

NESKONČNA STRUNA S TOČKASTO MASO

JAJA GAŠPERIN

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

V tem članku bo raziskano gibanje dovolj velike oz. neskončne strune s pritrjeno točkasto maso. Masa, ki je preko vzmeti pritrjena na mirujočo steno, bo ob nekem času iz mirovanja vzbujena tako, da dobi neko začetno hitrost. Obravnavana struna je idealno gibka in neraztegljiva. Začetna hitrost, ki jo masa dobi pa bo dovolj majhna, da se lahko uporabi znano valovno enačbo $\ddot{y} - c^2 y'' = 0$.

INFINITE STRING

In this article, a large-enough/infinite string with attached point mass will be studied. A spring is attached to the point mass and to static surface. At some time $t = 0$ our system is excited when a point mass receives velocity v_0 . The string is shear free and inextensible. Velocity v_0 will be small enough that the known wave equation $\ddot{y} - c^2 y'' = 0$ is applicable.

1. Uvod

Poznavanje reševanje parcialnih diferencialnih enačb je v fiziki zelo pomembno, ker sta tako klasični 2. Newtonov zakon kot tudi kvantna Schrödingerjeva enačba parcialni. Posebej se lahko zavemo, da sta si klasična valovna enačba in pa Schrödingerjeva enačba, ki ji z drugim imenom tudi rečemo kvantna valovna enačba, zelo podobni. Reševanje Schrödingerjeve enačbe in njene stacionarne variante je zelo pomembno pri kvantnih problemih, ne samo v fiziki, ampak tudi v drugih vedah, kot je na primer kemija, kjer tako določajo osnovna stanja atomov in molekul in na podlagi energijskih nivojev veliko povedo o snoveh in njihovih kemijskih reakcijah. Dobro je poznati rešitve klasične (dušene) valovne enačbe tudi iz inženirskega vidika, saj je valovanje (in nihanje) zelo pogosto v vsakdanjem življenju. Od izdelovalcev glasbil, akustičnih sob in sten, do detekcije potresov in napovedovanje cunamijev in drugih tektonskih premikov ter mnogih drugih. Velikokrat pride do tresljajev ali motenj tudi v strojih in napravah in zato je dobro vedeti lastnosti in vzdržljivost materialov na taka nihanja, saj se valovanje širi po napravi in lahko pride tudi do bolj občutljivih delov. Zato je v takih primerih smiselno poskrbeti, da se valovanje zaduši ali pa razprši. [1] [2] [3] [4] [5] [6] [7] [8] [9]

V članku se bomo posvetili reševanju linearne parcialne diferencialne enačbe, ki ji pravimo valovna enačba $\ddot{y} - c^2 y'' = 0$. Obravnavali bomo valovanje neskončne strune s pritrjeno točkasto maso. To spada na področje kontinuumske klasične fizike, kjer se 2. Newtonov zakon za idealno gibko in neraztegljivo struno prevede na matematično reševanje parcialne diferencialne enačbe $\ddot{y} - c^2 y'' = 0$. Primer neskončne strune je dokaj pedagoške narave, ampak v praksi tudi dober približek, ko so efekti odboja na konceh zanemarljivo majhni. Kljub temu da je v članku naš medij širjenja motnje le enodimenzionalna struna, nam ta vseeno daje občutek tudi, za širjenje motnje po večdimenzionalnem mediju (glasbila, naprave itd.). Našo valovno enačbo $\ddot{y} - c^2 y'' = 0$ lahko rešimo na veliko različnih načinov in vsi standardni načini za reševanje PDE bi bili ustrezni. Ker pa imamo tudi robni pogoj zaradi mase, je pametno izbrati takega, ki nam bo reševanje najbolj olajšal. Kot vemo se parcialne diferencialne enačbe rešuje na mnoge različne načine, analitične in numerične. Ene izmed bolj znanih analitičnih metod je metoda reševanja s separacijo spremenljivk. Pogosto je tudi reševanje z Greenovimi funkcijami. (Za reševanje valovnih enačb je velikokrat v uporabi tudi d'Alembertova formula.) V članku bo prikazano reševanje z nastavkom in sicer z nastavkom navzven širjenega valovanja, saj je to eden izmed najlažjih načinov za rešitev problema ob zavedanju da imamo poleg valovne enačbe gibanja tudi robni pogoj za struno v točki $x = 0$ zaradi mase m .

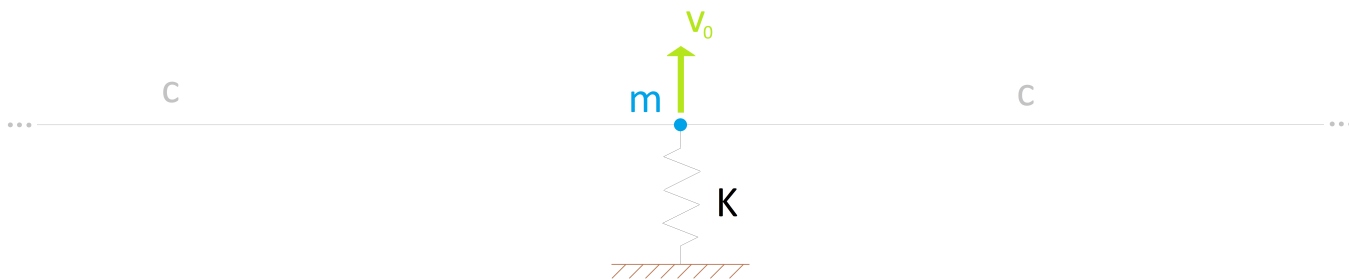
Robni problem ($\ddot{y} - c^2 y'' = 0$ + robni pogoj 2. Newtonov zakon) je problemu vsiljenega nihanja ($\ddot{y} - c^2 y'' = f_{vsiljevanje}(x, t)$) matematično popolnoma ekvivalenten. Robni problem bi lahko pretvorili na problem vsiljevanja, če 2. Newtonov zakon za maso m ustrezno pretvorimo v funkcijo $f_{vsiljevanje}(x, t)$.

Z uporabo zvezne teorije in delitve materije na poljubno majhne diferencialne koščke, je mogoče napisati 2. Newtonov zakon za struno. Zaradi simetrije ugotovimo, da je obnašanje na struni desno od mase enako kot na struni levo od mase. Potem uporabimo 2. Newtonov zakon za točkasto maso, ki bo igral vlogo robnega pogoja za enačbo strune. Videli bomo, da bo fizikalni parametri problema lahko povzročijo funkcijsko različne rešitve (podkritično, nadkritično in kritično dušenje). Naši parametri bodo masa m , koeficient vzmeti K , začetna hitrost mase v_0 , linearna porazdelitev mase strune μ in natezna sila strune F_0 oz. hitrost zvoka v struni $c = \sqrt{\frac{F_0}{\mu}}$.

V članku bo predstavljena rešitev problema neskončne strune s točkasto maso, ki je preko vzmeti pritrjena na mirujočo steno. Najprej bom naredil opis našega sistema in ga prevedel na matematično reševanje navadne klasične valovne enačbe $\ddot{y} - c^2 y'' = 0$ z robnim pogojem zaradi mase. Dolgo izpeljavo rešitev valovne enačbe se da vedeti v dodatku (poglavje 7.). V jedru članka (poglavje 3.) pa bo reševanje predstavljeno bolj na kratko. Videli bomo, da imamo 3 različne režime rešitev, ki jih dobimo ob različnih vrednostih fizikalnih parametrov c, F_0, m, K .

2. Fizikalni opis sistema

Zanimali se bomo za gibanje neskončne strune, ki ima nekje vpeto maso m . Ta masa bo z vzmetjo K pritrjena na mirujočo steno. Ob nekem času, ki ga bomo proglasili za čas $t = 0$, bomo masi dali hitrost v_0 in se bomo zanimali za pozicijo strune oz. za njeno obliko. (glej sliko 1)



Slika 1. Prikazuje sistem, ki ga obravnavamo.

Problem je klasičen in zato se ga lotimo tako, da napišemo 2. Newtonov zakon za diferencialno majhen košček strune. Na tak način pridemo do enačbe 1. μ je linearna gostota mase strune, \mathbf{r} je lega strune, \mathbf{f}_{zun} je rezultanta zunanjih sil, če bi jih imeli, npr. sila teže (pri nadaljnji obravnavi bomo silo teže zanemarili). Potem imamo pa še \mathbf{F} , ki je natezna sila v struni, ki je posledica tega, da je struna napeta. Vse te količine so odvisne od ločnega parametra s in od časa t .

$$\mu(s)\ddot{\mathbf{r}}(s, t) = \mathbf{f}_{zun}(s, t) + \frac{\partial \mathbf{F}(s, t)}{\partial s}(s, t) \quad (1)$$

Ker imamo opravka z idealno gibko in neraztegljivo struno se enačba 1 poenostavi v znani izraz 2, kjer $c := \sqrt{\frac{F_0}{\mu}}$ hitrost zvoka v struni z linearno gostoto mase μ in je napeta z natezno silo

F_0 . Opazimo lahko, da smo odvisnost od ločne koordinate s uspeli spremeniti na odvisnost od x koordinate.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) y(x, t) = 0 \quad (2)$$

V splošnem je lahko gostota strune μ odvisna od pozicije x oz. s ter natezna sila F_0 odvisna od časa t . Strune imajo večinoma približno enakomerno porazdeljeno maso in ves čas približno enako natezno silo F_0 .

Enačba 2 je enačba gibanja za vse čase t in vse lege, razen za $x = 0$, kjer imamo maso m . Pri $x = 0$ s pomočjo 2. Newtonovega zakona dobimo enačbo 3.

$$m\ddot{y}(x = 0, t) = -Ky(x = 0, t) + F_0 \frac{\partial y}{\partial x}(x = 0+, t) - F_0 \frac{\partial y}{\partial x}(x = 0-, t) + mv_0\delta(t) \quad (3)$$

K je koeficient vzmeti, v_0 pa začetna hitrost, ki jo ob času $t = 0$ damo točkasti masi m .

3. Reševanje

Sedaj bomo matematično formulirati naš problem in nakazali reševanje. Bolj natančen in formalen matematičen postopek bo prikazan v dodatku (glej poglavje 7). Valovna enačba, ki velja za majhne odmike idealno gibke in neraztegljive strune je

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) y(x, t) = 0, \quad (4)$$

ki velja za vsak $t \in \mathbb{R}$ in vsak $x \neq 0$.

Začetni pogoj za lego pravi

$$y(x, t \leq 0) = 0 \quad (5)$$

za vsak $x \in \mathbb{R}$.

Začetni pogoji za hitrost povedo

$$\dot{y}(x, t < 0) = 0, \quad (6)$$

$$\dot{y}(x = 0, t = 0+) = v_0, \quad (7)$$

$$\dot{y}(x \neq 0, t = 0+) = 0, \quad (8)$$

kjer oznaka $\dot{y}(x = 0, t = 0+)$ pomeni desna limita v času t . Leva limita je očitno nič, desna limita hitrosti za maso pa je v_0 , ker v trenutku $t = 0$ delujemo z neskončnim pospeškom oz. delta funkcijo pospeška.

Drugi Newtonov zakon za maso ('robni' pogoj):

$$m\ddot{y}(x = 0, t) = -Ky(x = 0, t) + F_0 y'(x = 0+, t) - F_0 y'(x = 0-, t) + mv_0\delta(t) \quad (9)$$

za vsak $t \in \mathbb{R}$. Zapis \ddot{y} označuje drugi odvod y po času, y' pa prvi odvod y po kraju.)

Ker je naš problem simetričen na zrcaljenje preko mase, je smiselno privzeti, da je rešitev $y(x, t)$ soda funkcija lege x .

$$y(x, t) = y_R(|x|, t) \quad (10)$$

y_R je funkcija, ki je definirana samo za pozitivne $x \geq 0$. S tem nastavkom oz. predvidevanjem, da je $y(x, t)$ soda funkcija kraja, se enačbe malo poenostavijo (predvsem drugi Newtonov zakon za

maso).

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) y_R(x > 0, t) = 0 \quad (11)$$

$$y_R(x \geq 0, t \leq 0) = 0 \quad (12)$$

$$\dot{y}_R(x \geq 0, t < 0) = 0 \quad (13)$$

$$\dot{y}_R(x = 0, t = 0+) = v_0 \quad (14)$$

$$\dot{y}_R(x \neq 0, t = 0+) = 0 \quad (15)$$

$$m\ddot{y}_R(x = 0, t) = -Ky_R(x = 0, t) + 2F_0 y'_R(x = 0, t) + mv_0 \delta(t) \quad (16)$$

Ta sistem enačb je mogoče rešiti na več načinov. Mi bomo vzeli nastavek navzven potujočih valov, torej $y_R(x, t) = f(x - ct)$. Ta nastavek je fizikalno smiseln, saj z njim predpostavimo le, da se bo val širil navzven (stran od mase). Ko bomo masi dali hitrost v_0 , pričakujemo, da se bo ta motnja širila s hitrostjo c navzven. Navznoter pa nimamo nobenega valovanja, ker iz neskončnosti ne pošiljamo nobenega valovanja noter (proti masi).

Nastavek reši ta sistem enačb in vidimo, da imamo 3 fizikalno različne rešitve, v odvisnosti od parametrov c , K , F_0 in m . Te tri rešitve imenujemo rešitev podkritičnega, nadkritičnega in kritičnega dušenja (analogija z linearno dušenim nihanjem, npr. matematičnega nihala). Enačba 17 zajema vse tri rešitve skupaj, ampak jo je potrebno pravilno razumeti, saj v primeru podkritičnega dušenja postane argument hiperboličnega sinusa imaginaren in se zato obnaša enako kot običajen sinus z realnim argumentom. V primeru kritičnega dušenja pa dobimo izraz nič deljeno z nič in je potrebno uporabiti L'Hopitalovo pravilo (za bolj natančno izpeljavo kritične rešitve glej poglavje 7).

$$y(x, t) = \frac{v_0}{c} \theta(ct - |x|) e^{-\frac{F_0}{mc^2}(ct - |x|)} \frac{mc^2}{\sqrt{F_0^2 - mc^2 K}} \operatorname{sh} \left(\frac{\sqrt{F_0^2 - mc^2 K}}{mc^2} (ct - |x|) \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R} \quad (17)$$

To je sedaj končni izraz za odmik strune $y(x, t)$ iz osnovne (začetne lege). Vrednost $F_0^2 - mc^2 K$, ki je pod korenem je lahko pozitivno ali negativno število in imamo lahko zato sinus ali pa hiperbolični sinus ($\operatorname{sh} iX = i \sin X$). Imaginarno število i se skrajša s korenem tako, da vseeno ostane $y(x, t)$ realen. (i je imaginarno število $i = \sqrt{-1}$)

Uvedemo novi spremenljivki $\beta := \frac{\mu c}{m} = \frac{F_0}{mc} \geq 0$ in $\omega_0 := \sqrt{\frac{K}{m}} \geq 0$. Z uvedbo novih spremenljivk se enačba 17 poenostavi.

$$y(x, t) = v_0 \cdot \theta \left(t - \frac{|x|}{c} \right) \frac{e^{-\beta \left(t - \frac{|x|}{c} \right)}}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \cdot \left(t - \frac{|x|}{c} \right) \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R} \quad (18)$$

$$y(x, t) = v_0 \cdot \theta \left(t - \frac{|x|}{c} \right) \frac{e^{-\beta \left(t - \frac{|x|}{c} \right)}}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \sin \left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot \left(t - \frac{|x|}{c} \right) \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R} \quad (19)$$

Obe enačbi 18 in 19 sta ekvivalentni. Če je $\beta < \omega_0$, pravimo temu **podkritično dušenje** (za tak primer raje uporabimo enačbo 19). Če je $\beta > \omega_0$, pravimo, da gre za **nadkritično dušenje** (glej enačbo 18). Če pa je $\beta = \omega_0$, pravimo, da imamo opravka s **kritičnim dušenjem** (glej enačbo 27). Problem je skoraj popolnoma analogen problemu gibanja mase na vzmeti na katerega deluje zunanja sila oblike $F = -\gamma v$ (linearni zakon upora, v je hitrost, $\gamma > 0$ pa nek koeficient).

β predstavlja dušenje s katero struna duši gibanje mase m , medtem ko je ω_0 posledica vzmeti, ki želi vrniti maso v prvotno lego.

3.1 Podkritično dušenje

En primer podkritičnega dušenja dobimo, če $F_0 \rightarrow 0$, kar je ekvivalentno temu, da nimamo strune. Tudi za šibko napeto struno dobimo podkritično dušenje. Podkritično ($\beta < \omega_0$) obnašanje si je zelo preprosto predstavljati. $v_0 \cdot \theta \left(t - \frac{|x|}{c} \right) \frac{e^{-\beta \left(t - \frac{|x|}{c} \right)}}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ tvori ovojnico, potem pa sinus le alternira s krožno frekvenco $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Za podkritično dušenje uporabimo enačbo 19 in ker je argument sinusa realno število je rešitev popolnoma predstavljiva. Za $\omega_0 \gg \beta$ je veliko nihajev potrebno, da se sistem oz. masa izniha, medtem ko bolj kot se približujemo $\omega_0 \approx \beta$ manj nihajev je potrebno, da se masa izniha, kar je za pričakovati in je znano za podkritično pomnoževanje. Kar je razvidno iz grafov na sliki 2.

$$y(x, t) = v_0 \cdot \theta \left(t - \frac{|x|}{c} \right) \frac{e^{-\beta \left(t - \frac{|x|}{c} \right)}}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \sin \left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot \left(t - \frac{|x|}{c} \right) \right) \quad \omega_0 > \beta \quad (20)$$

Slike 2,3 in 4 prikazujejo, kako se giblje masa m v odvisnosti od časa t . Seveda imamo za različne parametre različno gibanje (količine so v osnovnih enotah tiste količine). Iz rezultata za gibanje mase je zelo preprosto ugotoviti, kako se giblje celotna struna, saj se val iz mase le širi navzven s hitrostjo c . Torej, da ugotovimo, kakšna je lega ob času t za točko na struni, ki je po x koordinati oddaljena od mase za $|x|$, je le treba pogledati, kakšna je bila lega mase ob času $t - \frac{|x|}{c}$. Val se giblje enako v obe smeri, tako v levo kot v desno.

3.2 Nadkritično dušenje

Nadkritično dušenje pa se zgodi, ko je struna zelo napeta, seveda v primerjavi z drugimi parametri. Da dobimo nadkritično dušenje, mora veljati $\beta > \omega_0$. Rešitev nadkritičnega dušenja si je malo težje predstavljati, ker hiperbolični sinus monoton narašča. Ko gre njegov argument proti neskončno, gre tudi vrednost hiperboličnega sinusa proti neskončno. Poleg eksponentno naraščajočega člena imamo tudi eksponentno padajoč člen $e^{-\beta \left(t - \frac{|x|}{c} \right)}$, tako da na prvi pogled ni očitno, kako se funkcija obnaša. Še enkrat si pogledjmo enačbo 18 in se spomnimo, da za nadkritično dušenje velja $\beta > \omega_0$. Posledično je argument hiperboličnega sinusa realen.

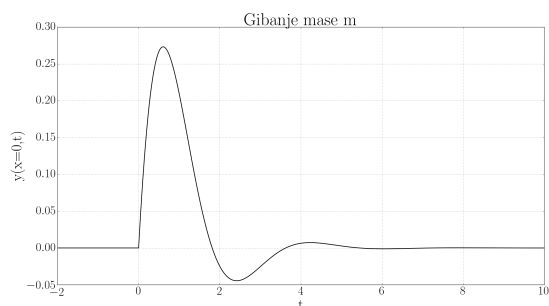
$$y(x, t) = v_0 \cdot \theta \left(t - \frac{|x|}{c} \right) \frac{e^{-\beta \left(t - \frac{|x|}{c} \right)}}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \cdot \left(t - \frac{|x|}{c} \right) \right) \quad \beta > \omega_0 \quad (21)$$

$$y(x, t) = w(x, t) \cdot e^{-\beta \left(t - \frac{|x|}{c} \right)} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \cdot \left(t - \frac{|x|}{c} \right) \right) \quad \beta > \omega_0 \quad (22)$$

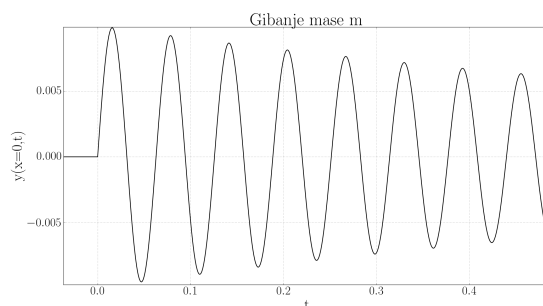
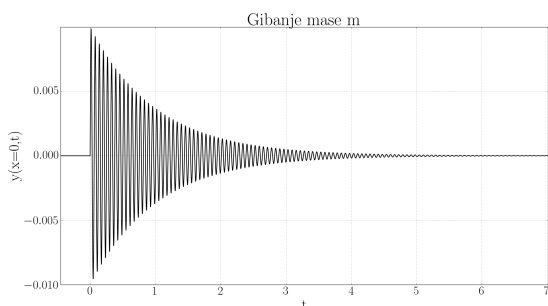
Funkcijo $w(x, t)$, da imamo krajši zapis. Vsebuje dokaj preprosto funkcijsko odvisnost $w(x, t) := \frac{v_0}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \cdot \theta \left(t - \frac{|x|}{c} \right)$. Hiperbolični sinus napišimo z eksponenti, zato da bomo lahko razložili začetni naraščajoči odmik motnje in nato nadaljnje pojemanje (glej sliko 3). V tem podpoglavju 3.2 bomo samo manipulirali ta izraz 21, da bomo določili karakteristične čase naraščanja in pojemanja. Kogar to ne zanima lahko nadaljuje z branjem poglavja 3.3

$$y(x, t) = \frac{w(x, t)}{2} \cdot \left(e^{-\beta \left(t - \frac{|x|}{c} \right) \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\beta^2}} \right)} - e^{-\beta \left(t - \frac{|x|}{c} \right) \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\beta^2}} \right)} \right) \quad \beta > \omega_0 \quad (23)$$

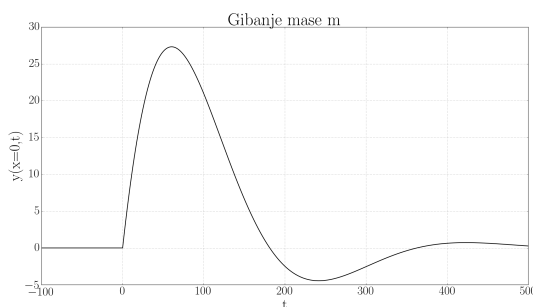
Definiramo oznako $q := \frac{\omega_0}{\beta}$, kjer je $0 \leq q \leq 1$. Nato lahko definiramo še oznako $\kappa := \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\beta^2}} = \sqrt{1 - q^2}$, za katero velja $0 \leq \kappa \leq 1$.



(a) Prikazuje gibanje mase za rešitev, ko imamo močno vzmet oz. za podkritično dušenje, ko je $(\omega_0 > \beta)$. Parametra imata vrednosti $\beta = 1$ in $\omega_0 = 2$.



(b) Prikazuje gibanje mase za rešitev, ko imamo močno vzmet oz. za podkritično dušenje, ko je $(\omega_0 > \beta)$. Parametra imata vrednosti $\beta = 1$ in $\omega_0 = 100$.



(c) Prikazuje gibanje mase za rešitev, ko imamo močno vzmet oz. za podkritično dušenje, ko je $(\omega_0 > \beta)$. Parametra imata vrednosti $\beta = 0,01$ in $\omega_0 = 0,02$.

Slika 2. Prikazujejo gibanje mase v primeru podkritičnega dušenja.

$$y(x, t) = \frac{w(x, t)}{2} \cdot \left(e^{-\beta\left(t - \frac{|x|}{c}\right) \cdot (1-\kappa)} - e^{-\beta\left(t - \frac{|x|}{c}\right) \cdot (1+\kappa)} \right) \quad \beta > \omega_0 \quad (24)$$

$$y(x, t) = \frac{w(x, t)}{2} \cdot \left(e^{-\beta(1-\kappa) \cdot \left(t - \frac{|x|}{c}\right)} - e^{-\beta(1+\kappa) \cdot \left(t - \frac{|x|}{c}\right)} \right) \quad \beta > \omega_0 \quad (25)$$

$\tau_- := \beta(1 - \kappa)$ in $\tau_+ := \beta(1 + \kappa)$ predstavljata karakteristična časa pa padanje teh eksponentov. Velja tudi $0 \leq \tau_- \leq \beta$ in $\beta \leq \tau_+ \leq 2\beta$. Od tod vidimo, da je vedno $\tau_+ > \tau_-$ (razen za primer $\omega_0 = \beta$, ampak ta primer smo izvzeli, ker paše k kritičnemu dušenju).

$$y(x, t) = \frac{w(x, t)}{2} \cdot \left(e^{-\tau_- \left(t - \frac{|x|}{c}\right)} - e^{-\tau_+ \left(t - \frac{|x|}{c}\right)} \right) \quad \beta > \omega_0 \quad (26)$$

Ker eksponentni člen s τ_+ hitreje pada proti nič kot pa člen s τ_- , se zgodi, da najprej koordinata mase približno eksponentno raste, dokler ne postane člen $e^{-\tau_+ \left(t - \frac{|x|}{c}\right)}$ dovolj majhen, da začne spreminjanje člena $e^{-\tau_- \left(t - \frac{|x|}{c}\right)}$ prevladovati. Zato najprej dobimo eksponentno rast odmika mase in nato eksponenten približevanje k osnovni legi.

Komentar: za primer podkritičnega dušenja ($\omega_0 > \beta$) je karakteristični čas dušenja $\tau = \beta$ in sinus alternira med območjem, ki ga določa ovojnica, ki se približuje ničli s karakterističnim časom $\tau = \beta$.

Za nadkritično dušenje ($\omega_0 < \beta$) pa imamo najprej eksponentno rast odmika s karakterističnim časom $\tau_+ = \beta \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\beta^2}}\right)$ in nato eksponentno približevanje osnovni legi oz. legi $y = 0$ s karakterističnim časom $\tau_- = \beta \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\beta^2}}\right)$. Od tu je videti, da sta si τ_+ in τ_- najbolj podobna ko smo blizu kritičnega dušenja, torej, ko je β le malo večji od ω_0 . Ko smo pa daleč od kritičnega dušenja in smo v območju močno nadkritičnega dušenja ($\beta \gg \omega_0$) pa je $\tau_+ \gg \tau_-$, kar nam omogoči, da praktično vidimo prispevka posameznih eksponentov zelo razvidno (glej grafe na sliki 3). Če bi delali s spremenljivkama β in $\frac{\omega_0}{\beta} = q$, bi videli, da je β le neka časovna skala problema, medtem ko bo parameter $\frac{\omega_0}{\beta}$ dejansko določal obliko grafa (glej sliko 3).

3.3 Kritično dušenje

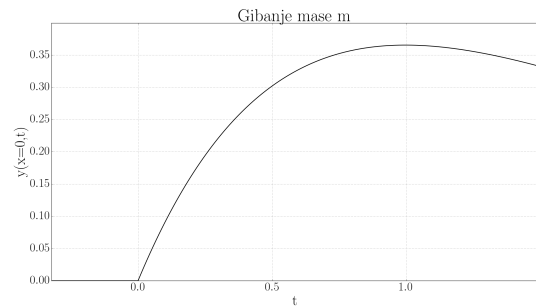
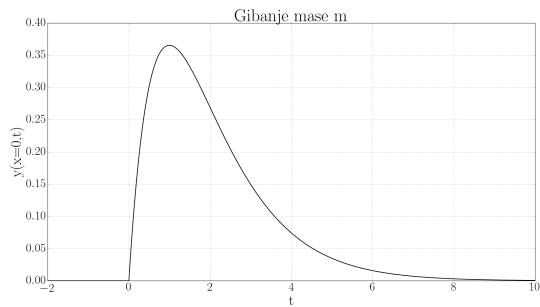
Matematična izpeljava za kritično dušenje je narejena v dodatku tega članka (glej poglavje 7). Rešitev, ki jo dobimo, je

$$y(x, t) = y_R(|x|, t) = v_0 \cdot \theta \left(t - \frac{|x|}{c} \right) \cdot e^{-\beta \left(t - \frac{|x|}{c} \right)} \cdot \left(t - \frac{|x|}{c} \right). \quad (27)$$

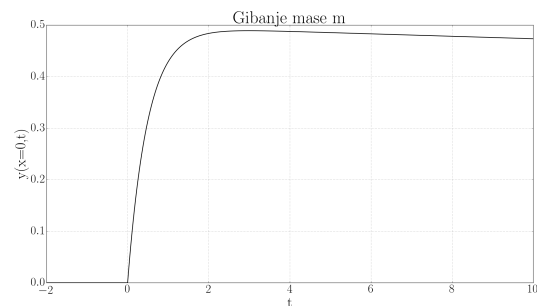
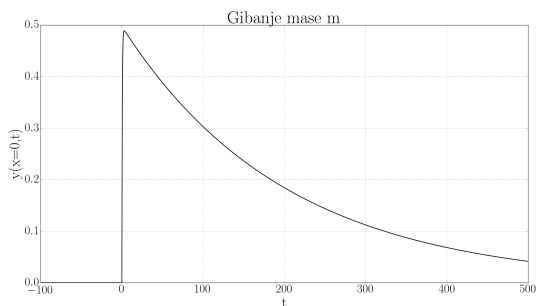
Vidimo, da se enačba 27 ujema z rešitvijo, ki bi jo dobili, če bi enačbi 18 in 19 limitirali $\omega_0 \rightarrow \beta$. Kritično dušenje je še najbolj preproste oblike. Parametra $\beta = \omega_0$ določata kako hitro se bo masa vračala v prvotno lego. Večji kot je parameter β oz. ω_0 hitreje se bo masa vračala v prvotno lego (glej grafe na sliki 4). Za primer ko pa je $\beta = \omega_0$ zelo majhna se bo pa počasi vračala v prvotno lego. Za limitno vrednost parametra $\beta \rightarrow 0$ se masa ne bo sploh vračala. Fizikalno gledano je to masa, ki ni pritrjena na vzmet in struna sploh ni napeta oz. struna sploh ni pritrjena na maso, zato bi se masa ves čas premikala s konstantno hitrostjo v_0 .

4. Fizikalna interpretacija

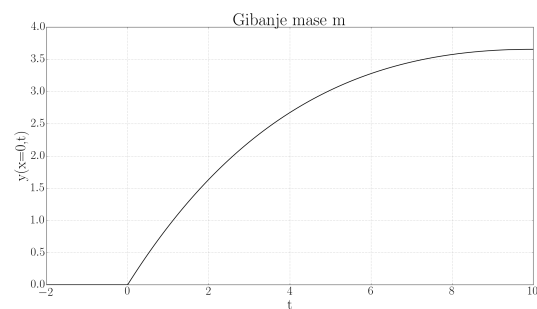
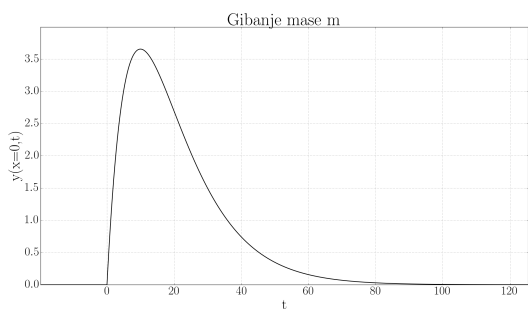
Navajam rešitve za $y(x, t)$, ki so odvisne od parametrov v_0, c, ω_0 in β (enačbe 28, 29 in 30).



(a) Prikazuje gibanje mase za rešitev, ko imamo močno vzmet oz. za nadkritično dušenje, ko je $(\omega_0 < \beta)$. Parametra imata vrednosti $\beta = 1,01$ in $\omega_0 = 1$.



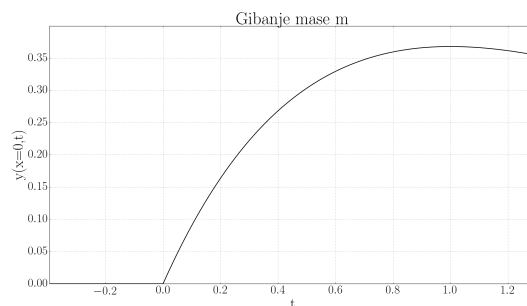
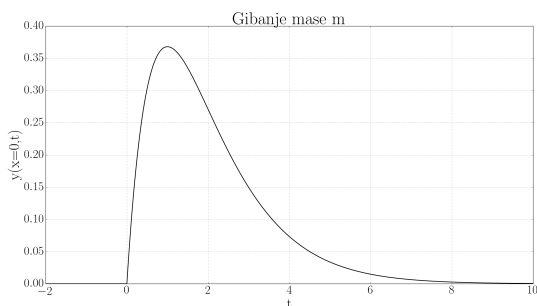
(b) Prikazuje gibanje mase za rešitev, ko imamo močno vzmet oz. za nadkritično dušenje, ko je $(\omega_0 < \beta)$. Parametra imata vrednosti $\beta = 1$ in $\omega_0 = 0,1$.



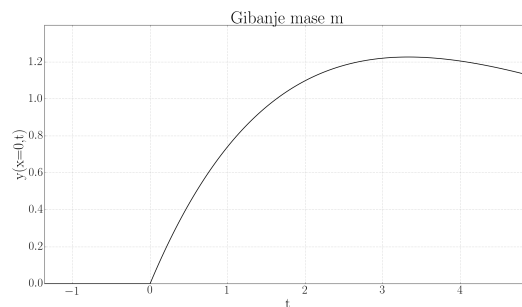
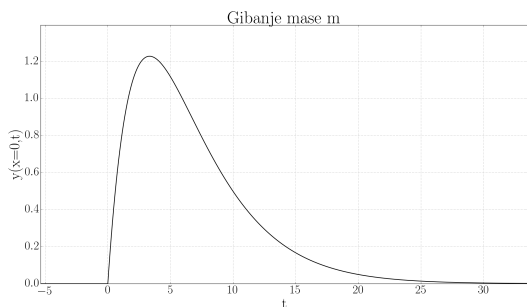
(c) Prikazuje gibanje mase za rešitev, ko imamo močno vzmet oz. za nadkritično dušenje, ko je $(\omega_0 < \beta)$. Parametra imata vrednosti $\beta = 0,101$ in $\omega_0 = 0,100$.

Slika 3. Prikazujejo gibanje mase v primeru nadkritičnega dušenja.

Neskončna struna s točkasto maso



(a) Prikazuje gibanje mase za rešitev, ko imamo kritično dušenje ($\omega_0 = \beta$). Parametra $\beta = \omega_0 = 1$.



(b) Prikazuje gibanje mase za rešitev, ko imamo kritično dušenje ($\omega_0 = \beta$). Parametra $\beta = \omega_0 = 0,3$.

Slika 4. Prikazujejo gibanje mase v primeru kritičnega dušenja.

$$y(x, t) = v_0 \cdot \theta \left(t - \frac{|x|}{c} \right) \frac{e^{-\beta \left(t - \frac{|x|}{c} \right)}}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \sin \left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot \left(t - \frac{|x|}{c} \right) \right) \quad \omega_0 > \beta \quad (28)$$

$$y(x, t) = v_0 \cdot \theta \left(t - \frac{|x|}{c} \right) \frac{e^{-\beta \left(t - \frac{|x|}{c} \right)}}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \cdot \left(t - \frac{|x|}{c} \right) \right) \quad \omega_0 < \beta \quad (29)$$

$$y(x, t) = v_0 \cdot \theta \left(t - \frac{|x|}{c} \right) \cdot e^{-\beta \left(t - \frac{|x|}{c} \right)} \cdot \left(t - \frac{|x|}{c} \right) \quad \omega_0 = \beta \quad (30)$$

Fizikalni problem je mogoče z opazko, da je enačba za gibanje mase m le enačba za linearno dušenje. y lega strune pri koordinati x ob času t je enaka kot je bila lega mase ob času $t - \frac{|x|}{c}$. Dobimo 3 različne režime, ki jih popisujejo enačbe 28 (podkritično dušenje), 29 (nadkritično dušenje) in 30 (kritično dušenje). Katerega od režimov dobimo je odvisno od tega ali je β večji, manjši ali enak kot ω_0 . Gibanje mase je za te tri režime prikazano na slikah 2, 3 in 4 pri različnih vrednostih parametrov, ki so povezani z maso m , koeficientom vzmeti K , linearno masno gostoto strune μ in natezno silo F_0 oz. zvočno hitrostjo strune $c = \sqrt{\frac{F_0}{\mu}}$. Veljata zvezi: $\beta = \frac{\sqrt{\mu \cdot F_0}}{m} = \frac{\mu \cdot c}{m}$ in $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$.

Reševali smo primer neskončne strune, ampak rešitev bi bila popolnoma enaka za poljubno struno, za čase, ki so manjši od časa, ki je potreben, da pride val od mase do roba oz. konca strune. Za večje čase pa se potem zaradi roba in nekega določenega robnega pogoja na koncu strune val odbije nazaj in pokvari to našo preprosto odvisnost.

5. Zaključek

Videli smo, da je reševanje problema neskončne strune dokaj preprost z ustreznim nastavkom, ki je preprosto širjenje vala navzven s hitrostjo c stran od točkaste mase m . Videli smo, da s spreminjanjem fizikalnih parametrov problema, dobimo 3 različne režime (podkritični, nadkritični

in kritični). Videli smo, da je enačba gibanja za točkasto maso enaka enačbi za linearno dušenje. Zanj vemo, da ima 3 režime, ki so podkritično dušenje, nadkritično dušenje in kritično dušenje. Gibanje mase povzroči motnjo v struni in ta motnja se širi nedušeno s hitrostjo c vzdolž strune v obe strani, stran od mase. Kako spreminjanje posameznih parametrov vpliva na gibanje (mase), prikazujejo slike 2, 3 in 4.

V vseh treh primerih imamo najprej začetni odmik oz. amplitudo, ki ga masa doseže zaradi začetne hitrosti, saj se masa nekaj časa premika in zaustavlja, zaradi vzmeti in strune, preden doseže svoj maksimalen odmik. V primeru podkritičnega dušenja masa nato s frekvenco $\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ sinusno niha okoli začetne ravnovesne lege $y = 0$ z eksponentno pojemajočo amplitudo β , ki je posledica dušenja. Za nadkritično dušenje pa začetnemu odkliku sledi le eksponentno približevanje ravnovesni legi $y = 0$. Kritična rešitev pa izgleda zelo podobna nadkritični rešitvi. Predstavljamo si jo lahko kot nadkritično rešitev, ki se najhitreje duši oz. približuje ravnovesni legi, za poljuben fiksen β . Matematično lahko kritično rešitev kot limitno obnašanje nadkritične rešitve $\omega_0 \rightarrow \beta$. V vseh treh primerih nam gibanje mase popolnoma določa lego celotne strune. y lega strune na lokaciji x je enaka kot je bila y lega mase ob času $t - \frac{|x|}{c}$.

6. Zahvala

Rad bi se zahvalil mentorju prof. dr. Marko Žnidariču in Univerzitetni ustanovi ing. Lenarčič Milana, ki je moje delo podprla.

LITERATURA

- [1] Herbert Goldstein, Charles P. Poole Jr., John L. Safko, *Classical Mechanics (3rd ed.)*, Addison-Wesley (2001)
- [2] I. Kuščer in A. Kodre, *Matematika v fiziki in tehniki*, DMFA (1994).
- [3] G. B. Arfken in H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Harcourt (2001).
- [4] M. Stone in P. M. Goldbart, *Mathematics for Physics*, CUP (2009).
- [5] S. Hassani, *Mathematical Physics*, Springer (1999).
- [6] J. Mathews in R. L. Walker, *Mathematical Methods of Physics*, W. A. Benjamin (1964).
- [7] A. Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics*, AP (1964).
- [8] P. M. Morse in H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics I. & II.*, McGraw-Hill (1953).
- [9] Janez Strnad, *Fizika 1.del*, DMFA (2016)

7. Dodatek - Izpeljava rešitev

V tem dodatku bom sedaj matematično formalno pokazal kako pridemo do rešitev (enačbi 17 in 27) naslednjih enačb:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) y_R(x > 0, t) = 0, \quad (31)$$

$$y_R(x \geq 0, t \leq 0) = 0, \quad (32)$$

$$\dot{y}_R(x \geq 0, t < 0) = 0, \quad (33)$$

$$\dot{y}_R(x = 0, t = 0+) = v_0, \quad (34)$$

$$\dot{y}_R(x \neq 0, t = 0+) = 0, \quad (35)$$

$$m\ddot{y}_R(x = 0, t) = -Ky_R(x = 0, t) + 2F_0y'_R(x = 0, t) + mv_0\delta(t). \quad (36)$$

Sedaj pa pride ključni korak pri matematičnem reševanju problema. Potrebno je izbrati ustrezen nastavek za $y_R(x, t)$ tako, da bo zadoščal vsem tem enačbam. Za nastavek bi lahko vzeli separacijo spremenljivk in poskusili napisati $y_R(x, t) = X(x)T(t)$. Lahko bi tudi poskusili tako, da $y_R(x, t)$ po Fourieru razvijemo ali pa napišemo, da pričakujemo rešitve kot valove v desno in

valove v levo: $\int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{i(kx-kt)} + B(k)e^{i(-kx-kt)} dk$. Lahko bi poskusili rešiti tudi z Greenovimi funkcijami, saj imamo enačbo oblike $Lu = f$. Bolj ugodno pa je uporabiti nastavek za navzven širjen val $y_R(x, t) = f(x - ct)$. Kar je fizikalno smiselno, saj smo s tem predpostavili, da se bo val širil navzven (stran od mase). Ko bomo masi dali hitrost v_0 , pričakujemo, da se bo ta motnja širila s hitrostjo c navzven. Navznoter pa nimamo nobenega valovanja, ker iz neskončnosti ne pošiljamo nobenega valovanja noter. Če bi želeli biti malo bolj splošni, bi lahko vzeli nastavek $y_R(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$.

Odločimo se za uporabo nastavka $y_R(x, t) = f(x - ct)$. Videli bomo, da z njim zadostimo vsem zgornjim enačbam 31, 32, 33, 34, 35, 36. Z uporabo nastavka na enačbi 32 dobimo: $y_R(x \geq 0, t \leq 0) = 0$. In če ta enačba velja za vse $x \geq 0$, velja očitno tudi za $x = 0$.

$$0 = y_R(x = 0, t \leq 0) = f(0 - ct) \quad (37)$$

Po uvedbi nove spremenljivke $T = -ct$ dobimo

$$f(T) = 0, \quad \forall T \geq 0. \quad (38)$$

Sedaj imamo $f(T \geq 0)$ potrebujemo pa še $f(T < 0)$. Za to bomo uporabili drugi Newtonov zakon za maso m . Od tu bomo dobili funkcijsko odvisnosti $f(x - ct)$. Potrebno bo le še določiti konstante v izrazu. Te bomo pa dobili iz začetnih pogojev. Uporabimo nastavek $y_R(x, t) = f(x - ct)$ na enačbi za drugi Newtonov zakon za maso m .

$$mc^2 f''(-ct) = -Kf(-ct) + 2F_0 f'(-ct) \quad (39)$$

za vsak $t > 0$ (zato ni delte v izrazu). Po želji lahko uvedemo novo spremenljivko $T = -ct$. Enačbo prepisemo v

$$mc^2 f''(T) = -Kf(T) + 2F_0 f'(T), \quad \forall T < 0. \quad (40)$$

To je navadna linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti, ki se je preprosto reši z nastavkom $f(T) = e^{\lambda T}$ ($\forall T < 0$).

$$mc^2 \lambda^2 - 2F_0 \lambda + K = 0 \quad (41)$$

Od tod dobimo $\lambda_{1,2}$.

$$\lambda_{1,2} = \frac{F_0}{mc^2} \pm \frac{\sqrt{F_0^2 - mc^2 K}}{mc^2} \quad (42)$$

7.1 Nekritično dušenje $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Za nekritično dušenje vemo, da velja:

$$f(T < 0) = Ae^{\lambda_1 T} + Be^{\lambda_2 T}, \quad (43)$$

$$f(T \geq 0) = 0. \quad (44)$$

Komentar: Enačba 43 velja in je smiselna le v primeru, ko je $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Primer, ko je $\lambda_1 = \lambda_2$ namesto enačbe 43 velja $f(T < 0) = Ae^{\lambda T} + BT e^{\lambda T}$ (glej enačbo 53). Ta primer bomo obravnavali kasneje. Izkaže se, da se rešitev za $\lambda_1 = \lambda_2$ obnaša enako kot, če bi rešitev za $\lambda_1 \neq \lambda_2$ limitirali $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$ (glej enačbo 27 ter primerjaj z enačbami 18 in 19).

Sedaj moramo samo še določiti konstanti A in B. Te konstanti bomo določili iz začetnih pogojev (za maso m). $0 = y_R(x = 0, t = 0-) = y_R(x = 0, t = 0) = y_R(x = 0, t = 0+)$, ker lega ob času $t=0$ ne doživi skoka, je desna limita v času enaka levi limiti v času.

$$y_R(x = 0, t = 0+) = 0 \tag{45}$$

$$\dot{y}_R(x = 0, t = 0+) = v_0 \tag{46}$$

$$0 = y_R(x = 0, t = 0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} (f(-ct < 0)) = \lim_{T \rightarrow 0-} (f(T < 0)) \tag{47}$$

$$0 = \lim_{T \rightarrow 0-} (Ae^{\lambda_1 T} + Be^{\lambda_2 T}) = A + B \tag{48}$$

Vidimo, da je $B = -A$. Nato pa uporabimo še pogoj za začetni hitrost.

$$\begin{aligned} v_0 = \dot{y}_R(x = 0, t = 0+) &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left(\frac{\partial}{\partial t} f(-ct) \right) = \lim_{T \rightarrow 0-} \left(\frac{\partial}{\partial T} f(T = -ct) \right) = \lim_{T \rightarrow 0-} \left(\frac{\partial}{\partial T} f(T < 0)(-c) \right) \\ v_0 &= -c \lim_{T \rightarrow 0-} (A\lambda_1 e^{\lambda_1 T} + B\lambda_2 e^{\lambda_2 T}) = -c(A\lambda_1 + B\lambda_2) = -cA(\lambda_1 - \lambda_2) \end{aligned}$$

Sledi, da je $A = \frac{v_0}{c(\lambda_2 - \lambda_1)}$ in $B = -\frac{v_0}{c(\lambda_2 - \lambda_1)}$.

$$f(T < 0) = \frac{v_0}{c(\lambda_2 - \lambda_1)} (e^{\lambda_1 T} - e^{\lambda_2 T}) \tag{49}$$

$$f(T \geq 0) = 0 \tag{50}$$

To je sedaj naša rešitev za $f(x - ct)$ in od tod dobimo $y_R(x, t)$ in posledično še $y(x, t)$.

$$y(x, t) = \frac{v_0}{c(\lambda_2 - \lambda_1)} (e^{\lambda_1(|x|-ct)} - e^{\lambda_2(|x|-ct)}) \theta(ct - |x|) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R} \tag{51}$$

$\theta(z)$ je Heavisidova koračna funkcija, ki je enaka 0, če je $z \leq 0$ in je enaka 1, če je $z > 0$. Heavisidovo funkcijo smo tu pričakovali, saj vemo, da se motnja na struni širi s hitrostjo c . Če si ne bi tako podrobno pogledali desnih in levih limit in če bi reševali problem le za čase $t > 0$ ne bi dobili te Heavisidove funkcije s pomočjo formalne matematične izpeljave, ampak bi se morali zavedati, da jo potrebujemo s pomočjo fizikalne intuicije.

S pomočjo enačbe 42 preoblikujemo zgornjo enačbo 51.

$$y(x, t) = \frac{v_0}{c} \theta(ct - |x|) e^{-\frac{F_0}{mc^2}(ct-|x|)} \frac{mc^2}{\sqrt{F_0^2 - mc^2 K}} \operatorname{sh} \left(\frac{\sqrt{F_0^2 - mc^2 K}}{mc^2} (ct - |x|) \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R} \tag{52}$$

To je sedaj končni izraz za odmik strune $y(x, t)$ od osnovne (začetne lege), ki je navedena v poglavju 3 in tam uporabljena kot enačba 17.

7.2 Kritično dušenje $\lambda_1 = \lambda_2$

S kritičnim dušenjem imamo opravka, ko je $\omega_0 = \beta$. Če želimo za ta primer izpeljati rešitev formalno se moramo vrniti k enačbi 42. Preverili bomo, kaj se zgodi v primeru $\lambda_1 = \lambda_2$. To je, ko velja $F_0^2 = mc^2 K$ oz. ko je $\beta^2 = \omega_0^2$ in velja $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{F_0}{mc^2} = \frac{\mu}{m} = \frac{\beta}{c} =: \lambda$

$$f(T < 0) = Ae^{\lambda T} + BT e^{\lambda T} \quad (53)$$

$$f(T \geq 0) = 0 \quad (54)$$

Iz pogoja $0 = y_R(0, 0+) = f(0-) = A$ dobimo $A = 0$. Iz pogoja $v_0 = \dot{y}_R(0, 0+) = -cf'(0-) = -c(A\lambda + B) = -cB$ pa določimo, da je $B = -\frac{v_0}{c}$.

$$f(T < 0) = -\frac{v_0}{c} T e^{\lambda T} \quad (55)$$

$$f(x - ct) = \frac{v_0}{c} (ct - x) \cdot \theta(ct - x) \cdot e^{\lambda(ct - x)} \quad (56)$$

$$y(x, t) = y_R(|x|, t) = v_0 \cdot \theta\left(t - \frac{|x|}{c}\right) \cdot e^{-\beta\left(t - \frac{|x|}{c}\right)} \cdot \left(t - \frac{|x|}{c}\right) \quad (57)$$

Enačba 57 je sedaj enaka enačba kot enačba 27, ki jo navajam v poglavju 3.3