VOLUMEN CENTRALNE KROGLE PRI ENOSTAVNEM KUBIČNEM PAKIRANJU

TEJA ŠKVARČ

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Članek obravnava razmerje med volumnoma centralne krogle pri enostavnem kubičnem pakiranju in hiperkocko. V članku je naprej predstavljen problem pakiranja krogel na splošno, nekaj zgodovine, najboljše pakiranje v tridimenzionalnem prostoru in sorodni problem Newtonovega števila oziroma "kissing number". Kasneje je govora o enostavnem kubičnem pakiranju krogel, tj. posebnem primeru pakiranja krogel v kocko, najprej v $2-, 3-$ in $4-$dimenzionalnem prostoru, nato pa še v poljubnem $n-$dimenzionalnem prostoru. Govora bo predvsem o centralni krogli, njenem radiju in volumnu. Predstavljen bo dokaz za izrek, ki pravi, da gre razmerje volumnom centralne krogle in kvadra preko vsake meje, ko gre dimenzija preko vsake meje. Na koncu pa se članek dotakne še uporabe pakiranja krogel v komunikacijskih sistemih.

VOLUME OF THE CENTRAL SPHERE OF SIMPLE CUBIC PACKING

The article discusses the ratio between volume of the central sphere of simple cubic packing and volume of the hypercube. In the paper, one can find something about sphere packing in general, some historical background, the best structure for $3-$dimensional space and the relatable problem of kissing number. Later on, the paper provides more information about simple cubic packing, that is one of the simplest packings of spheres in the cube, presented in $2-, 3-, 4-$ and $n-$dimensional space. The central sphere, its radius and volume will be mostly discussed. In article one can also find a proof of the theorem that tells us that the ratio between volume of the central sphere and volume of the hypercube rises to infinity while dimension rises to infinity. In the end, one can find usage of sphere packing in communication systems.

1. Uvod

Matematiki se vsak dan srečujemo z evklidskim realnim prostorom v vseh mogočih dimenzijah - od najpreprostejših (prve, druge in tretje dimenzije) do poljubnih. Ker so nam $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ lažje predstavljivi, si velikokrat prostore višjih dimenzij predstavljamo kot te, saj se pogostokrat izkaže, da določena lastnost velja tako v višjih dimenzijah kot v teh treh. Vendar pa poznamo primere, ko to ne velja. V tem članku je omenjen eden izmed teh - pakiranje krogel. V nadaljevanju članka je opisano obnašanje razmerja med volumnom centralne krogle iz enostavnega kubičnega pakiranja krogel in volumnom hiperkocke. Najpomembnejša uporaba pakiranja krogle je v komunikacijskih sistemih. Več o tem v poglavju 5.

2. Nekaj definicij

Najprej vpeljimo nekaj pojmov, ki so potrebni za obdelavo snovi. Razdaljo med točkama $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ in $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ iz prostora $\mathbb{R}^n$ bomo označevali z

$$|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Sfera S s središčem c in polmerom r je množica točk, ki so od točke $c \in \mathbb{R}^n$ oddaljene za $r \geq 0$, $r \in \mathbb{R}$, torej:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x - c| = r\}$$

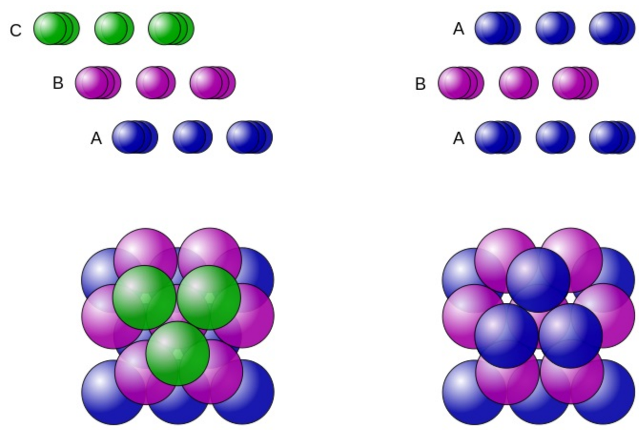
Volumen kvadra v $\mathbb{R}^n$ je enak produktu dolžin vseh stranic v eni dimenziji. To pomeni, da bo volumen n-dimenzionalne kocke s stranico dolžine 2 enak 2^n.

3. Pakiranje krogel

3.1 Zgodovina problema pakiranja krogel

Problem pakiranja krogel oz. "sphere packing" matematično še ni razčiščen. Začetki naj si segali že v leto 500 našega štetja, vendar pa so glavni premiki nastali v času Johannesa Keplerja in Thomasa Harriota. Harriot je bil pomočnik Sira Walterja Raleigha, ki mu je naročil, naj mu skonstruira postavitev topovskih krogel, da jih bo kar največ lahko prepeljal na svoji barki. Harriot je ta problem predstavil Keplerju, ki je nato v začetku 17. stoletja postavil naslednjo hipotezo, imenovano tudi "Keppler conjecutre" [4].

Trditev 1. *Najboljši postavitvi enako velikih krogel, ki najbolje zapolnijo prostor, sta ploskovno centrirana (FCC) in heksagonalno tesna zapolnitev (HCP). Njuna zasedenost prostora predstavlja* $\pi/(3\sqrt{2})$ *oziroma približno* 74.05% *kocke.*



Slika 1. Na sliki sta prikazani postavitvi ploskovno centrirane (levo) in heksagonalno tesne (desno) zapolnitve. Slika je vzeta iz [2].

Za dokaz te trditve oz. domneve so potrebovali 400 let. Leta 1998 je Thomas Hales izdal dokaz, za katerega je takrat veljalo, da ni popolnoma zanesljiv. Šlo je namreč za dokaz, ki je pregledal več kot 5000 različnih postavitev krogel in za vsako vseboval dokaz, da je njena največja gostota manjša od gostote FCC in HCP postavitve. Dokaz so vseeeno sprejeli. Leta 2015 je skupina enaindvajsetih znanstvenikov skupaj z Halesom po dvanajstih letih dela predstavila formalni dokaz za Keplerjevo domeno. V začetku je tudi veljalo, da sta ti dve postavitvi enaki. Prvi, ki je utemeljil, da sta ti dve postavitvi različni, je bil Harriot.

Veliko prej je bil rešen ta problem za dvodimenzionalen prostor, in sicer že leta 1892. Dokazano je, da je največja gosota približno 91%. Tako gostoto dosežemo pakiranjem prikazanim na sliki 2.

3.2 FCC in HCP postavitev

Oglejmo si sedaj najboljši postavitvi v tridimenzionalnem prostoru. Obe imata po 13 krogel, obe imata enako sredinsko plast, ki je sestavljena iz centralne krogle in šestih krogel okoli nje, ter obe imata zgornjo in spodnjo plast sestavljeno iz treh krogel. HCP postavitev ima obe plasti enaki, medtem ko se pri FCC razlikujeta. Ti postavitvi pa nista pomembni samo pri problemu pakiranja krogel, srečamo jih tudi pri kristalnih strukturah. Kristali so sestavljeni iz ponavljajočih se celic, v katerih lahko najdemo ti dve postavitvi atomov.

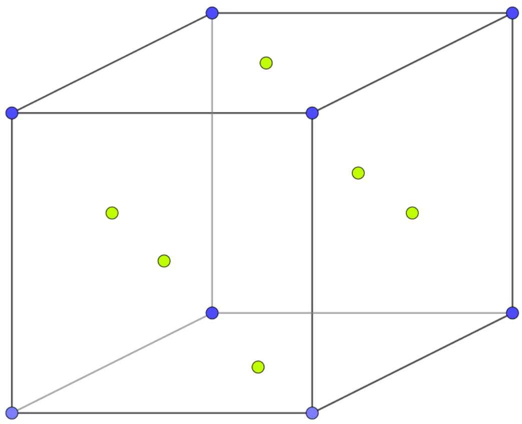
- Primeri kristalov s FCC strukturo: aluminij, krom, baker, zlato, srebro, ...

Slika 2. Na sliki je prikazana najboljša postavitev enako velikih diskov v dvodimenzionalnem prostoru.

- Primeri kristalov s HCP strukturo: kadmij, kobalt, magnezij, cink, ...

Pokažimo, da je gostota FCC postavitve res $\pi/(3\sqrt{2})$. Na sliki 3 lahko vidimo, da so krogle v osnovni celici s FCC strukturo razdeljene v dve skupini. Prva skupina je skupina krogel, ki se nahajajo v kotu osnovne celice. Vsaka taka krogla se nahaja v osmih osnovnih celicah, zato v vsako celico prispeva $1/8$ svojega volumna. V drugi skupini imamo krogle, ki se nahajajo v središču ploskve osnovne celice. Vsaka taka krogla se nahaja v dveh osnovnih celicah, zato v vsako celico prispeva $1/2$ svojega volumna. Iz tega sledi, da vse krogle skupaj prispevajo $4V_{krogla}$, kjer je V_{krogla} volumen ene krogle. Na sliki seveda krogle niso v pravem razmerju, v praksi se dotikajo drug drugega, vendar so tako narisane zaradi lažje predstave celice. Privzemimo, da ima celica, ki je v obliki kocke, stranico dolžine a. V FCC strukturi je ploskovna diagonala zapoljena z kroglami, zato sledi da je $4r = a\sqrt{2}$, kjer je r polmer krogle. Razmerje volumnov je torej enako

$$\frac{4V_{krogla}}{V_{kocka}} = \frac{4\cdot\frac{4\pi r^3}{3}}{a^3} = \frac{4\cdot\frac{4\pi(\frac{a\sqrt{2}}{4})^3}{3}}{a^3} = \frac{\pi\cdot\sqrt{2}}{6} = 0,7405.$$



Slika 3. Na sliki je prikazana osnovna celica s FCC strukturo.

3.3 Kissing number

Glede sorodnega problema sta se prepirala Isaac Newton in David Gregory. Zanimalo ju je, koliko krogel z enakim radijem lahko postavimo okoli centralne krogle. Za dvodimenzionalni problem se takoj eksperimentalno preveri, da več kot 6 diskov ne moremo postaviti okoli centralnega diska, glej sliko 2. Ta problem se imenuje Newtonovo število ali "kissing number". Za tridimenzionalni problem je pravilno tezo postavil Newton, ki je trdil, da lahko okoli centralne postavimo še 12 enako velikih krogel. Ker pa pri postavitvi le-teh ostane še veliko prostora, je Gregory trdil, da lahko Newtonovo postavitev preuredimo in dodamo še eno, torej vse skupaj 13 enako velikih krogel. Za verodostojen dokaz je bilo treba čakati do leta 1953.

Kar se tiče višjih dimenzij, je znanega zelo malo. Za $4-$dimenionalni problem je znano, da lahko postavimo 24 krogel, za $8-$dimenzionalni problem 240, za $24-$dimenzionalni problem pa 196560 krogel. Za ostale dimenziije je ta problem še nerešen.

Iz vsega povedanega je mogoče sklepati, da je problem pakiranja krogel primer problema, ki se različno obnaša v različnih dimenzijah. Tudi za ta primer velja, da so znane največje gostote pakiranja za $1-, 2-, 3-, 8-$ in $24-$dimenzionalen prostor, za ostale dimenzije pa niso. To pa ni naključje. Izkaže se namreč, da sta ta problema zelo povezana, kar se mogoče zdi zelo očitno, vendar pa je za to spoznanje bilo potrebno veliko časa in prav to spoznanje je veliko pripomoglo k dokazu Keplerjeve domneve.

4. Enostavno kubično pakiranje krogel

Poglejmo si ta primer pakiranja. Najprej razjasnimo še nekaj pojmov. 'Kubično pakiranje' pomeni polaganje krogel v kocko, 'enostavno' pa nam pove, da je to primer pakiranja, ki ga bomo lahko intuitivno nadgrajevali v višjih dimenzijah. Nato je tu pojem krogla, ki se nam zdi precej jasen, vendar skozi višje dimenzije ugotovimo, da so precej neintuitivni objekti. V $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$ lahko kroglo takoj narišemo, kaj pa v $\mathbb{R}^4$? Kako si jo sploh predstavljamo? Tudi o tem bo tekla beseda v tem razdelku.

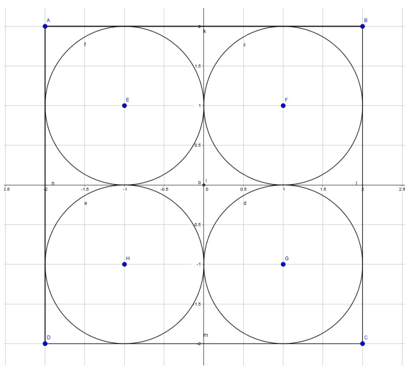
4.1 Velikost centralne krogle pri enstavnem kubičnem pakiranje krogel v $\mathbb{R}^2$

Za lažje razumevanje kako poteka enostavno kubično pakiranje krogel, si poglejmo kako ta poteka v $\mathbb{R}^2$.

Imamo kvadrat s stranicami dolžine 4 enote in središčem v točki $(0, 0)$. Nato narišemo 4 krožnice z enačbami

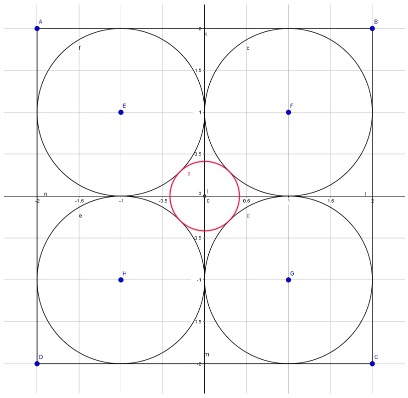
$$(x \pm 1)^2 + (y \pm 1)^2 = 1.$$

To pomeni, da imamo 4 enotske kroge, tj. s polmerom enakim 1, s središčmi v točkah $(1, 1)$, $(1, -1), (-1, -1), (-1, 1)$. Glej sliko 4.

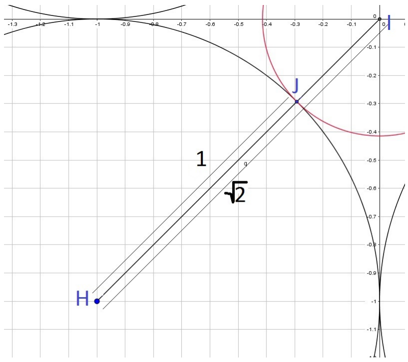


Slika 4. Skica kvadrata in krogov

Opazimo, da je v središču še vedno kar nekaj prostora in tja vrinemo še en krog. Ker se krogi ne smejo prekrivati lahko pa se dotikajo, krog postavimo v središče in izberemo tak radij, da se bo krog dotikal vseh ostalih. V tem primeru dobimo radij centralnega kroga $\sqrt{2} - 1$, glej sliko 6.



Slika 5. Skica z dodanim centralnim krogom



Slika 6. Skica, ki prikazuje pot, kako smo prišli do polmera centralnega kroga

Izračunamo lahko še razmerje volumna krogov in kvadrata. To je v $\mathbb{R}^2$ zelo preprosto.

$$r_{2D} = \frac{V_{krogov}}{V_{kvadrat}} = \frac{4 \cdot V_{velike} + V_{centralne}}{V_{kvadrat}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot (1)^2 + \pi \cdot (\sqrt{2} - 1)^2}{4^2} \cong 0.8191$$

4.2 Velikost centralne krogle pri enstavnem kubičnem pakiranje krogel v $\mathbb{R}^3$

V $\mathbb{R}^3$ naredimo podobno kot v $\mathbb{R}^2$. Tokrat imamo kocko, ki ima stranice dolžine 4 in središče v koordinatnem izhodišču. Namesto krogov pa imamo krogle. Tudi tokrat bomo najprej postavili v kocko enotske krogle. Kocko razdelimo na 8 enakih manjših kock, tako kot smo v $\mathbb{R}^2$ kvadrat razdelili na 4 enake manjše kvadrate, in v vsako položimo enotsko kroglo. Središča krogel so $(1,1,1),(1,-1,-1),(1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1),(-1,-1,1),(-1,1,-1),(-1,-1,-1)$. Enačbe sfer, ki so robovi naših krogel, so:

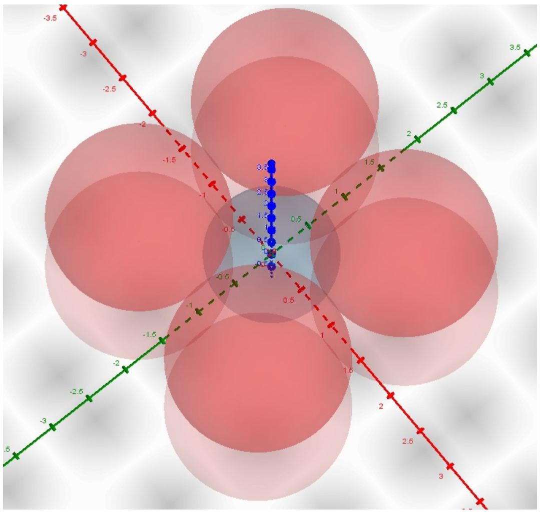
$$(x \pm 1)^2 + (y \pm 1)^2 + (z \pm 1)^2 = 1.$$

Kot prej opazimo, da je v središču še kar nekaj prostora, zato tja položimo manjšo kroglo (slika 7).

Za izračun polmera centralne krogle si bomo znova pomagali s polmerom velikih krogel. Najprej izračunamo razdaljo med središčem koordinatnega sistema in središčem velike krogle. V enačbi za razdaljo nastopajo kvadrati koordinat, zato lahko izberemo katerokoli kroglo in dobimo enak rezultat. Izberimo na primer kar točko $(1,1,1)$.

$$|(1,1,1) - (0,0,0)| = |(1,1,1)| = \sqrt{3}$$

To razdaljo se da izračunatii tudi tako kot v $\mathbb{R}^2$, ko smo razbrali, da je bila ta razdalja diagonala kvadrata s stranicami dolžine 1. V $\mathbb{R}^3$ je to namreč diagonala kocke s stranicami dolžine 1, dolžina diagonale pa je $\sqrt{3}$. To pomeni, da je radij centralne krogle $\sqrt{3} - 1$.



Slika 7. Skica prikazuje enostavno kubično pakiranje v $\mathbb{R}^3$

Poskusimo izračunati razmerje volumnov za ta primer.

$$r_{3D} = \frac{V_{krogel}}{V_{kocke}} = \frac{8 \cdot V_{velike} + V_{centralne}}{V_{kocke}} = \frac{8 \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot (1)^3}{3} + \frac{4 \cdot \pi \cdot (\sqrt{3}-1)^3}{3}}{4^3} \cong 0.5493$$

Kot lahko vidimo s kroglami zasedemo nekaj več kot polovico prostornine kocke, kar kaže na to, da to ni najboljša izbira postavitve.

4.3 Velikost centralne krogle pri enstavnem kubičnem pakiranje krogel v $\mathbb{R}^4$

V $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$ smo si lahko pomagali z geometrijo, kako je pa v $\mathbb{R}^4$, si težje predstavljamo, zato si bomo pomagali kar z razdaljo med točkama. Zopet imamo kvader, ki ima vse stranice dolge 4 enote in središče v točki $(0,0,0,0)$. Razdelimo ga na 16 manjših kvadrov z stranicami dolžine 1. V vsak manjši kvader položimo štiridimenzionalno kroglo s polmerom 1. Enačbe sfer so naslednje:

$$(x \pm 1)^2 + (y \pm 1)^2 + (z \pm 1)^2 + (w \pm 1)^2 = 1.$$

Kot pri prejšnjih primerih v središče postavimo še eno kroglo. Ko računamo polmer s pomočjo razdalje med S_k, tj. središčem katere koli krogle, in S, tj, središčem koordinatnega sistema, ugotovimo naslednje:

$$r = |S_k - S| - 1 = \sqrt{1+1+1+1} - 1 = 2 - 1 = 1$$

V $\mathbb{R}^4$ je tudi centralna krogla enotska!

Volumen krogle v $\mathbb{R}^4$ izračunamo s pomočjo enačbe (1) v naslednjem poglavju. Tako dobimo razmerje:

$$r_{4D} = \frac{V_{krogel}}{V_{kvadra}} = \frac{17 \cdot V_{enotske}}{V_{krvadra}} = \frac{17 \cdot \frac{\pi^2 \cdot (1)^4}{\Gamma(3)}}{4^4} \cong 0.1092$$

4.4 Razmerje med volumnoma centralne krogle in hiperkocke v n-dimenzionalnem prostoru

Če se držimo istega postopka kot pri prejšnjih dimenzijah imamo naprej kvader s stranicami dolžine 4 in središčem v koordinatnem izhodišču. Kvader razdelimo na 2^n majnših in vanje položimo enotske krogle s središči v $(\pm 1, \pm 1, ..., \pm 1)$, ki jih omejujejo sfere:

$$(x_1 \pm 1)^2 + (x_2 \pm 1)^2 + \cdots + (x_n \pm 1)^2 = 1$$

Polmer centralne krogle pa je

$$r = \sqrt{1 + 1 + \cdots + 1} - 1 = \sqrt{n} - 1$$

Centralna krogla ima v prostorih dimenzije $n \geq 5$ večji polmer kot ostale krogle. Še več, ko je $n = 9$ ima centralna krogla polmer 2, kar pomeni, da se dotika robov kvadra in vsake druge krogle. Za dimenzije $n \geq 10$ pa centralna krogla celo prestopi meje kvadra, kar pomeni, da se ne več v celoti nahaja v kvadru. To nam tudi pokaže, da se z višanjem dimenzij veča prostor med ostalimi kroglami.

Pri tem se vprašamo, kako je to mogoče. Odgovor bi bilo novo vprašanje, kako pa zgledajo sploh krogle v višjih dimenzijah. Do zaključka kako izgleda krogla v $\mathbb{R}^3$ pridemo s projekcijami na ravnino in tako dobimo kroge. Če v $\mathbb{R}^4$ naredimo projekcije na npr. kocko, pa dobimo kroglo.

Zanimivo bi bilo primerjati volumen centralne krogle z volumnom kvadra, ki je enak

$$V_{kvader} = 4^n$$

Formula za volumen $n-$dimnezionalne krogle s polmerom R se glasi:

$$V_n(R) = \frac{(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma((n+2)/2)} \cdot R^n$$

Iz tega sledi formula za volumen centralne krogle

$$V_{centralne} = \frac{(\sqrt{\pi})^n \cdot (\sqrt{n} - 1)^n}{\Gamma((n+2)/2)} \tag{1}$$

V formuli se pojavi Eulerjeva funkcija gama Γ, za katero veljajo naslednje lastnosti:

- $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{s-1} dt$
- $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)\ \forall s > 0$
- $\Gamma(s+1) = s!$ za $s \in \mathbb{N}$
- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Zato velja za $1 \leq k \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(k) = (k-1)!$$

in za lihe k, kjer $k \geq 3$

$$\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{(k-2)(k-4)\cdots 3 \cdot 1}{2^{(k-1)/2}} \sqrt{\pi} = \frac{(k-2)!\sqrt{\pi}}{2^{k-2}(\frac{k-3}{2})!}$$

Preverimo formulo za krogle v $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$:

$$V_{2D} = \frac{\pi \cdot (\sqrt{2} - 1)^2}{\Gamma(2)} = \pi \cdot (\sqrt{2} - 1)^2$$

$$V_{3D} = \frac{(\sqrt{\pi})^3 \cdot (\sqrt{3} - 1)^3}{\Gamma(5/2)} = \frac{4 \cdot \pi(\sqrt{3} - 1)^3}{3}$$

$$\Gamma(5/2) = \frac{3!\sqrt{\pi}}{2^3 \cdot 1!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{\pi}}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{\pi}$$

Razmerje med volumnom centralne krogle in kvadra je definirano kot:

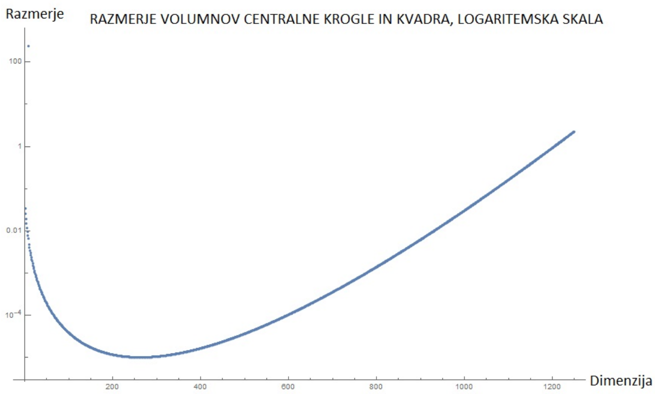
$$R_n = \frac{V_{centralna}}{V_{kvader}} = \frac{(\sqrt{\pi})^n \cdot (\sqrt{n} - 1)^n}{4^n \cdot \Gamma((n+2)/2)}$$

Sedaj lahko numerično izračunamo razmerja za poljubno dimenzijo prostora. V tabeli 1 so zbrani podatki za prvih 10 dimenzij.

Dimenzija	Razmerje R_n
1	0
2	0,0337
3	0,0257
4	0,0193
5	0,0148
6	0,0117
7	0,0094
8	0,0077
9	0,0064
10	0,0054

Tabela 1. Tabela dimenzij prostorov in razmerij volumnov centralne krogle in kvadra

Na prvi pogled se zdi, da se bo razmerje manjšalo proti 0, ko se bo dimenzija večala proti neskončno. Razmerje se res manjša proti 0, a le do dimenzije 264, ko je $R_{264} \cong 0,00001$. Od te dimenzije naprej pa se razmerje začne večati in v dimenziji 1206 celo preseže vrednost 1 (tabela 2). To se vidi na sliki 8, kjer je predstavljen graf z logaritemsko skalo, ki prikazuje razmerje volumnov centralne krogle in kvadra v odvisnosti od dimnezije. Podatke sem obdelala s programom Wolfram Mathematica.



Slika 8. Na sliki je enak graf, ki prikazuje razmerje volumnov centralne krogle in kvadra. Uporabljena je logaritemska skala za lažji vpogled v padanje in naraščanje vrednosti.

Na podlagi tabele 2 in grafov lahko zaslutimo, da se razmerje veča proti neskončno, ko se dimenzija prav tako veča proti neskončnosti. To se tudi zgodi.

Izrek 2. *Razmerje volumnov centralne krogle in kvadra gre preko vsake meje, ko gre dimenzija preko vsake meje.*

$$\lim_{n \to \infty} R_n = \infty$$

Dimenzija	Razmerje R_n $[10^{-5}]$	Dimenzija	Razmerje R_n
260	1,00086	1200	0,9090
261	1,00066	1201	0,9253
262	1,00051	1202	0,9420
263	1,00044	1203	0,9589
264	1,00043	1204	0,9761
265	1,00048	1205	0,9937
266	1,00060	1206	1,0116
267	1,00079	1207	1,0298
268	1,00104	1208	1,0483
269	1,00135	1209	1,0672

Tabela 2. Tabela dimenzij prostorov in razmerij volumnov centralne krogle in kvadra za dimenzije 260-269 in 1200-1209.

Dokaz. Imamo zaporedje pozitivnih realnih števil. Zanima nas ali to zaporedje konvergira ali divergira. Če zaporedje konvergira se razdalja med členi ko gre n proti neskončno manjša proti 0, saj v nasprotnem primeru ne moremo v vsaki, še tako majhni, okolici limite, najti neskončno členov zaporedja, kar pa je definicija limite in konvergence. Dejstvo je, da se razdalja med členi manjša proti 0, ko gre razmerje med $(n+1)-$tem in $n-$tem členom proti 1. Definirajmo sedaj novo zaporedje:

$$D_n = \frac{R_{n+1}}{R_n}$$

Pri zapisu tega zaporedja naletimo na težavo, ker v formuli za izračun volumna krogle nastopa Γ funkcija, ki pa ima drugačno formulo za lihe in sode n. Zato moramo definirati še dve zaporedji - l_n za lihe n in s_n za sode n.

$$l_n = \frac{R_{n+1}}{R_n} = \frac{(\sqrt{\pi})^{n+1} \cdot (\sqrt{n+1}-1)^{n+1}}{4^{n+1} \cdot \Gamma((n+1+2)/2)} \cdot \frac{4^n \cdot \Gamma((n+2)/2)}{(\sqrt{\pi})^n \cdot (\sqrt{n}-1)^n}$$

Ker je n liho število, je $n+3$ sodo in $n+2$ liho število. Zato:

$$\Gamma((n+3)/2) = (\frac{n+3}{2} - 1)! = (\frac{n+1}{2})!$$

$$\Gamma((n+2)/2) = \frac{n! \cdot \sqrt{\pi}}{2^n \cdot (\frac{n-1}{2})!}$$

Vse skupaj združimo in malce preuredimo ter dobimo:

$$l_n = \frac{\pi}{4} \cdot \Big(\frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n}-1}\Big)^n \cdot \frac{(\sqrt{n+1}-1) \cdot n!}{2^n \cdot (\frac{n-1}{2})! \cdot (\frac{n+1}{2})!}$$

Še drugo zaporedje, torej za soda števila :

$$s_n = \frac{R_{n+1}}{R_n} = \frac{(\sqrt{\pi})^{n+1} \cdot (\sqrt{n+1}-1)^{n+1}}{4^{n+1} \cdot \Gamma((n+1+2)/2)} \cdot \frac{4^n \cdot \Gamma((n+2)/2)}{(\sqrt{\pi})^n \cdot (\sqrt{n}-1)^n}$$

Ker je n sodo število, je $n+3$ liho in $n+2$ sodo število. Zato:

$$\Gamma((n+3)/2) = \frac{(n+1)! \cdot \sqrt{\pi}}{2^{n+1} \cdot (\frac{n}{2})!}$$

$$\Gamma((n+2)/2) = (\frac{n}{2})!$$

Vse združimo in preuredimo, da dobimo:

$$s_n = \frac{1}{2} \cdot \Big(\frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n}-1}\Big)^n \cdot \frac{(\sqrt{n+1}-1)\cdot\big(\frac{n}{2}\big)!\cdot\big(\frac{n}{2}\big)!\cdot 2^n}{(n+1)!}$$

Če želimo izračunati limito zaporedja števil in pokazati, da zaporedje razmerij divergira, moramo izračunati limiti $\lim_{n\to\infty} l_n$ in $\lim_{n\to\infty} s_n$, ki morata biti večji od 1. Iz pravil za računanje z limitami vemo, da je limita produkta enaka produktu limit, če le te obstajajo. Zato smo zaporedja razbili na produkte in sedaj izračunamo limito posameznega člena. Pričnimo s prvim nekonstantnim členom:

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n}-1}\Big)^n$$

Najprej to limito pretvorimo v naslednjo limito:

$$e^{\lim_{n\to\infty} \ln\big(\frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n}-1}\big)^n}$$

Zdaj računamo limito v eksponentu. Preoblikujemo jo v naslednjo limito in nato uporabimo L'Hospitalovo pravilo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\sqrt{n+1}-1)-\ln(\sqrt{n}-1)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2\cdot(n+1-\sqrt{n+1})}-\frac{1}{2\cdot(n-\sqrt{n})}}{-\frac{1}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\sqrt{n}-\sqrt{n+1})\cdot n^2}{2\cdot(n+1-\sqrt{n+1})\cdot(n-\sqrt{n})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\sqrt{n}-\sqrt{n+1})}{2} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{n}-\frac{\sqrt{n+1}}{n})\cdot(1-\frac{\sqrt{n}}{n})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\Big(1+\frac{n-n-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\Big)\cdot\frac{1}{(1+\frac{1}{n}-\frac{\sqrt{n+1}}{n})\cdot(1-\frac{\sqrt{n}}{n})} = \frac{1}{2}$$

Kar pomeni:

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n}-1}\Big)^n = \sqrt{e}$$

Sedaj moramo izračunati še dve limiti. Najprej limita drugega člena zaporedja s_n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-1)\cdot\big(\frac{n}{2}\big)!\cdot\big(\frac{n}{2}\big)!\cdot 2^n}{(n+1)!}$$

Pri tem pomaga Stirlingova formula, ki se glasi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{-n}} = 1$$

Torej je $n! \cong \sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{-n}$ za velike n. V limito, ki jo računamo, se vstavi naslednje približke:

$$(n+1)! \cong \sqrt{2\pi(n+1)}\cdot(n+1)^{n+1}\cdot e^{-n-1}$$

$$\Big(\frac{n}{2}\Big)! \cong \sqrt{\pi n}\cdot\Big(\frac{n}{2}\Big)^{\frac{n}{2}}\cdot e^{-\frac{n}{2}}$$

Ulomek v limiti še preoblikujemo, izpostavimo konstnatne člene in dobimo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-1)\cdot\big(\frac{n}{2}\big)!\cdot\big(\frac{n}{2}\big)!\cdot 2^n}{(n+1)!} = e\sqrt{\frac{\pi}{2}}\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n+1}\cdot\Big(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big)$$

Ponovno uporabimo lastnost limite produkta. Limita drugega člena je očitno 1. Limito prvega člena pa tudi velikokrat srečamo in vemo, da je enaka e^{-1}. Tako dobimo:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{e}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{e\pi}{8}}$$

Naposled še limita drugega člena zaporedja l_n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-1)\cdot n!}{2^n\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)!\cdot\left(\frac{n+1}{2}\right)!}$$

Uporabimo naslednje približke:

$$(\frac{n-1}{2})! \cong \sqrt{\pi(n-1)}\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\cdot e^{-\frac{n-1}{2}}$$

$$(\frac{n+1}{2})! \cong \sqrt{\pi(n+1)}\cdot\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot e^{-\frac{n+1}{2}}$$

Vrednost limite je enaka $\frac{\sqrt{2\pi}}{\pi}$. Vse člene združimo in dobimo:

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \frac{\pi}{4}\cdot\sqrt{e}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{\pi} = \sqrt{\frac{\pi e}{8}}$$

Ker sta limiti enaki in velja $\sqrt{\frac{\pi e}{8}} \cong 1,033$ lahko sklepamo, da ne obstaja okolica poljubne točke, ki bi vsebovala neskončno členov zaporedja. Kar pomeni, da R_n raste čez vse meje. Ker imamo pozitivne člene, pomeni, da gre razmerje volumnov preko vsake meje, ko gredo dimnezije preko vsake meje .

Dokaz izreka je prirejen po [1, str. 38-39].

Izrek ni presenetljiv glede na to da vemo, da v dimenzijah večjih od 10 centralna krogla prestopi meje kocke. Verjetno pa po izkušnjah iz $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$ ne bi naredili tega zaključa. Kaj pa se dogaja z volumnom enotskega kvadra in enotske krogle? Volumen kvadra v katerikoli dimenziji je enak 1. Po drugi strani bo pa volumen enotske sfere:

$$V_{es} = \frac{(\sqrt{\pi}))^n\cdot 1^n}{\Gamma((n+2)/2)}$$

$$V_{es} = \frac{(\sqrt{\pi})^n}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \quad \text{ko je } n \text{ sodo število in}$$

$$V_{es} = \frac{(\sqrt{\pi})^{n-1}\cdot 2^n}{n!}\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)! \quad \text{ko je } n \text{ liho število.}$$

Podobno kot prej, se tudi tukaj lahko dokaže, da se volumen enotske krogle manjša proti 0, ko gre n preko vsake meje. To velja tudi za vse polmere večje od 1, medtem ko gre volumen kvadra s dolžino stranic večjo od 1 preko vsake meje.

Ne smemo pa pozabiti na dejstvo, da centralna krogla od dimenzije 10 naprej ni v celoti vsebovana v kvadru, vendar pa se nikoli ne zgodi, da ne bi bila vsebovana v krogli, ki vsebuje cel kvader, saj je njen polmer enak $\sqrt{n}-1$, polmer očrtane krogle pa $2\sqrt{n}$.

5. Komunikacijski sistemi

Kot že omenjeno je najpomembnejša uporaba pakiranja krogel v komunikacijskih sistemih, katerih glavni cilj je doseči maksimalno zanesljivost in učinkovitost. Zanesljivost se zagotovi z minimalizacijo napak v komunikaciji, učinkovitost pa z minimalizacijo energije, ki je potrebna za prenos sporočila.

Besede in sporočila so pretvorjena v binarne kode. Vsaka beseda, torej vsaka koda, je le zaporedje različnih napetosti. Zato lahko vsako besedo predstavimo kot točko v $\mathbb{R}^n$. Zanesljivost dosežemo tako, da besede čim lažje ločimo. To lahko zagotovimo, če imajo podobne kode čim bolj različne koordinate. Problem nastane, ker nikoli nimamo čiste komunikacije, vedno bodo prisotni šumi. Recimo, imejmo signal, ki smo ga poslali. Označimo ga s S. Označimo z R sprejet signal. V matematičnem jeziku sta S in R točki v $\mathbb{R}^n$, ki pa sta različni zaradi šuma. Torej nam šum malce spremeni signal. Recimo, da na poti, po kateri potuje naš signal, šum tega spremeni za največ ϵ. To pomeni, da se točka R nahaja v krogli s središčem v S in polmerom ϵ.

Problem nastane, ko imamo dva zelo podobna signala, torej sta točki v $\mathbb{R}^n$ zelo blizu. V jeziku matematike bi to pomenilo, da se krogli s središči v S_1 in S_2 s polmerom ϵ sekata. Če v tem primeru šum povzroči, da se R nahaja v preseku krogel, ne moremo vedeti, ali je izvorni signal S_1 ali S_2. Če se želimo temu izogniti, morata biti podobna signala vsaj 2ϵ narazen.

Po drugi strani pa učinkovitost dosežemo z znižanjem energije, potrebne za prenos sporočila. Energija je sorazmerna z razdaljo med točko S (poslanim signalom) in točko R (prejetim signalom). Torej želimo, da so točke, ki predstavljajo signale, čim bližje skupaj in vsi signali skupaj v čim manjšem območju. To opisuje naš problem pakiranja krogel, kjer kode besed predstavljajo središča krogel, katerih radiji predstavljajo največji možni šum ϵ, najmanjša energija pa predstavlja najgostejše pakiranje le-teh [1, 6].

6. Zaključek

V članku smo spoznali problem, ki je zgled, da ne moremo vseh lastnosti, ki veljajo v nižjih dimenzijah, posplošiti na višje. Predstavili smo nekaj presenetljivih dejstev o volumnu krogle in kvadra, njunem razmerju ter komunikacijskih sistemih in kako zelo ti potrebujejo matematiko.

LITERATURA

[1] L. Grove in O. Yiparaki: *Contumacious Spheres*, The College Mathematics Journal, Vol. 31, No. 1 (2000), 35–41

[2] Slika 1, `https://en.wikipedia.org/wiki/Kepler_conjecture`, 5.03.2018

[3] J. Globevnik in M. Brojan, *Analiza I*, Matematični rokopisi, Ljubljana: DMFA-zalozništvo, 2010.

[4] Thomas C. Hales, *Historical Overwiew of the Kepler Conjecture*, Discrete & Computational Geometry (2006), 5–20.

[5] F. Pfender in G. Ziegler, *Kissing Numbers, Sphere Packings, and Some Unexpected Proofs*, Notices of the Ameican Mathematical Society (2004), 873–883.

[6] Lamb Evelyn, *Why You Should Care about High-Dimensional Sphere Packing*, Scientific American, 2016.