

DIFUZIJA NIČEL POLINOMOV

MILE VRBICA

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

V članku obravnavamo časovni razvoj ničel polinoma, če ga podvržemo difuzijski enačbi. Izpeljana bo dinamična enačba za ničle. Razloženi bodo trki med ničlami, kot tudi njihova dinamika v kompleksnem. Napovedi bodo primerjane z numeričnimi rezultati.

DIFFUSION OF POLYNOMIAL ROOTS

This article studies the behaviour of polynomial roots where its time evolution is governed by the diffusion equation. The dynamic equation for roots will be derived. Collisions of roots will be explained, as will be their dynamics in the complex domain. Theoretical predictions will be compared to numerical results.

1. Uvod

V tem članku obravnavamo časovni razvoj končnih polinomov z realnimi koeficienti, ki jih podvržemo difuzijski enačbi. Omejimo se na polinome ene spremenljivke. Zanima nas, kaj lahko povemo o dinamiki njegovih ničel. Skozi celoten članek predpostavljamo, da ima polinom vsaj nekaj ničel, saj so primeri z eno ali dvema ničloma trivialno rešljivi. Kjer to ne vzbuja dvoma, je za krajevni odvod uporabljena črtica, za časovnega pa pika.

Zaradi narave difuzijskega razvoja, ki v času gladi ekstreme funkcije, pričakujemo, da se bo število realnih ničel manjšalo ter da sode ničle ne bodo obstojne, saj so te ekstremi, katerim difuzijska enačba nenehno spreminja ekstremno vrednost. Za velike čase pričakujemo, da bodo lihi polinomi imeli eno realno ničlo, sodi pa nobene.

2. Časovni razvoj

Rešujemo difuzijsko enačbo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t). \quad (1)$$

Difuzijsko konstanto smo postavili na 1, saj ta predstavlja le razteg v kraju ali času¹. Preden se poglobimo v dinamiko ničel najprej pogledjmo časovni razvoj polinoma v splošnem. Polinom N -te stopnje lahko opišemo z $N + 1$ koeficienti ali N ničlami ter vodilnim koeficientom na naslednji način

$$p(x) = \sum_{i=0}^N c_i x^i = c_N \prod_{i=1}^N (x - x_i). \quad (2)$$

V difuzijsko enačbo stopimo z nastavkom in preidemo v matrični zapis.

$$p(x, t) = \sum_{i=0}^N c_i(t) x^i = \mathbf{c}(t)^T \mathbf{x} \quad (3)$$

¹Splošno difuzijsko enačbo $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = D \frac{\partial f}{\partial t}$, lahko z upeljavo novih spremenljivk $t' = \alpha t$ in $x' = \beta x$, prevedemo na $\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} = \frac{\partial f}{\partial t'}$, če velja $\beta^2/\alpha = D$.

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} c_0(t) \\ c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_N(t) \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^N \end{pmatrix} \quad (4)$$

Eksplicitno zapišemo drugi krajevni ter prvi časovni odvod polinoma.

$$\dot{p}(x, t) = \sum_{i=0}^N \dot{c}_i(t) x^i = \dot{\mathbf{c}}(t)^T \mathbf{x} \quad (5)$$

$$p''(x, t) = \sum_{i=0}^N (i+2)(i+1)c_{i+2}(t)x^i = (\mathbf{Dc}(t))^T \mathbf{x} \quad (6)$$

Tu smo vpeljali konstantno kvadratno matriko \mathbf{D} dimenzije $N+1$, ki ima neničelne člene le na drugi zgornji obdiagonalni. Matrike ter vektorje indeksiramo od 0 naprej.

$$\mathbf{D}_{ij} = \delta_{i+2,j}(i+2)(i+1) \quad (7)$$

Difuzijska enačba se torej glasi

$$(\mathbf{Dc}(t))^T \mathbf{x} = \dot{\mathbf{c}}(t)^T \mathbf{x}. \quad (8)$$

Ker enačba velja za vsak \mathbf{x} , lahko zapišemo

$$\mathbf{Dc}(t) = \dot{\mathbf{c}}. \quad (9)$$

Rešitev enačbe je

$$\mathbf{c}(t) = e^{t\mathbf{D}}\mathbf{c}(0). \quad (10)$$

Pridobili smo ekspliciten časovni razvoj, kar nam poda implicitno enačbo za ničle ob poljubnem času

$$(e^{t\mathbf{D}}\mathbf{c}(0))^T \mathbf{x} = 0. \quad (11)$$

Matrika \mathbf{D} je realna, kar pomeni, da bodo vsi koeficienti ob vsakem času realni, če so bili na začetku realni. Poleg tega je matrika \mathbf{D} nilpotentna. Ni težko preveriti, da velja

$$\mathbf{D}^{\lceil \frac{N+1}{2} \rceil} = 0, \quad (12)$$

kjer oglati oklepaji pomenijo zaokrožitev na celo število navzdol. Ta lastnost olajša izračun eksponenta te matrike. Direktna posledica lastnosti eksponenta matrike \mathbf{D} je ta, da sta c_N in c_{N-1} konstantna v času, kar pomeni, da se število ničel ohranja. Tega ne bomo dokazovali.

3. Izpeljava dinamike ničel

Do sedaj pridobljeni rezultati nam ne povejo veliko o dinamiki ničel, zato pojdimo sedaj iz slike koeficientov v sliko ničel. Najprej si pogledjmo dinamiko ničel za splošno dovolj gladko funkcijo $f(x, t)$. Označimo izbrano ničlo z $x_i(t)$. Po definiciji ničle velja

$$f(x_i(t), t) = 0. \quad (13)$$

Izvedemo totalni odvod po času ter uporabimo difuzijsko enačbo za menjavo med časovnim in drugim krajevnim odvodom

$$\frac{d}{dt}f(x_i(t), t) = \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x}(x_i(t), t) + \frac{\partial f}{\partial t}(x_i(t), t) = 0, \quad (14)$$

$$f'(x_i)\dot{x}_i + \dot{f}(x_i) = f'(x_i)\dot{x}_i + f''(x_i), \quad (15)$$

$$\boxed{\dot{x}_i = -\frac{f''(x_i)}{f'(x_i)}}. \quad (16)$$

Pridobili smo popolnoma splošen rezultat, ki velja ob vsakem času za poljubno dvakrat odvedljivo funkcijo in je odvisen samo od krajevnih odvodov. V primeru holomorfne funkcije velja tudi za kompleksne ničle. Vidimo, da v primeru neničelnega števca hitrost ničle divergira, če je tam tudi ničla krajevnega odvoda. V primeru ničle neprvega reda (torej ničle, pri kateri je prvi odvod ničeln) torej pričakujemo burno obnašanje. Omenimo tudi, da enačba 16 ne velja zgolj za ničle, ampak tudi za poljubne nivojnice, saj difuzijska enačba ne čuti konstante.

Pojdimo sedaj v svet polinomov. Vpeljemo oznako $p_i(x)$ za polinom stopnje $N - 1$ definiran kot

$$(x - x_i)p_i(x) = p(x). \quad (17)$$

Izrazimo prvi in drugi odvod polinoma v obliki 17.

$$p'(x) = (x - x_i)p'_i(x) + p_i(x) \quad (18)$$

$$p''(x) = (x - x_i)p''_i(x) + 2p'_i(x) \quad (19)$$

Izvednotimo odvoda v točki x_i in ju vstavimo v enačbo 16.

$$\dot{x}_i = -2\frac{p'_i(x_i)}{p_i(x_i)} \quad (20)$$

Predvsem nas zanima dinamika ničel z ozirom na ostale ničle, zato razpišemo p_i v faktorizirani obliki ter ga odvajamo. Za vsako vsoto in produkt razumemo, da brez dodatnih pogojev indeks teče od 1 do N .

$$p_i(x) = c_N \prod_{j \neq i} (x - x_j) \quad (21)$$

$$p'_i(x) = c_N \sum_{k \neq i} \prod_{j \neq i, k} (x - x_j) \quad (22)$$

Izvednotimo oba izraza pri x_i in ju vstavimo v enačbo 20.

$$\dot{x}_i = -2 \sum_{k \neq i} \frac{\prod_{j \neq i, k} (x_i - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} \quad (23)$$

Izraz poenostavimo in dobimo končno enačbo za dinamiko ničel

$$\boxed{\dot{x}_i = \sum_{j \neq i} \frac{2}{x_j - x_i}}. \quad (24)$$

Do istega rezultata bi seveda prišli, če bi z nastavkom 17 šli v difuzijsko enačbo.

4. Obnašanje ničel

Sistem enačb 24, ki opisuje obnašanje ničel (ali katerih koli drugih nivojnic), je sistem nelinearnih navadnih diferencialnih enačb prvega reda, k v splošnem nima rešitve z elementarnimi funkcijami. Kljub temu lahko o dinamiki veliko povemo.

Najpomembnejša opazka je, da se realne ničle privlačijo. Bližje ko sta dve ničli, bolj se privlačita. Posledično se bo skrajna leva ničla vedno gibala proti desni, skrajna desna pa vedno proti levi.

Očitno je, da bodo ničle posledično trkale med sabo. Pričakujemo, da se bosta dve ničli po trku preselili v kompleksno domeno, saj pričakujemo, da se število realnih ničel manjša.

Druga pomembna posledica je, da se vsota ničel vselej ohranja, saj se členi v vsotah tipa 24 pokrajšajo. Torej

$$\sum_i \dot{x}_i(t) = 0. \tag{25}$$

4.1 Trki ničel

Pogledali si bomo primer trka dveh ničel. Trkov, ki hkrati vključujejo več ničel ne bomo obravnavali, saj so taki trki zelo redki, principi pa zelo podobni.

Obravnavajmo dve sosednji realni ničli, $x_k < x_{k+1}$, ki sta dovolj blizu skupaj, da bosta sigurno trčili (torej, da jima privlak ostalih ničel ne bo spremenil smeri gibanja). Vpeljemo količino $\epsilon(t)$, tako da velja

$$x_{k+1}(t) = x_k(t) + \epsilon(t). \tag{26}$$

Izračunajmo časovni razvoj ϵ , tako da izračunamo časovni razvoj razlike $x_{k+1} - x_k$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{k+1} - \dot{x}_k &= \dot{\epsilon} = \sum_{j \neq k+1} \frac{2}{x_j - x_{k+1}} - \sum_{j \neq k} \frac{2}{x_j - x_k} = \\ &= \left(\sum_{j \neq k, k+1} \frac{2}{x_j - x_{k+1}} \right) + \frac{2}{x_k - x_{k+1}} - \left(\sum_{j \neq k, k+1} \frac{2}{x_j - x_k} \right) - \frac{2}{x_{k+1} - x_k} = \\ &= \left(\sum_{j \neq k, k+1} \frac{2}{x_j - x_k - \epsilon} \right) - \left(\sum_{j \neq k, k+1} \frac{2}{x_j - x_k} \right) - \frac{4}{x_{k+1} - x_k} = \\ &= \left(\sum_{j \neq k, k+1} \frac{2}{x_j - x_k} \right) + \mathcal{O}(\epsilon) - \left(\sum_{j \neq k, k+1} \frac{2}{x_j - x_k} \right) - \frac{4}{\epsilon} = -\frac{4}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned}$$

Najprej smo razpisali vsoti tako, da tečeta po istih indeksih nato smo pa razvili za majhen ϵ , saj gre ta ob trku prito 0. Ker prvi člen za male epsilone divergira, linearnega zanemarimo in dobimo diferencialno enačbo za ϵ

$$\dot{\epsilon} = -\frac{4}{\epsilon}. \tag{27}$$

Rešitev enačbe je

$$\epsilon = \sqrt{8(\tau - t)}, \tag{28}$$

kjer τ predstavlja trenutek trka. Za $t < \tau$ je ϵ realen, kar se sklada s tem da sta na začetku obe ničli na realni osi. Za $t > \tau$ je razlika med ničloma imaginarna, kar pomeni, da sta ničli druga drugi konjugirani ter živita v kompleksni domeni. Ob trku odvod ničel po času divergira (saj divergira odvod njune razlike), kar pomeni, da ničli sunkovito trčita v realni domeni in potem eksplodirata vsaka sebi v imaginarno smer. Omenimo, da so ničle višjih redov ekvivalentne ničlam v trenutku trka, zato ne morejo obstajati končno časa.

4.2 Dinamika ničel v kompleksnem

Poskusimo bolje razumeti obnašanje ničel v kompleksni ravnini. Najprej si pogledajmo dve identiteti.

$$\operatorname{Re} \frac{1}{a - b} = \frac{\operatorname{Re}(a - b)}{|a - b|^2} = \frac{\operatorname{Re}(a - b)}{\operatorname{Re}^2(a - b) + \operatorname{Im}^2(a - b)} \tag{29}$$

$$\operatorname{Im} \frac{1}{a - b} = -\frac{\operatorname{Im}(a - b)}{|a - b|^2} = -\frac{\operatorname{Im}(a - b)}{\operatorname{Re}^2(a - b) + \operatorname{Im}^2(a - b)} \tag{30}$$

Uporabimo omenjeni identiteti na enačbi 24 in dobimo izraza za časovni razvoj imaginarnega ter realnega dela ničle posebej.

$$\operatorname{Re} \dot{x}_i = \sum_{j \neq i} 2 \frac{\operatorname{Re}(x_j - x_i)}{\operatorname{Re}^2(x_j - x_i) + \operatorname{Im}^2(x_j - x_i)} \quad (31)$$

$$\operatorname{Im} \dot{x}_i = - \sum_{j \neq i} 2 \frac{\operatorname{Im}(x_j - x_i)}{\operatorname{Re}^2(x_j - x_i) + \operatorname{Im}^2(x_j - x_i)} \quad (32)$$

Opazimo, da se realni deli ničel vedno privlačijo, njihov privlak pa lahko zaduši velika razdalja v imaginarni smeri. Nasprotno pa velja za imaginarni del – pridelali smo minus, zaradi katerega se imaginarni deli ničel odbijajo, jakost njihovega odboja je pa zadušena z njihovo razdaljo v realni smeri. Posledično se ničli z največjim in najmanjšim realnim delom v realni smeri približujeta, ničla z največjim imaginarnim delom se pa vedno oddaljuje od realne osi. Ker ima vsaka kompleksna ničla odbija svojo konjugirano ničlo mirovanje kompleksnih ničel v imaginarni smeri ni mogoče. Zaradi privlaka sklepamo, da realni deli vseh ničel konvergirajo k skupni točki. Zaradi paroma konjugiranih ničel velja

$$\sum_i x_i = \sum_i \operatorname{Re} x_i. \quad (33)$$

Po dolgem času se realni deli vseh ničel bližajo neki asimptotski vrednosti x_∞ , zato lahko zapišemo

$$\sum_i \operatorname{Re} x_i = N x_\infty. \quad (34)$$

Hkrati pa poznamo vsoto vseh ničel iz začetnih pogojev, saj je ta konstantna. Iz znanega izluščimo x_∞ , ki je kar težišče vseh ničel

$$x_\infty = \frac{1}{N} \sum_i x_i(0). \quad (35)$$

Ker se razlike realnih delov ničel manjšajo, lahko zapišemo obnašanje imaginarnega dela ničel po dolgem času, ko lahko privzamemo da so vsi realni deli ničel dovolj blizu asimptotske vrednosti.

$$|\operatorname{Re}(x_j - x_i)| \rightarrow 0 \quad \forall i, j \quad (36)$$

$$\operatorname{Im} \dot{x}_i = - \sum_{j \neq i} \frac{2}{\operatorname{Im}(x_j - x_i)} \quad (37)$$

Opazimo, da je enačba zelo podobna kot za ničle, ki se gibljejo zgolj po realni osi, le da se tukaj ničle odbijajo.

Omenimo še trke ničel v kompleksnem. Zaradi odboja v imaginarni smeri v navadnih pogojih do trkov v kompleksnem ne pride. Vseeno pa obstajajo primeri, kjer lahko ničle prisilimo, da trčijo tudi ob neničelnem imaginarnem delu. Zgled so polinomi, ki so sode ali lihe funkcije. Taki polinomi ohranjajo svojo simetrijo. Posledica tega je, da bosta imaginarna dela zrcalnih ničel vedno enaka. Po enačbi 32 je odboj med imaginarnima deloma takih ničel ničelen, realna dela se pa še vedno privlačita. Dinamiko njunega trka obravnavamo enako, kot smo pri realnih ničlah, ter ugotovimo, da spet trčita korensko in se razletita vsaka sebi v imaginarni smeri.

Sedaj si lahko že kar dobro predstavljamo gibanje ničel v kompleksni ravnini. Najprej so vse ničle na realni osi, nato zaradi privlaka začnejo trkati tako, da je njihovo težišče pri miru. Ob trkih se ničle sunkovito odbijejo v imaginarni smeri. Realni deli ničel se v povprečju približujejo težišču vseh ničel, imaginarni deli se pa odbijajo. Po dolgem času imajo vse ničle približno enak realni del, njihov imaginaren del se pa po absolutni vrednosti narašča v neskončnost. Polinomi lihe stopnje obdržijo eno ničlo v realnem, polinomi sode stopnje pa nobene.

4.3 Vsota kvadratov ničel

Zanimiva lastnost difuzije ničel pri polinomih je tudi ta, da se vsota njihovih kvadratov spreminja linearno s časom. Da dokažemo to trditev najprej navedimo naslednjo identiteto

$$\frac{b}{a-b} + \frac{a}{b-a} = -1. \quad (38)$$

V naslednjem koraku pomnožimo enačbo 24 z x_i

$$\dot{x}_i x_i = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} x_i^2 = \sum_{j \neq i} \frac{2x_i}{x_j - x_i}. \quad (39)$$

Seštejemo izraz 39 po vseh ničlah, ga množimo z 2 ter nekoliko preoblikujemo

$$\frac{d}{dt} \sum_i x_i^2 = 4 \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{x_i}{x_j - x_i} = 4 \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} \frac{x_i}{x_j - x_i} + \frac{x_j}{x_i - x_j}. \quad (40)$$

Uporabimo identiteto 38 in pridemo do izraza

$$\frac{d}{dt} \sum_i x_i^2 = -4 \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} 1. \quad (41)$$

Da dobimo točno vrednost vsote jo razpišimo z vsemi potrebnimi indeksi

$$\sum_{\substack{i,j \\ i < j}} 1 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} 1 = \sum_{i=1}^N i - 1 = \frac{N(N+1)}{2} - N = \frac{N(N-1)}{2}. \quad (42)$$

Uporabimo dobljen rezultat za končno formulo odvoda vsote kvadratov

$$\sum_i \frac{d}{dt} x_i^2 = -2N(N-1). \quad (43)$$

Upoštevamo začetne pogoje in zapišemo časovno odvisnost vsote kvadratov ničel

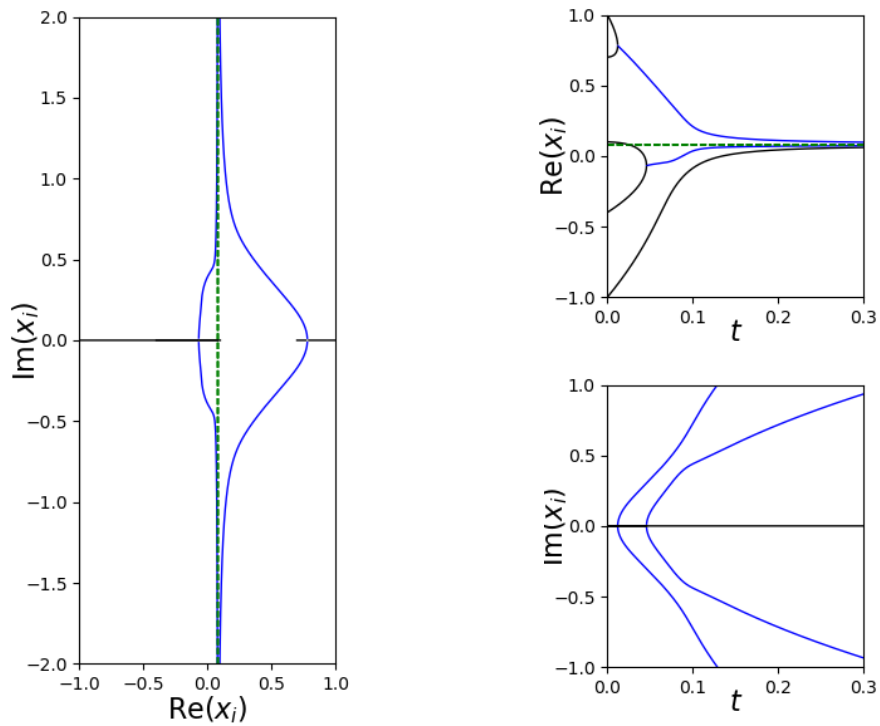
$$\sum_i x_i^2(t) = -2N(N-1)t + \sum_i x_i^2(0). \quad (44)$$

Vsota kvadratov ničel je sprva seveda pozitivna, saj so vse ničle na realni osi, nato pa linearno pada in je slej ko prej negativna, saj ničle postanejo kompleksne in se oddaljujejo od realne osi. Omenimo še, da numerične simulacije kažejo, da se vsota kubov ničel tudi spreminja linearno s časom, vendar tega ne bomo dokazovali.

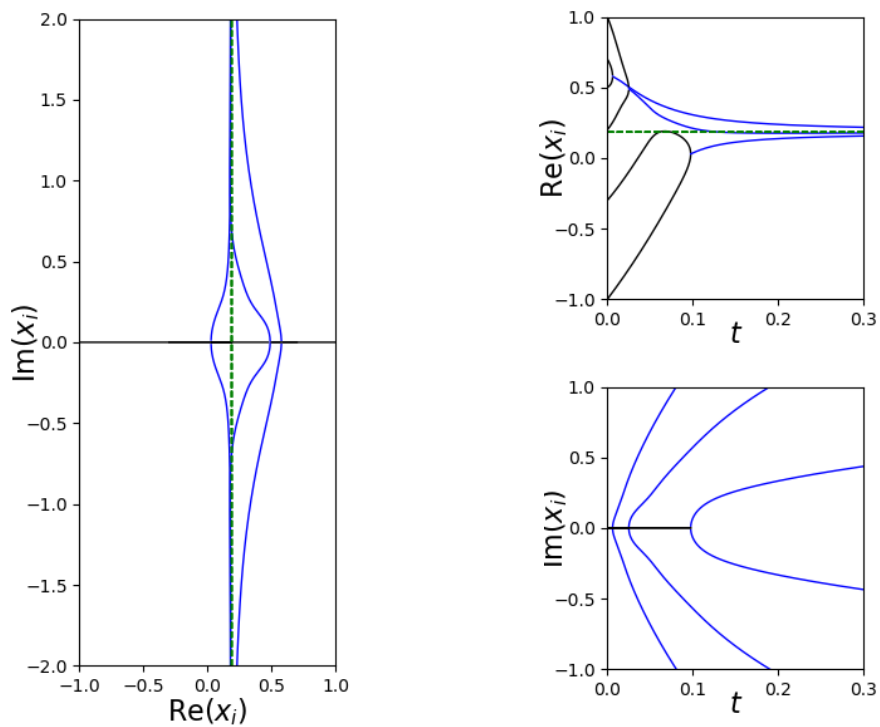
5. Numerična simulacija

V tem poglavju bomo pogledali dejansko dinamiko ničel nekaterih polinomov. Brez izgube splošnosti bomo za robni ničli vedno izbrali $x_0 = -1$ in $x_N = 1$, ostale ničle pa bomo namestili v interval $(-1, 1)$. Časovni razvoj polinomov je izračunan po enačbi 10, kar zagotavlja časovno stabilnost in robustnost na izbiro časovnega koraka.

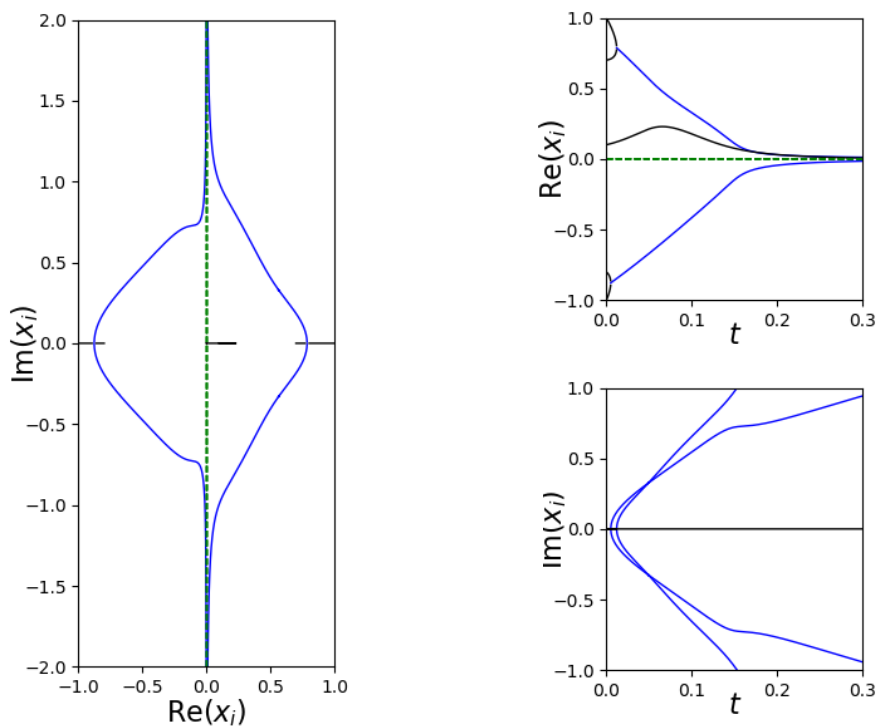
Pri vsakem primeru si bomo pogledali posebej realne ter imaginarne dele ničel v odvisnosti od časa ter trajektorijo ničel v kompleksni ravnini. Na grafih realnega dela črna barva vedno predstavlja realno ničlo, modra pa realni del kompleksne ničle. Na ostalih grafih modra barva predstavlja kompleksne ničle.



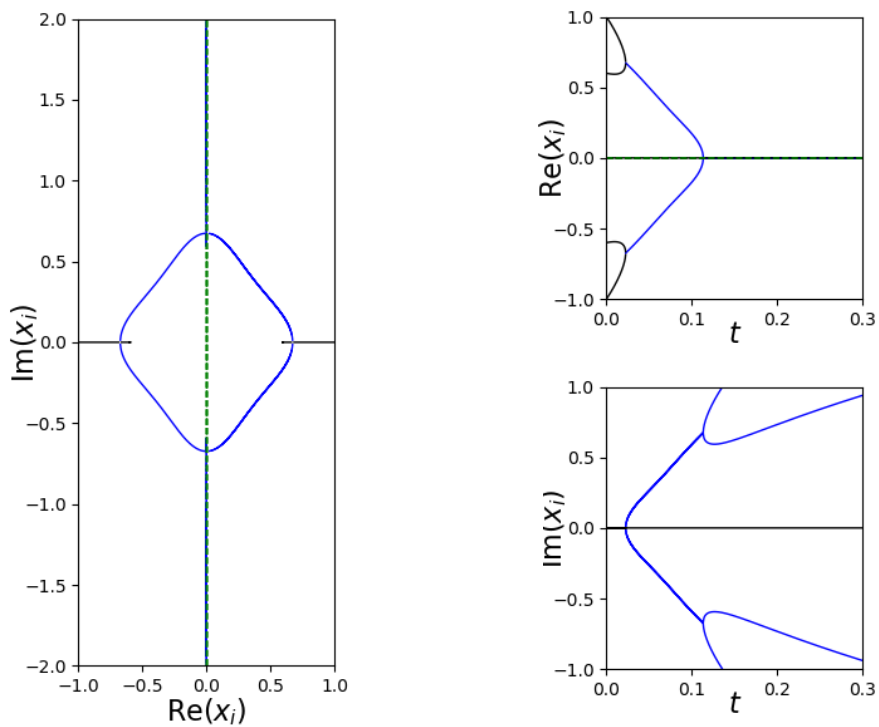
Slika 1. Tipičen primer dinamike ničel polinoma pete stopnje. Opazimo korenške trke, asimptotiko realnih delov ter odboj imaginarnih delov. Vidimo, da ena ničla vedno ostane realna, kar je posledica lihosti polinoma. Pomembna opazka pri tem primeru je, da ničla ki ima največji ali najmanjši realni del ni nujno realna.



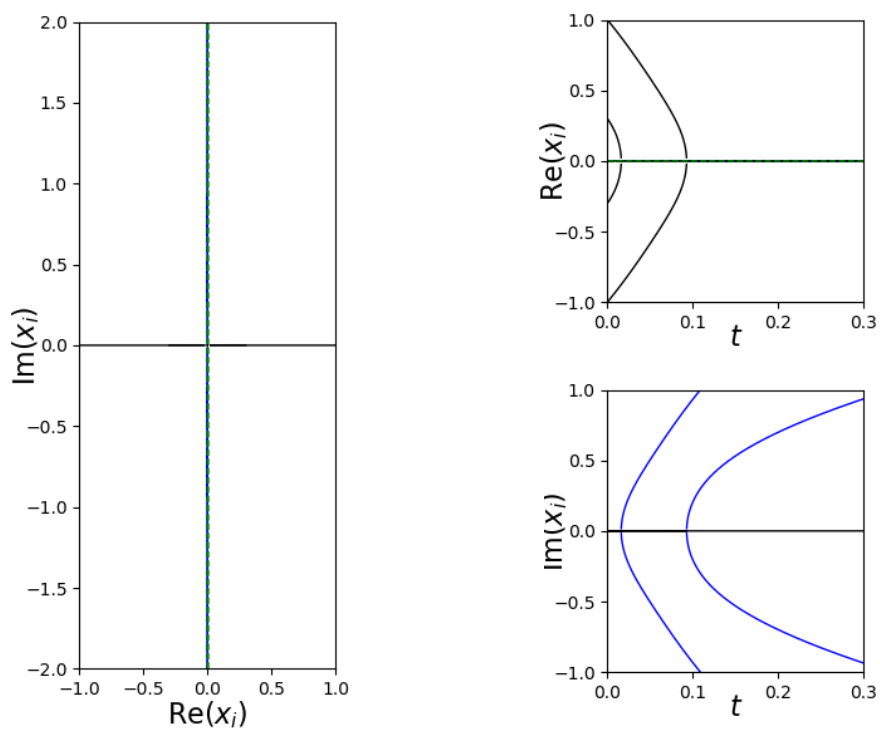
Slika 2. Primer dinamike ničel polinoma šeste stopnje. Vidimo, da vse ničle padejo v kompleksno.



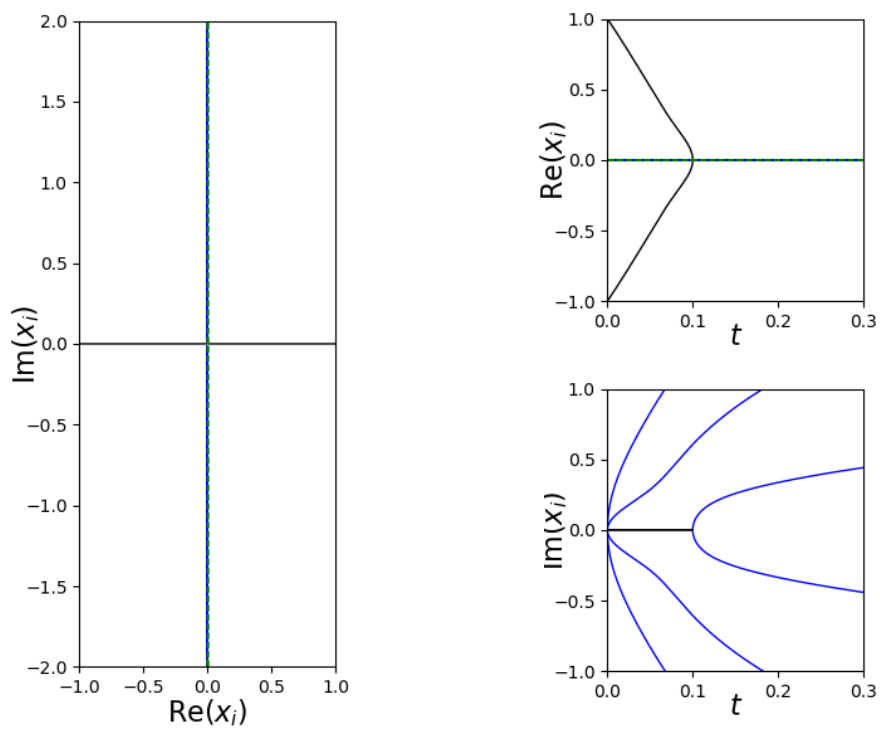
Slika 3. Še en primer polinoma pete stopnje. Opazimo, da se trajektorije niso zelo gladke in se lahko obnašajo sunkovito in nepredvidljivo.



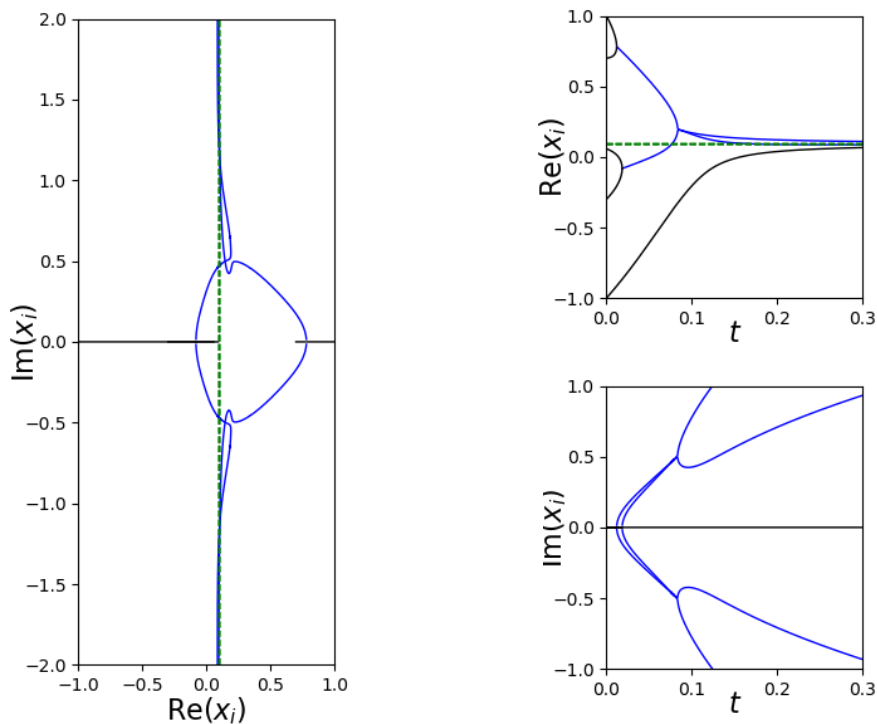
Slika 4. Ob tem popolnoma simetričnem zgledu smo priča trkom ničel v kompleksnem. Hitro opazimo, da imajo trki enako korensko naravo kot trki v realnem.



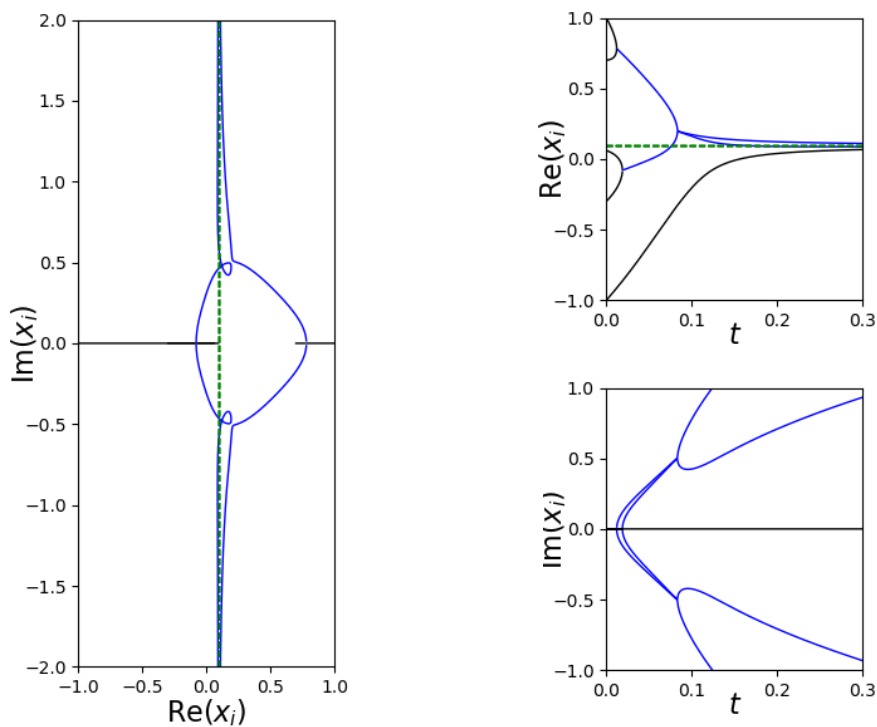
Slika 5. Ta zgled je skoraj identičen kot zgled 4, le da sta notranji ničli dovolj blizu ničle pri $x = 0$, da ju začne vleči proti sredini namesto navzven.



Slika 6. Tukaj lahko vidimo eksplozijo ničle četrte stopnje pri $x = 0$. Vidimo, da iz trka dobimo ven dva para konjugiranih ničel, ki se odbijata v imaginarni smeri.



Slika 7. Pri tem nekoliko bolj zanimivem zgledu lahko opazujemo sunkovito obnašanje skorajšnjega trka ničel. Trajektorije so sila nepredvidljive, iz grafov realnega in imaginarnega dela pa lahko vidimo, da je dinamika skrajno podobna dinamiki trka v kompleksnem.



Slika 8. Ta zgled je enak kot zgled 7, le da ima za 0.02 zvišano srednjo ničlo. Vidimo, da se trajektorije sedaj ne sekajo več, ter da ena trajektorija naredi zanko. Obnašanje trajektorij malo stran od trka je skoraj enako kot prej, le da se po skorajšnjem trku vlogi ničel zamenjata.

6. Zaključek

Uspešno smo izpeljali dinamično enačbo za ničle pri difuziji. Teoretična napoved se ujema z numeričnimi rezultati. Kljub temu, da rešitve niso izražljive z elementarnimi funkcijami, smo lahko uspešno napovedali dinamiko trkov ter asimptotiko. Kot smo videli na koncu, je dinamika lahko precej nepredvidljiva ter sunkovita.

LITERATURA

- [1] T. Tao, *Heat flow and zeroes of polynomials* (2017), dostopno na <https://terrytao.wordpress.com/2017/10/17/heat-flow-and-zeroes-of-polynomials/> (avgust 2019)