1616.
- [3] K v Klitzing, Gerhard Dorda in Michael Pepper. "New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance". V: *Physical Review Letters* 45.6 (1980), str. 494.
- [4] David J Thouless in sod. "Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential". V: *Physical review letters* 49.6 (1982), str. 405.
- [5] FDM Haldane in S Raghu. "Possible realization of directional optical waveguides in photonic crystals with broken time-reversal symmetry". V: *Physical review letters* 100.1 (2008), str. 013904.
- [6] Alexander B Khanikaev in sod. "Photonic topological insulators". V: *Nature materials* 12.3 (2013), str. 233–239.
- [7] Kejie Fang, Zongfu Yu in Shanhui Fan. "Realizing effective magnetic field for photons by controlling the phase of dynamic modulation". V: *Nature photonics* 6.11 (2012), str. 782–787.
- [8] DJ Thouless. "Quantization of particle transport". V: *Physical Review B* 27.10 (1983), str. 6083.

- [9] Tomoki Ozawa in sod. "Topological photonics". V: *Reviews of Modern Physics* 91.1 (2019), str. 015006.
- [10] Ling Lu, John D Joannopoulos in Marin Soljačić. "Topological photonics". V: *Nature photonics* 8.11 (2014), str. 821.
- [11] Tomoki Ozawa. *Topological photonics*. 2019. URL: <https://arxiv.org/pdf/1802.04173.pdf> (pridobljeno 14. 8. 2020).
- [12] Zheng Wang in sod. "Reflection-free one-way edge modes in a gyromagnetic photonic crystal". V: *Physical review letters* 100.1 (2008), str. 013905.
- [13] U Kuhl in H-J Stöckmann. "Microwave realization of the Hofstadter butterfly". V: *Physical review letters* 80.15 (1998), str. 3232.
- [14] Yaacov E Kraus in sod. "Topological states and adiabatic pumping in quasicrystals". V: *Physical review letters* 109.10 (2012), str. 106402.
- [15] Yaacov E Kraus, Zohar Ringel in Oded Zilberberg. "Four-dimensional quantum Hall effect in a two-dimensional quasicrystal". V: *Physical review letters* 111.22 (2013), str. 226401.
- [16] B Andrei Bernevig in Taylor L Hughes. *Topological insulators and topological superconductors*. Princeton university press, 2013.