

# KVANTNI SIMULATORJI

JAKA PELAIČ

Fakulteta za matematiko in fiziko  
Univerza v Ljubljani

Cilj članka je pregled področja kvantne simulacije. Najprej je predstavljena njegova zgodovinska in praktična motivacija, nato pa sta podana kratek uvod v sestavljene kvantne sisteme in preprosta opredelitev kvantnega računalništva. Opisani sta glavni paradigmi kvantne simulacije, namreč digitalna (DQS) in analogna (AQS), nekaj pa je povedanega tudi o učinkovitosti takih simulatorjev in o fundamentalnem problemu dekoherence, ki omejuje njihove praktične realizacije. Podanih je nekaj primerov slednjih, skupaj z morebitnimi slabostmi ali prednostmi, za konec pa so predstavljeni še obeti za praktično uporabo te tehnologije.

## QUANTUM SIMULATORS

The aim of this article is to provide an overview of the field of quantum simulation. Its historical and practical motivations are first given, followed by a short introduction to composite quantum systems and a basic outline of quantum computation. The two major paradigms of quantum simulation, *id est* digital (DQS) and analogue (AQS), are described. The efficiency of such simulators and the fundamental problem of decoherence which plagues all practical realisations are then commented on; some examples of such realisations are given along with their possible advantages and shortcomings. The seminar concludes with future expectations for practical implementations of this technology.

### 1. Uvod

V drugi polovici 20. stoletja je postalo jasno, da je simuliranje kvantnomehanskih procesov na klasičnih računalnikih zelo težko opravilo. Kot bomo videli, dimenzija Hilbertovega prostora narašča eksponentno s številom delcev (ali bolj splošno podsistemov) - že da shranimo komponente vektorja sistema s 40 spini, potrebujemo okoli 4 TB.

Feynman je že leta 1982 predlagal izdelavo nove vrste računalnika, ki naj bi temeljil na kvantnomehanskih načelih. To je univerzalni kvantni računalnik, za katerega je bilo čez dobro desetletje pokazano, da lahko deluje tudi kot naprava za simuliranje poljubnih sistemov. Vendar pa so lahko taki kvantni simulatorji tudi bolj preproste in omejene naprave, specializirane za opravljanje določenih nalog. Pričakuje se, da bodo ti postali praktični pred univerzalnimi računalniki.

Motivacija za to področje, ki se zadnja leta burno razvija, je večlična: po eni strani razvoj simulatorjev omogoča preučevanje do sedaj nedostopnih eksperimentalnih domen, po drugi pa služi tudi kot odskočna deska in testna podlaga za razvoj pravih kvantnih računalnikov. Ravno v zadnjih letih pa smo videli prve primere kvantnih simulatorjev, ki so blizu temu, da se uspešno kosajo z najboljšimi klasičnimi pristopi.

### 2. Sestavljeni sistemi

Sestavljeni kvantni sistemi so tisti, v katerih prepoznamo interno strukturo, namreč več posamičnih sistemov, do katerih lahko posebej dostopamo.

*Postulat:* Stanja sestavljenega kvantnega sistema  $S^{AB\dots}$  so vektorji (bolj natančno enodimenzionalni podprostori) v pridruženem Hilbertovem prostoru, ki je tenzorski produkt Hilbertovih prostorov podsistemov  $S^A, S^B\dots$

$$H^{AB\dots} = H^A \otimes H^B \otimes \dots \quad (1)$$

Fundamentalne relacije tenzorskega produkta so

$$\Psi^A \otimes (\Psi^B + \Phi^B) = \Psi^A \otimes \Psi^B + \Psi^A \otimes \Phi^B \quad (2)$$

$$(\Psi^A + \Phi^A) \otimes \Psi^B = \Psi^A \otimes \Psi^B + \Phi^A \otimes \Psi^B \quad (3)$$

$$(\alpha\Psi^A) \otimes \Psi^B = \Psi^A \otimes (\alpha\Psi^B) = \alpha(\Psi^A \otimes \Psi^B) \quad (4)$$

Tenzorski produkt operatorjev iz posamičnih prostorov je definiran na očiten način

$$(O^A \otimes O^B \otimes \dots)(\Psi^A \otimes \Psi^B \otimes \dots) = O^A\Psi^A \otimes O^B\Psi^B \otimes \dots \quad (5)$$

in je linearno razširjen na prepletena stanja (t.j. stanja, ki se ne dajo zapisati kot en sam tenzorski produkt, npr.  $|00\rangle + |11\rangle$ ).

Druga možnost za sestavljanje sistemov bi bila direktna vsota  $\oplus$ . Vendar ima nenavadne lastnosti: če je  $|\Psi\rangle$  lastni vektor operatorja  $M$  v  $S^A$ , pa stanje  $|\Psi\rangle \oplus |\Phi\rangle$  ni več nujno lastno stanje operatorja  $M \oplus \text{Id}$

$$(M \oplus \text{Id})(|\Psi\rangle \oplus |\Phi\rangle) = (M|\Psi\rangle) \oplus |\Phi\rangle = (\lambda|\Psi\rangle) \oplus |\Phi\rangle \neq \lambda(|\Psi\rangle \oplus |\Phi\rangle) \quad (6)$$

Izkaže se, da tenzorski produkt zadosti eksperimentalnim izidom in da ima pričakovane lastnosti, s čimer utemeljimo zgornji postulat.

### 3. Kvantni računalniki

Kvantno računalništvo v osnovi pomeni, da vzamemo neko stanje  $|\Psi\rangle$ , na njem kontrolirano izvedemo neko unitarno evolucijo  $U$  in z meritvijo iz nastalega stanja  $U|\Psi\rangle$  odberemo neko informacijo bodisi o  $|\Psi\rangle$  bodisi o  $U$ . Podobno kot klasične računalnike lahko modeliramo v obliki vezja, ki deluje na enicah in ničlah, ki jim pravimo biti, kvantne računalnike predstavimo z naborom kubitov, t.j. dvodimenzionalnih kvantnih sistemov. Unitarne operacije in meritve torej izvajamo na stanjih prostora  $H_2^{\otimes n} = H_2 \otimes H_2 \otimes \dots$ . Bazna stanja sestavljenega sistema ponavadi zapišemo kot  $|1001\dots 011\rangle$  ali pa kar kot  $|m\rangle$ , npr.  $|101\rangle = |5\rangle$ . Tem stanjem pravimo računski (*angl.* „computational“) baza.

Moč kvantnih računalnikov se skriva v dejstvu, da zaradi superpozicije v nekem smislu lahko izvajamo operacije hkrati na več baznih stanjih. Vzemimo najpreprostejši zgled [1]: imejmo funkcijo  $f: \{0, 1\}^m \rightarrow \{0, 1\}^n$  in unitarno operacijo  $U_f$ , ki implementira akcijo  $f$  na sistemu  $H_2^{\otimes(m+n)}$

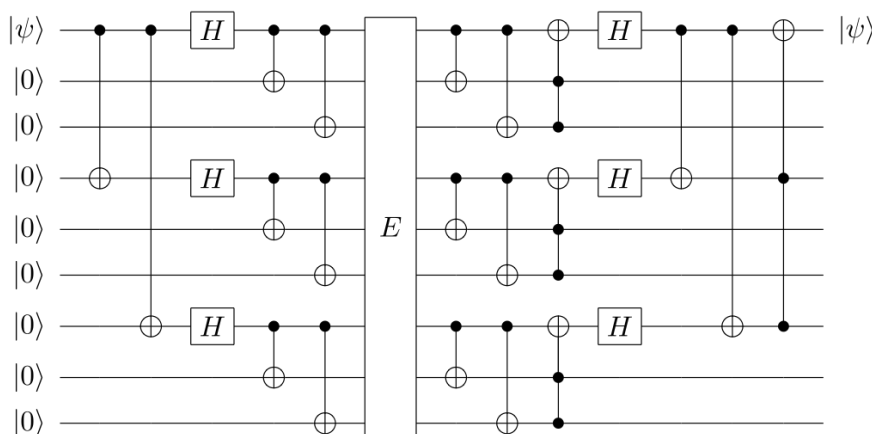
$$U_f|x, 0^n\rangle = |x, f(x)\rangle; x \in \{0, \dots, d-1\}; d = 2^m \quad (7)$$

Potem lahko  $f$  hkrati iz vrednotimo na celotni domeni

$$U_f \left( \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{x=0}^{d-1} |x, 0^n\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{x=0}^{d-1} |x, f(x)\rangle \quad (8)$$

Seveda nam to še ne pomaga kaj dosti, saj je  $f(x)$  zakopana v superpoziciji stanj, stanja pa lahko preberemo le prek meritev. Glavna naloga sestavljanja kvantnih algoritmov je zato iskanje načinov, kako ojačati amplitudo natanko tistih stanj, ki vsebujejo zanimivo informacijo ali odgovor na vprašanje. V kriptografiji in podatkovni znanosti obstajajo kvantni algoritmi, ki so bistveno (celo eksponentno) hitrejši od standardnih; nekateri so hitrejši, kot pa je zgornja meja hitrosti za klasične algoritme za isti problem, torej so v nekaterih primerih univerzalni kvantni računalniki res striktno boljši od klasičnih.

## Kvantni simulatorji



**Slika 1.** Primer kvantnega vezja. Kvantna vezja so zelo priljubljen način prikazovanja delovanja kvantnih računalnikov; keti na levi so register, vsaka vodoravna črta pa ustreza enemu kubit. V vezju vidimo več kvantnih vrat, ki so ponavadi narisana kot škatlice ali kot vertikalne črte z oznakami, predstavljajo pa unitarne kvantne operacije. [13]

### 3.1 Kvantna vrata

Da imamo dostop do polnega potenciala kvantnih računalnikov, moramo biti zmožni na registru izvesti poljubno unitarno transformacijo. Izkaže se, da je možno poljuben  $U$  zapisati kot produkt  $V_i$ , ki posamično delujejo le na dveh ali manj kubitih (podsystemih). Vsako tako „dvonivojsko“ transformacijo se nadalje da razstaviti v zaporedje dvokubitnih vrat CNOT in enokubitnih unitarnih vrat.

To pa še ni vse: obstajajo dokaj robustne implementacije vrat CNOT, česar ne moremo trditi za poljubne unitarne enokubitne, ki tvorijo kontinuum. K sreči nam teorem Solovaya in Kitaeva zagotovi, da se v neki matrični normi da taka vrata aproksimirati z majhnim naborom „enostavnih“ vrat (npr. Hadamardova, fazna in  $\pi/8$ ) dokaj hitro: če naj bo razdalja med dejanskimi vrati in približkom v normi pod  $\epsilon$ , nam ta teorem zagotovi, da se to da storiti z  $O((\log(1/\epsilon))^c)$  vrati, kjer je  $c \approx 2$ .

Vse to za sistem z  $N$  kubit in ob zahtevani natančnosti  $\epsilon$  zahteva velikost vezja  $O(N^2 4^N (\log(1/\epsilon))^c)$ , kar je veliko, pa vendar blizu optimalnega, saj dejansko obstajajo družine transformacij, ki zahtevajo najmanj eksponentno število vrat. En cilj sestavljanja kvantnih algoritmov je torej gotovo, kako implementirati operacije čim bolj učinkovito, kar je pogosto zapleten problem.

## 4. Kvantni simulatorji

Kot smo že povedali, so kvantni simulatorji naprave, ki so specializirane za simulacijo določenih sistemov in so bolj omejene od pravih univerzalnih računalnikov.

Evolucija sistema, opisanega s časovno neodvisnim hamiltonianom, je dokaj obsežen pojem in zaradi enostavnosti se bomo v nadaljevanju ukvarjali izključno z njo. Recimo, da imamo nek sistem, ki bi ga želeli simulirati. Prvi korak je, da ugotovimo, kako vzpostaviti korespondenco med stanji in unitarnimi transformacijami sistema ter stanji in unitarnimi transformacijami simulatorja. Nato bi ob danem začetnem pogoju  $|\Psi(0)\rangle$  želeli iz vrednotiti

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\frac{H}{\hbar}t}|\Psi(0)\rangle \quad (9)$$

S tem bi poustvarili dejanski razvoj sistema. Preostane še meritev, ki mora biti skrbno načrtovana, da ne izgubimo željene informacije.

Na podlagi drugega koraka, implementacije  $U$ , ločimo dve vrsti kvante simulacije: digitalno (DQS) in analogno (AQS). V grobem pri prvem tipu aproksimiramo  $U$  s posamičnimi vrati (model vezja, glej 2.1), pri drugem pa poskusimo najti nek bolj obvljadjljiv ali dostopen sistem, na katerem lahko izvedemo sorodno („analogno“) unitarno transformacijo neposredno (da bi npr. našli drug sistem s formalno istim hamiltonianom).

#### 4.1 DQS

Pri DQS torej sestavimo  $U$  z vezjem kvantnih vrat. Priprava ustreznega začetnega stanja je v splošnem zapletena, a za mnogo različnih sistemov, npr. kemijskih valovnih funkcij, fermionskih stanj in elektronov v orbitalah obstajajo algoritmi s polinomsko zahtevnostjo.

Veliko hamiltonianov se da zapisati kot vsoto  $N$  takih, ki opisujejo lokalne interakcije (delujejo le na nekaj podsistemih)

$$H = \sum_{j=1}^N H_j \quad (10)$$

Sicer nam prej navedena teorija pravi, da se jih da aproksimirati poljubno dobro z omejenim naborom vrat, a kot smo videli, je to lahko zelo drago, torej iščemo specializiran bolj učinkovit pristop. Če bi posamezni členi komutirali, bi celotna rešitev bila

$$U = \exp\left(-i\frac{H}{\hbar}t\right) = \exp\left(-i\frac{\sum_{j=1}^N H_j}{\hbar}t\right) = \prod_{j=1}^N \exp\left(-i\frac{H_j}{\hbar}t\right) \quad (11)$$

Ponavadi seveda ne komutirajo, torej se moramo zateči k aproksimacijam, kot je npr. Trotterjeva formula za velik  $M$

$$U = \left(\prod_{j=1}^N \exp\left(-i\frac{H_j}{\hbar} \frac{t}{M}\right)\right)^M + O\left(\frac{1}{M}\right) \quad (12)$$

Ta je sicer zelo groba in obstajajo boljši načini višjega reda.

##### 4.1.1 Split step metoda

Bolj konkreten primer pristopa k simulacijam predstavlja split step metoda. Recimo, da imamo  $D$  delcev, in hamiltonian, ki predstavlja sklopitev le med neposrednimi sosedi. Torej

$$H = \sum_{j=1}^{D-1} H_{j,j+1} = \sum_{j \text{ sod}} H_{j,j+1} + \sum_{j \text{ lih}} H_{j,j+1} = H_{\text{sod}} + H_{\text{lih}} \quad (13)$$

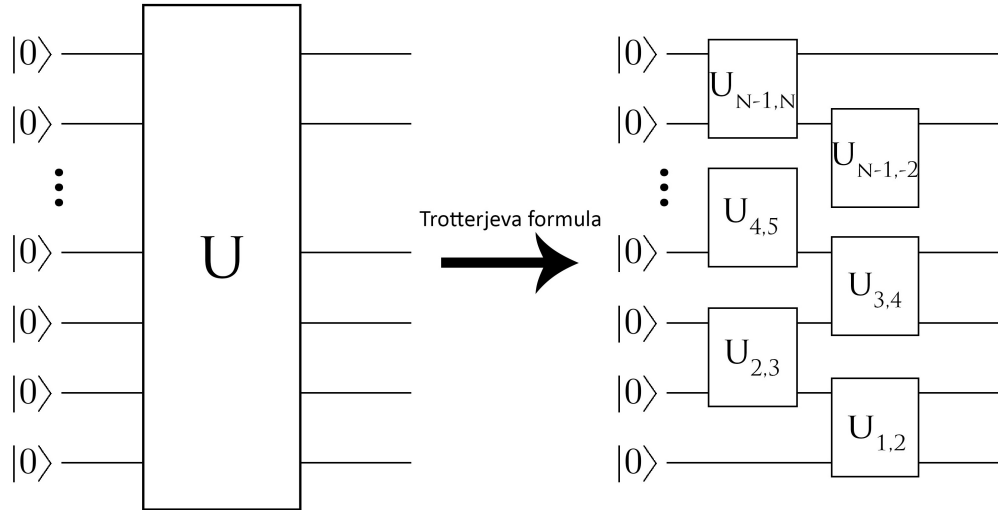
Tu posamezen člen deluje le na delca  $j$  in  $j + 1$ . Kosa  $H_{\text{sod}}$  in  $H_{\text{lih}}$  v splošnem ne komutirata, zato časovne evolucije ne moremo točno razbiti na dva kosa. Izberemo si zadosti velik  $M$  in nato s Trotterjevo formulo izvedemo sledeči korak

$$\exp\left(-i\frac{H}{\hbar}t\right) \approx \left(\exp\left(-i\frac{H_{\text{sod}}}{\hbar} \frac{t}{M}\right) \exp\left(-i\frac{H_{\text{lih}}}{\hbar} \frac{t}{M}\right)\right)^M \quad (14)$$

Sedaj opazimo, da posamezni sumandi v izrazih za  $H_{\text{sod}}$  in  $H_{\text{lih}}$  med seboj vendarle komutirajo, saj v vsaki od vsot vsak deluje na individualen par, izoliran od ostalih. Za člen na desni strani enačbe (14) velja torej

$$\exp\left(-i\frac{H_{\text{sod}}}{\hbar} \frac{t}{M}\right) \exp\left(-i\frac{H_{\text{lih}}}{\hbar} \frac{t}{M}\right) = \prod_{j \text{ sod}} \exp\left(-i\frac{H_{j,j+1}}{\hbar} \frac{t}{M}\right) \prod_{j \text{ lih}} \exp\left(-i\frac{H_{j,j+1}}{\hbar} \frac{t}{M}\right) \quad (15)$$

Trotterjevo formulo smo uporabili le za dva operatorja ( $H_{\text{sod}}$ ,  $H_{\text{lih}}$ ), pa smo problem zapletene sosedske interakcije reducirali na  $M(N - 1)$  neodvisnih uporab parske časovne evolucije. Ta je predvidoma enostavnejša za implementacijo: če imamo npr. verigo spinov, v kateri interagirajo vsi sosedje, lahko približno rešitev konstruiramo iz rešitve za le dva sklopljena spina, kar je bolj preprosto. Grafično je to prikazano na sliki 2.



**Slika 2.** Razbitje skupne unitarne evolucije na več manjših vrat; na desni je prikazan le en sloj Trotterjeve formule.

#### 4.1.2 Enostaven primer

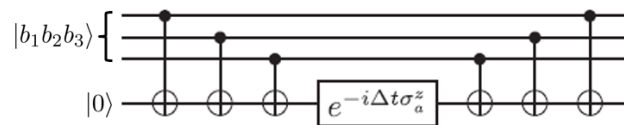
Na sliki 3 je prikazano vezje enostavnega kvantnega simulatorja. Spodnja linija predstavlja pomožen (*angl.* „ancilla“) kubit in je sprva v  $|0\rangle$ . Hamiltonian je

$$H = \bigotimes_k \sigma_k^z \tag{16}$$

Opazimo, da je delovanje časovne evolucije  $U(t)$  na baznem stanju  $|b_1 b_2 b_3\rangle$  zelo enostavna: če naj bo  $s = b_1 \oplus b_2 \oplus b_3$ , kjer je  $\oplus$  seštevanje modulo 2, je

$$U(t)|b_1 b_2 b_3\rangle = \exp((-1)^{s+1}it)|b_1 b_2 b_3\rangle \tag{17}$$

Vezje na sliki 3 torej začnemo s tremi vrati CNOT, ki v pomožni kubit (ta naj začne v stanju  $|0\rangle$ )

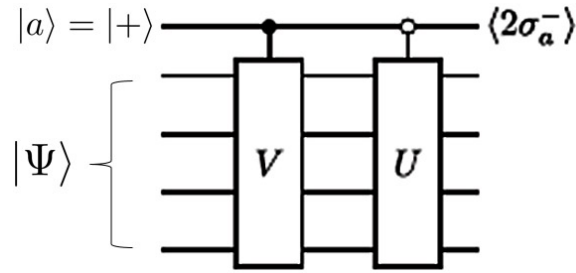


**Slika 3.** Primer kvantne simulacije. Pomožni kubit je skrajno spodnji. [1]

spravijo vrednost  $s$ , nato le na njem izvedemo ustrezno evolucijo, dobljeni faktor  $\exp((-1)^{s+1}t)$  pa je ravno ustrezen. Za konec še ponastavimo pomožni kubit s ponovno uporabo vrat CNOT.

#### 4.1.3 Meritev

Implementacija meritve ni enostavna. Univerzalen pristop je kvantna tomografija, ki omogoča dobro identifikacijo kvantnega stanja, a njena zahtevnost narašča eksponentno z velikostjo sistema. Bolj učinkovito se da meriti nekatere specifične količine. Če na primer iščemo vrednost nečesa, kar se da



Slika 4.  $\langle \Psi | U^\dagger V | \Psi \rangle = \langle a | 2\sigma_a^- | a \rangle$  [3]

zapisati v obliki  $\langle U^\dagger V \rangle := \langle \Psi | U^\dagger V | \Psi \rangle$ , kjer sta  $U$  in  $V$  unitarna operatorja, se to da izmeriti z enim pomožnim kubitom (slika 4).

Poglejmo si to podrobneje, saj je poučno. Črna pika nad  $V$  pomeni, da je ustrezna operacija na celotnem registru  $|1\rangle\langle 1| \otimes V$ , bela pika nad  $U$  pa, da je ta operacija oblike  $|0\rangle\langle 0| \otimes U$ . Pravimo tudi, da so vrata  $V$   $|1\rangle$ -nadzirana, vrata  $U$  pa  $|0\rangle$ -nadzirana. Velja še  $\sigma_a^- = |0\rangle\langle 1|$  in naj bo  $|a\rangle = |+ \rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ . Če preučimo akcijo celotnega vezja na sistemu, hitro vidimo, da je operacija oblike

$$M = |0\rangle\langle 0| \otimes U + |1\rangle\langle 1| \otimes V \quad (18)$$

Celoten sistem pošljemo skozi  $M$ , nato pa na njem izvedemo meritev operatorja  $2\sigma_a^- \otimes \text{Id}$ , čigar pričakovana vrednost je v stanju  $M(|+\rangle \otimes |\Psi\rangle)$  (tu je  $|\Psi\rangle$  neko stanje preostanka sistema)

$$\langle 2\sigma_a^- \rangle = 2(\langle + | \otimes \langle \Psi |) M^\dagger (|0\rangle\langle 1| \otimes \text{Id}) M (|+\rangle \otimes |\Psi\rangle) = \quad (19)$$

$$= ((\langle 0| + \langle 1|) \otimes \langle \Psi |) |0\rangle\langle 1| \otimes U^\dagger V ((|0\rangle + |1\rangle) \otimes |\Psi\rangle) = \langle \Psi | U^\dagger V | \Psi \rangle = \langle U^\dagger V \rangle \quad (20)$$

Morda bi nas skrbelo, ker  $\sigma_a^-$  ni diagonalizabilen, kaj šele sebi-adjungiran. K sreči lahko zaradi  $2\sigma_a^- = \sigma_a^x - i\sigma_a^y$  pričakovano vrednost definiramo kar kot linearno razširitev:  $\langle 2\sigma_a^- \rangle = \langle \sigma_a^x \rangle - i\langle \sigma_a^y \rangle$ . Kakorkoli že, vidimo, da smo po prepletu stanja  $|\Psi\rangle$  s pomožnim kubitom dosegli, da smo z dokaj enostavno meritvijo le enega kubita izvalili željeno informacijo.

## 4.2 AQS

Pri AQS v osnovi skušamo najti povezave med sistemi, ki jih je težko nadzirati, in takimi, ki jih je lahko. Najpreprostejši primer je, če nam za nek sistem s hamiltonianom  $H_{\text{sis}}$  uspe najti drug sistem - simulator - tako da obstaja neka (unitarna) korespondenca  $f : H_{\text{sim}} \rightarrow H_{\text{sis}}$  med prostori. Če velja  $H_{\text{sis}} = fH_{\text{sim}}f^{-1}$ , za par  $|\phi(t)\rangle \in H_{\text{sis}}$  in  $|\psi(t)\rangle \in H_{\text{sim}}$  ob pogoju  $|\phi(0)\rangle = f|\psi(0)\rangle$  sledi  $|\phi(t)\rangle = f|\psi(t)\rangle$  [10]

$$\frac{d}{dt}|\phi(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}H_{\text{sis}}|\phi(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}fH_{\text{sim}}f^{-1}|\phi(t)\rangle \quad (21)$$

$$\frac{d}{dt}f|\psi(t)\rangle = f\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}fH_{\text{sim}}f^{-1}(f|\psi(t)\rangle) \quad (22)$$

Res, ker sta  $|\phi(t)\rangle$  in  $f|\psi(t)\rangle$  rešitvi iste diferencialne enačbe z istim začetnim pogojem, sta enaki. To pomeni, da se iz opazovanja razvoja simulatorja da razbrati stanje prvotnega sistema.

Analogni simulatorji so pogosto sestavljeni iz mnogo več delcev (oz. osnovnih podsistemov) kot digitalni. To ne pomeni, da imajo zares več kubitov, saj nimamo zmožnosti individualnega nadzora in preciznega izvajanja kvantnih operacij, kot jo imamo pri DQS.

Primer take sorodnosti nakazujeta hamiltoniana

$$H_{\text{sis}} = c\hat{p}\sigma_x + mc^2\sigma_z \quad (23)$$

$$H_{\text{sim}} = 2\eta\Delta\tilde{\Omega}\hat{p}\sigma_x + \hbar\Omega\sigma_z \quad (24)$$

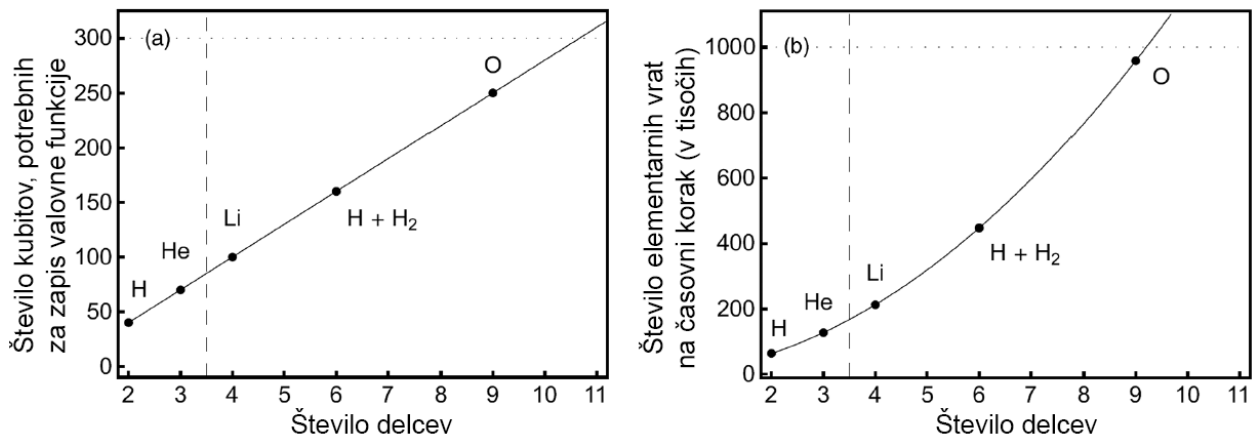
Sistem je delec s spinom  $1/2$  v  $(1 + 1)$  dimenzijah - to je hamiltonian Diracove enačbe.  $\sigma_x, \sigma_z$  in  $\hat{p}$  so standardni operatorji za spin oz. gibalno količino. Enako vlogo imajo pri hamiltonianu simulatorja, ki je ion, ujet v elektromagnetni pasti.  $\eta, \Delta, \tilde{\Omega}$  in  $\Omega$  so eksperimentalni parametri, ki jih lahko prilagajamo. Če nastavimo  $c = 2\eta\Delta\tilde{\Omega}$  in  $mc^2 = \hbar\Omega$ , imata hamiltoniana formalno enako obliko, korespondenco med stanji pa vzpostavimo tako, da si izberemo dve spinski stanji iona, ki se preslikata v spinski stanji delca, krajevni del pa preslikamo neposredno.

Taka postavitev nam omogoča študijo Diracove enačbe v kontekstu nerelativistične kvantne mehanike. Bolj podroben pregled metod in rezultatov najdemo v [8] in [9].

### 4.3 Učinkovitost

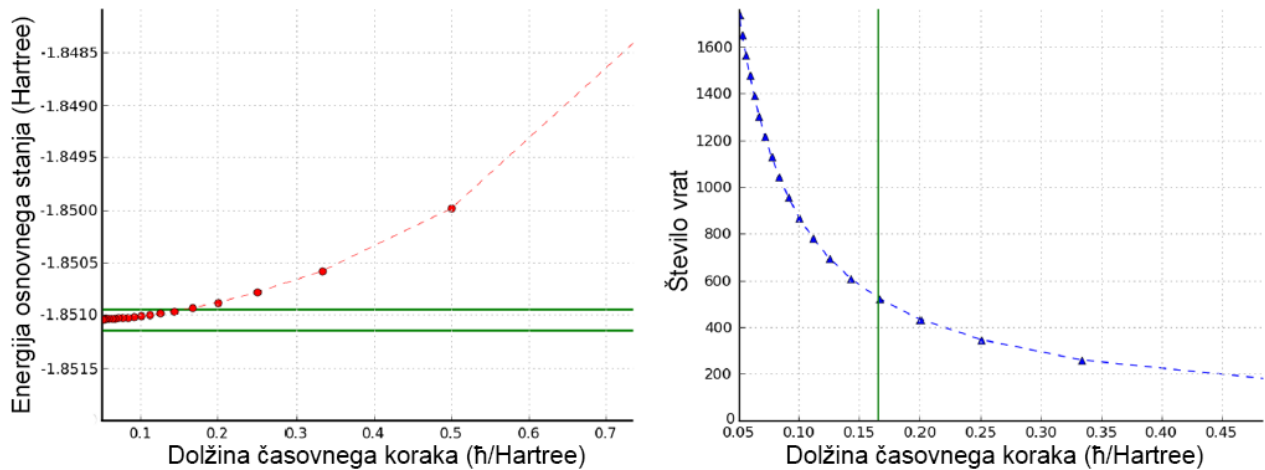
Osrednji cilj kvantne simulacije in kvantnega računalništva na splošno je, da do odgovorov dejansko pridemo hitreje kot po klasični poti. To zna biti težavno že zaradi velike zahtevnosti priprave začetnih stanj in meritve rezultatov.

Pri DQS je najbolj izpostavljeno vprašanje, koliko kubitov je potrebnih, preden bodo kvantne simulacije presegle nivo klasičnih na superračunalnikih. Ocena za to se giblje v okolici 40-100 kubitov (za 40 kubitov bi potrebovali  $2^{40} \approx 10^{12}$  parametrov na klasičnih računalnikih), čeprav bi bili nekateri zanimivi sistemi kot dokaz principa dostopni tudi z manjšim številom kubitov. To so npr. frustrirani sistemi, kvantni kaos, enostavne kemijske reakcije ipd.; bolj kvantitativne ocene so prikazane na sliki 5. Za primer vzemimo simulacijo parske Coulombske interakcije  $N$  delcev: valovno funkcijo zapišemo v  $n$ -kubitni bazi, potrebujemo pa še  $m$  kubitov za zapis potenciala. Coulombski potencial lahko izvednostimo v  $O(N^2m^2)$  korakih, zato je to tudi časovna zahtevnost algoritma, ki je eksponentno manjša od trenutnih metod, a kljub temu bi po sliki 5 potrebovali reda 100 kubitov in reda 200 000 vrat.



**Slika 5.** Ocena števila kubitov (levo) in kvantnih vrat (desno, v tisočih) v odvisnosti od števila enostavnih delcev v sistemu. Vertikalna črta predstavlja trenutno zmogljivost superračunalniških simulacij, oznake grafa pa so primeri sistemov, ki postanejo dostopni. [3]

V literaturi ni veliko študij rasti zahtevnosti z željeno natančnostjo. Kar nekaj algoritmov, ki sicer skalirajo dobro z velikostjo sistema, je dokaj slabih s tega vidika in bi jih bilo treba izboljšati ali pa nadomestiti. Trotterjeva formula je poučna: morda bi mislili, da krajšanje časovnega koraka v tej formuli veča natančnost brez časovne cene, saj se vrata izvedejo hitreje. Temu žal ni tako, ker imajo vrata tudi neko osnovno statično zahtevnost, ki se akumulira z večanjem njihovega števila. Na sliki 6 so predstavljeni rezultati izračunov energije osnovnega stanja molekule vodika. Za veliko natančnost je potreben dokaj majhen korak, a število vrat v tem režimu strmo narašča. To je torej problem, ki se mu želimo ogniti.



**Slika 6.** Hartree  $\approx 27.211$  eV. Konvergenca izračunane energije osnovnega stanja molekule vodika (levo) in število vrat (desno) v odvisnosti od časovnega koraka v Trotterjevi formuli. Zeleni črti označujeta natančnost  $10^{-4}$  eV. [3]

Prav tako v literaturi ni poudarka na AQS. Splošni konsenz je, da so zahteve pri AQS manj stroge, predvsem zato, ker se lahko dela z veliko večjim številom delcev hkrati, a z le malo krmilnimi mehanizmi. Z laserskimi žarki je npr. mogoče zajeti tisoče atomov [11] (seveda to ni ekvivalentno tisočem kubitov, ker nimamo točnega nadzora in velike splošnosti).

#### 4.4 Motnje, dekoherenca

Preden predstavimo nekaj eksperimentalnih realizacij, postojmo ob eni najbolj fundamentalnih ovir za izgradnjo kvantnih računalnikov in simulatorjev, dekoherenci. V grobem je to proces, ki se pojavi, ko sistem ni več dobro izoliran od okolja, in privede do izgube kvantnih značilnosti sistema, ki so ključne za kvantno računalništvo.

Na hitro povzamemo dekoherenco takole: sistem in okolje sta sprva v nekem skupnem stanju  $|\Psi\rangle|e\rangle$ . Zaradi enostavnosti predpostavimo, da interakcijo med sistemom in okoljem opisuje hamiltonian oblike  $H_{\text{int}} = S \otimes E$ . Razvijmo  $|\Psi\rangle = \sum_i c_i |i_S\rangle|e\rangle$ , kjer so  $|i_S\rangle$  lastna stanja  $S$ . Potem bo časovna evolucija delovala takole:  $|i_S\rangle|e\rangle \rightarrow |i_S\rangle|e_i(t)\rangle$ . Zaradi velikega števila prostostnih stopenj v okolju bodo  $|e_i(t)\rangle$  z veliko verjetnostjo skoraj ortogonalna, torej se bo začetno koherentno stanje  $|\Psi\rangle$  „razletelo“ po skupnem Hilbertovem prostoru ter več ne kazalo kvantnih lastnosti, potrebnih za računanje. Formalno se to opiše s posplošenim jezikom gostotnih matrik, pomeni pa, da smo izgubili možnost uporabe našega stanja. V splošnem je pomembna karakteristika vsake implementacije kvantnega računalništva dekoherenčni čas, ki kvalitativno pove, koliko časa je na voljo, preden nam okolje uniči krhko kvantno stanje.

To kaže na napetost v osnovah kvantnega računalništva: po eni strani hočemo na sistemu izvajati točno določene operacije brez zunanega vpliva, po drugi strani pa moramo biti sposobni do sistema dostopati prek okolja, saj moramo na njem izvajati meritve.

#### 4.5 Realizacije

Sedaj si bomo ogledali več eksperimentalnih pristopov, s katerimi se poskuša implementirati kvantne simulatorje.



### 4.5.1 Harmonični oscilator

Izkaže se, da en sam harmonični oscilator ni dober kvantni računalnik, uporabili pa ga bomo za uvod v to snov [1]. Hamiltonian je

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2) \sim \hbar\omega a^\dagger a \quad (25)$$

Polovico bomo izpuščali, ker povsod doda le globalen fazni faktor. Podrobno si oglejmo delovanje vrat CNOT.  $|x\rangle_R$  so stanja v računski bazi, ki je zaenkrat neidentificirana.

$$\text{CNOT}|00\rangle_R = |00\rangle_R \quad (26)$$

$$\text{CNOT}|01\rangle_R = |01\rangle_R \quad (27)$$

$$\text{CNOT}|10\rangle_R = |11\rangle_R \quad (28)$$

$$\text{CNOT}|11\rangle_R = |10\rangle_R \quad (29)$$

Če naj  $|n\rangle$  predstavlja lastna stanja  $H$ , potem recimo takole

$$|00\rangle_R = |0\rangle \quad (30)$$

$$|01\rangle_R = |2\rangle \quad (31)$$

$$|10\rangle_R = (|4\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2} \quad (32)$$

$$|11\rangle_R = (|4\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2} \quad (33)$$

Sistem pustimo, da se za čas  $t = \pi/\hbar\omega$  razvija, kot to določa  $H$ . Potem bo

$$|n\rangle \rightarrow \exp(-i\pi a^\dagger a)|n\rangle = (-1)^n |n\rangle \quad (34)$$

Hitro vidimo, da smo s tem že našli implementacijo vrat CNOT. To nam je uspelo, ker je časovna evolucija za izbrani čas imela enake lastne vrednosti kot vrata CNOT. To je tudi splošno res: če naj časovna evolucija  $T = \exp(-iHt)$  poustvari akcijo unitarne transformacije  $U$ , morata  $T$  in  $U$  imeti čim bolj podoben spekter. Res, če so  $|U : n\rangle$  lastna stanja za  $U$ ,  $|T : n\rangle$  pa za  $T$ , s preslikavo  $|U : n\rangle \rightarrow |T : n\rangle$  lahko posnemamo razvoj simuliranega sistema kar tako, da pustimo simulator, da iz ustreznega začetnega stanja teče ravno prav dolgo.

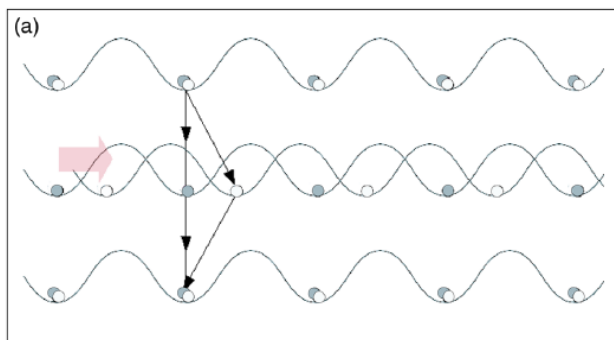
Z uporabo perturbacij lahko iz harmonskega potenciala dobimo veliko množico spektrov. Mar to pomeni, da lahko kvantni simulator ali računalnik ustvarimo iz enega samega oscilatorja? Žal stvari niso tako preproste. V splošnem je spekter  $U$  težko najti, pogosto pa je poznavanje spektra že velik kos rešitve problema samega. Ta pristop prav tako ne omogoča, da bi operacije enostavno izvajali v sosledju, saj spekter transformacije  $UV$  v splošnem ni povezan s spektroma  $U$  in  $V$ , bazo pa bi morali med računanjem celo menjati. Tudi z energijo so težave:  $n$ -delčni sistem bi zahteval lastna stanja vse do energije  $2^n \hbar\omega$ . To je tako, kot da bi poskusili celoten računalniški spomin iz  $m$  bitov predstaviti z vrtljivim gumbom z  $2^m$  položaji - posamezne kubite bi bilo zelo težko naslavljati.

### 4.5.2 Atomi in ioni

Optične mreže so stoječe elektromagnetno valovanje, ustvarjeno z interferenco laserskih snopov. V takem potencialu tudi sicer nevtralni atomi težijo proti minimumom, saj se njihovi energijski nivoji razcepijo prek sklopitve s poljem (podobno kot pri navadnem Zeemanovem pojavu). Taka postavitev poda velik nabor kontrolnih parametrov, kot so verjetnost za tuneliranje, moč interakcije med sosednimi atomi, večdelčne interakcije itd. Dokaj splošna vrsta hamiltoniana je

$$H = H_{\text{tun}} + H_{\text{interakcijski}} + H_{\text{pot}} + H_{\text{interni}} \quad (35)$$

Tu so členi po vrsti tunelirni, interakcijski, potencialni (iz skupka vseh potencialov, ki ga čutijo atomi) in interni (ki se nanaša na notranje prostostne stopnje). Interakcijo med tako sosednjimi kot daljnimi atomi lahko vzpostavimo na primer tako, da dva optična potenciala sklopimo vsakega na svojo interno stanje atoma (slika 7). Ker so atomi nevtralni in šibko interagirajo z okoljem, so njihovi dekoherenčni časi dolgi, reda sekund. Velika splošnost dosegljivih hamiltonianov omogoča npr. preučevanje različic Hubbardovega modela, ki opisujejo kvantne sisteme, ki so v osnovi sestavljeni iz na mrežo ujetih fermionov ali bozonov. V [12] so avtorji med drugim opazovali prehod med izolatorsko in superfluidno fazo sistema bozonov na mreži.



**Slika 7.** Z zamikanjem optičnih potencialov, sklopljenih na posamezne interne prostostne stopnje, lahko dosežemo interakcijo med sosednjimi atomi. Beli oz. sivi krogi predstavljajo eno oz. drugo interno stanje. [3]

Obravnavanje posameznih atomov je težko, ker je separacija mrežnih mest reda velikosti najboljših dosegljivih laserskih fokusov. Temu se lahko izognemo z uporabo alternativnih kubitov: namesto običajnih nevzbujenih uporabimo Rydbergove atome, ki so atomi v visoko vzbujenih elektronskih stanjih. To poveča dovoljeno separacijo mrežnih mest in s tem poenostavi individualno obravnavo.

Dokaj uspešna alternativa nevtralnimi gradnikom so ioni. Te se lahko ohladi in ujame v električna ali magnetna polja, npr. s postavitvijo s slike 8. En sam ion lahko predstavlja dva kubit. Prvega zapišemo v notranje prostostne stopnje: stanja skupne vrtilne količine iona so energijsko razcepljena zaradi interakcije med elektronskim oblakom in jedrom; dve izmed njih si izberemo, da služita za kubit. Poleg notranje dinamike lahko ion tudi niha v zunanem harmonskem potencialu – takim vzbuditvam pravimo fononi. Drugi kubit tako zapišemo v osnovno in prvo vzbujeno nihajno oz. fononsko stanje. Naj bosta notranji stanji ločeni z energijo  $\hbar\omega_i$ , fononski pa  $\hbar\omega_f$ . Z uporabo laserskih pulzov lahko na notranjem stanju izvajamo poljubne transformacije, s pulzi pri frekvenci  $\omega_i - \omega_f$  pa kubita sklopimo. Primer hamiltoniana za tako postavitve je

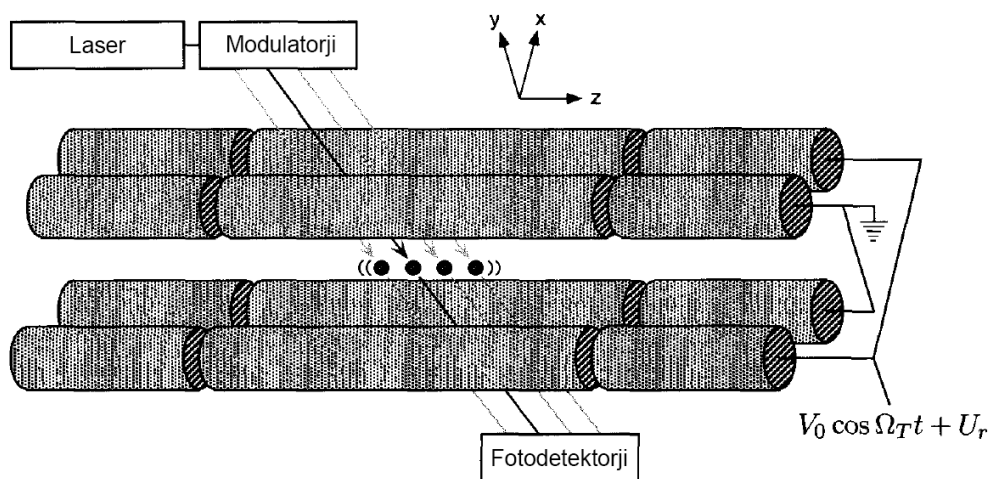
$$H = i\hbar\eta\omega_i(e^{i\phi}\sigma_+a - e^{-i\phi}\sigma_-a^\dagger) \quad (36)$$

Tu je  $\phi$  faza laserja,  $\eta$  pa Lamb-Dickejev parameter, ki je zares razmerje med frekvencama fononov  $\omega_f$  in laserja  $\omega_{las}$  in ki mora biti majhen, saj le tako dobro velja, da se višja fononska stanja vzbujajo zanemarljivo malo. Operatorja oblike  $\sigma_+a$  predstavljata sklopitev med spinsko in fononsko prostostno stopnjo.

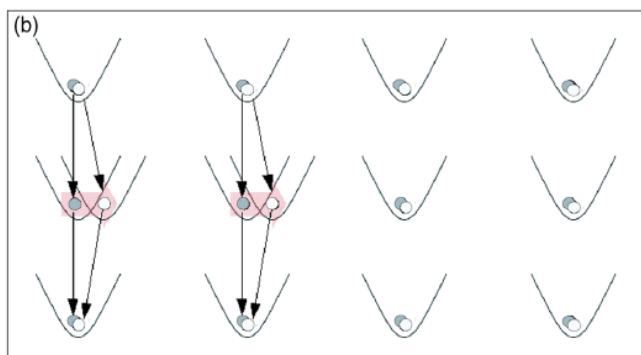
Obstajajo še drugi pristopi za manipulacijo kubitov, npr. s sklapljanjem optičnih potencialov direktno na notranja stanja ionov in selektivno zamikanje stanj, kot je prikazano na sliki 9.

Pristop z ioni je trenutno najuspešnejši: leta 2017 sta dve skupini ([6] in [7]) s postopki, podobnimi zgoraj opisanim, dosegli dober nadzor nad več kot 50 kubit; eni od skupin je uspelo sistem zadržati v stabilnem stanju več ur. Simulirali so Isingovo interakcijo, kar jim omogoča opazovanje faznih prehodov in lastnosti sistema, ki izhajajo iz kompleksne povezanosti med spini in so sicer težko izračunljivi. Med drugim je za tak napredek zaslužen tudi razvoj optične tehnologije, s čimer se težava naslavljanja posameznih atomov oz. ionov manjša.

## Kvantni simulatorji



Slika 8. Past za ione v RF potencialu. [1]



Slika 9. Ione v individualnih pasteh lahko pripravimo do interakcije s pogojnim zamikanjem: ion ima dve notranji stanji, na sliki belo in sivo. En potencial sklopimo z enim od stanj, drugega pa z drugim. Na ta način lahko krajevno naslavljammo obe stanji posebej. [3]

### 4.5.3 NMR

Pri jedrski magnetni resonanci so kubiti zakodirani v spinska stanja jedr atomov neke molekule. Jedra so le šibko sklopljena z okolico; to je dvorezen meč, saj so po eni strani dekoherenčni časi dolgi (reda sekund), po drugi pa je zelo težko pripraviti začetno stanje  $|0\dots 0\rangle$ . To slednjo težavo se da omiliti, saj obstajajo tehnike, s katerimi obravnavamo le tiste molekule, ki nam jih je uspelo spraviti v osnovno stanje, a to pride za ceno eksponentnega upada moči signala z velikostjo sistema, zaradi česar je skaliranje te tehnologije slabo.

Konkreten primer „strojne opreme“ je epruveta s tekočino, vstavljena v spektrometer. Z različnimi frekvencami spektrometra lahko naslavljammo posamezne atome v molekulah. Hamiltonian takega sistema je

$$H = -\hbar\gamma B \sum_i L_i^z + \sum_{i>j} J_{ij} L_i^z L_j^z \quad (37)$$

Tu so  $\gamma$  giromagnetno razmerje,  $J_{ij}$  pa sklopitvene konstante med vrtilnimi količinami  $L_i^z$ . Tu je razvidna še ena omejitev:  $J_{ij}$  so odvisne od molekulske strukture in jih ne moremo spreminjati, zato moramo operacije (t.j. spektrometrskje pulze) opravljati v skladu s tem.

Kljub določenim pomankljivostim je NMR zelo pomembna testna podlaga za nadaljni razvoj. Uspeli so poskusi z do 12 kubiti in več sto operacijami, vključno z npr. kvantno teleportacijo in Shorovo faktorizacijo.

Analogi standardnih NMR metod bodo morda uporabni v simulaciji močno koreliranih sistemov (to

so taki, ki se jih ne da enostavno obravnavati kot razklopljene individualne gradnike, npr. veliko visokotemperaturnih superprevodnikov). V [4] je predlagana uporaba močno koreliranih jedrskih spinov, vezanih na površino diamanta. V taki postavitvi so na voljo določene metode, ki naj bi omogočale enostavno inicializacijo in branje ter izkazovale dobro skaliranje.

#### 4.5.4 Superprevodna vezja

Ginzburg-Landauova teorija je fenomenološki opis superprevodnikov. Osrednja količina je  $\Psi$ , makroskopska valovna funkcija, ki je ureditveni parameter za superprevodno stanje (kot pri opisu faznih prehodov v termodinamiki). Tak opis je mogoč, ker so superprevodniki kvantno koherentni na makroskopskih razdaljah. Za bolj natančno razlago bi se bilo potrebno spustiti v mikroskopsko teorijo BCS. Za nas je pomembno predvsem to, da je  $\Psi$  kompleksna količina s fazo  $\phi$ . Če dva kosa superprevodnika spojimo prek tanke izolatorske plasti, med njima tudi v odsotnosti napetosti lahko teče tok. To je Josephsonov pojav. Če sta  $\phi_1$  in  $\phi_2$  fazi ureditvenega parametra na obeh straneh spoja, velja

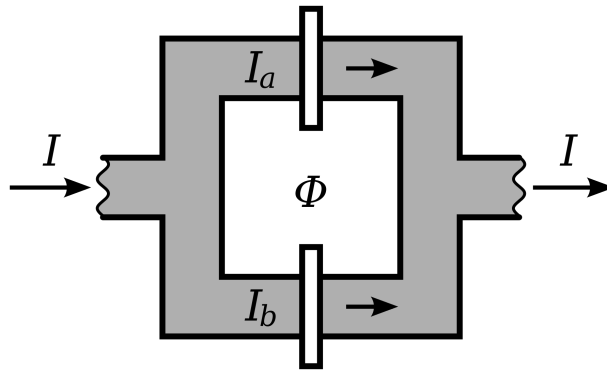
$$I = I_c \sin(\Delta\phi) \quad (38)$$

$I_c$  je karakteristika spoja. Časovna odvisnost razlike faz je dana z enačbo

$$U(t) = \frac{\hbar}{2e} \frac{d}{dt} \Delta\phi(t) \quad (39)$$

$U$  je tu napetost med stranema. Če je ta 0, je  $\Delta\phi$  konstantna, zato imamo rešitev teh dveh enačb, kjer tok vedno teče.

SQUID je kratica za „superconducting quantum interference device“. Konstrukcijsko je super-

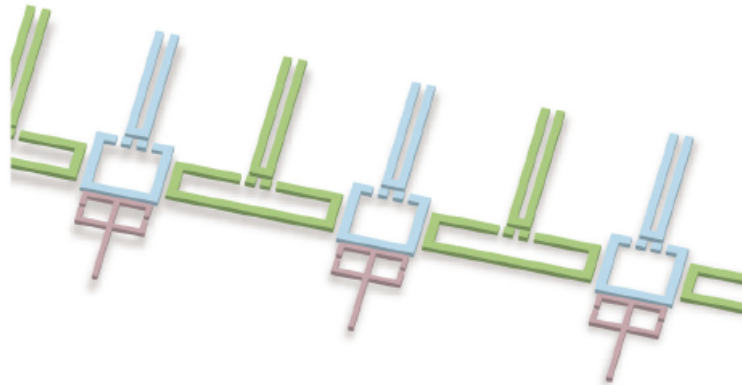


Slika 10. Diagram DC SQUID. [14]

prevoden obroček z dvema Josephsonovima spojem, kot je prikazano na sliki 10. Če skozi center vzpostavimo magnetno polje in ga večamo, se v SQUID nekaj časa inducira tok, ki popolnoma izniči zunanje polje. Ko pa zunanji pretok doseže vrednost  $\Phi_0/2$  (tu je  $\Phi_0 = h/2e$  kvant pretoka), postane energijsko bolj ugodno, da tok ojača zunanje polje, da je skupni pretok ravno  $\Phi_0$ . Ko je polje na meji, imamo lahko superpozicijo toka v eno in drugo smer, kar predstavlja kvantni kubit. Kvantne operacije se izvajajo s spreminjanjem magnetnega polja in vzbujanjem z mikrovalovi, ki povzročajo prehode med tokovnimi stanji. Branje kubitov lahko poteka z drugimi obročki SQUID. Primer take konstrukcije je prikazan na sliki 11. Primer hamiltoniana, ki ga lahko tako dosežemo, je

$$H = \frac{1}{2} \sum_i (\Delta_i \sigma_i^x + \epsilon_i \sigma_i^z) + \sum_{i,j} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z \quad (40)$$

Tu so  $\Delta_i$  razcepi med nivoji posameznega SQUID,  $\epsilon_i$  merijo druga odstopanja,  $J_{ij}$  pa sklopitve med pari. Tako nad  $\Delta_i$  kot  $\epsilon_i$  imamo že dober nadzor in jih lahko spreminjamo na mestu. Ker imajo tokokrogi več kot dve energijski stanji, bi tudi njih načeloma lahko uporabili. Res je že uspela AQS spina velikosti več kot  $1/2$ .



**Slika 11.** Konstrukcija gruče SQUID. Široki kosi v obliki črke T služijo za sklapljanje sosedov, mali dvojni obročki pa za branje. Prekinitve so Josephsonovi spoji. [3]

## 4.6 Načini uporabe

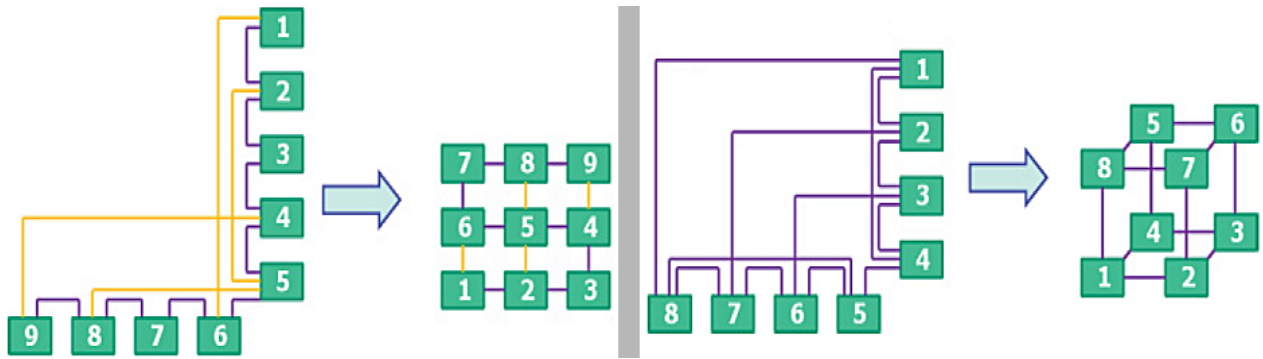
Obeta se, da bo kvantna simulacija uporabna v fiziki in kemiji ter morda celo biologiji. Uporab je mnogo, zato jih bomo večino le omenili, bolj podrobno pa si bomo ogledali simulacijo spinskih mrež v eksotičnih topologijah in dimenzijah.

### 4.6.1 Spinske mreže

Enodimenzionalni sistemi spinov so klasično še dokaj obvladljivi, v višjih dimenzijah pa zabredemo v težave. Zanimivo pa bi bilo preučevati kvantne sisteme, ki so celo v še višjih dimenzijah ali imajo zelo nenavadno povezljivost (ki je topološka lastnost in npr. ustreza spinom na torusu); eno vprašanje, ki se postavlja, je, če niso morda splošne značilnosti takšnih sistemov na kak neposreden ali globok način povezane z lastnostmi ustreznega prostora. Znano je, da je dimenzionalnost ključna pri faznih prehodih, pa tudi nekatere sheme v kvantni kriptografiji kažejo, da bi bili za nekatere namene taki sistemi uporabni. V preteklosti so za analizo takih sistemov bile uporabljene Monte Carlo, renormalizacijske in sorodne metode, ki pa niso solidno utemeljene - razvoj kvantnih simulatorjev bi nudil zelo vreden eksperimentalni vpogled v te procese, ki je zaradi zapletene povezljivosti sicer težko uresničljiv.

V [5] avtorji predlagajo uporabo superprevodnih kubitov, ki smo jih že opisali. Z njimi naj bi rešili težave s povezljivostjo, saj naj bi jih bilo načeloma mogoče sklapjati v zelo raznolikih geometrijah, podobno kot čipe (slika 12). Jasno je, da bi bilo tako možno poustvariti zapletene topologije, kot so torus ali Kleinova steklenica. Ko bi to uspelo, bi lahko opazovali npr. nenadne prehode med stanji (*angl.* „quench“), pri katerih sistem pripravimo v osnovnem stanju, nato pa geometrijo (oz. hamiltonian) nenadoma spremenimo in opazujemo razvoj. Glede tega je bilo podanih že precej teoretičnih napovedi, zato to področje vzbuja veliko pozornosti.

Nekaj pozornosti je bilo v teoretični literaturi namenjeno tudi fraktalnim dimenzijam. Te so zanimive že same po sebi (npr. Isingov model v nekaterih fraktalnih dimenzijah izkazuje nenavadno



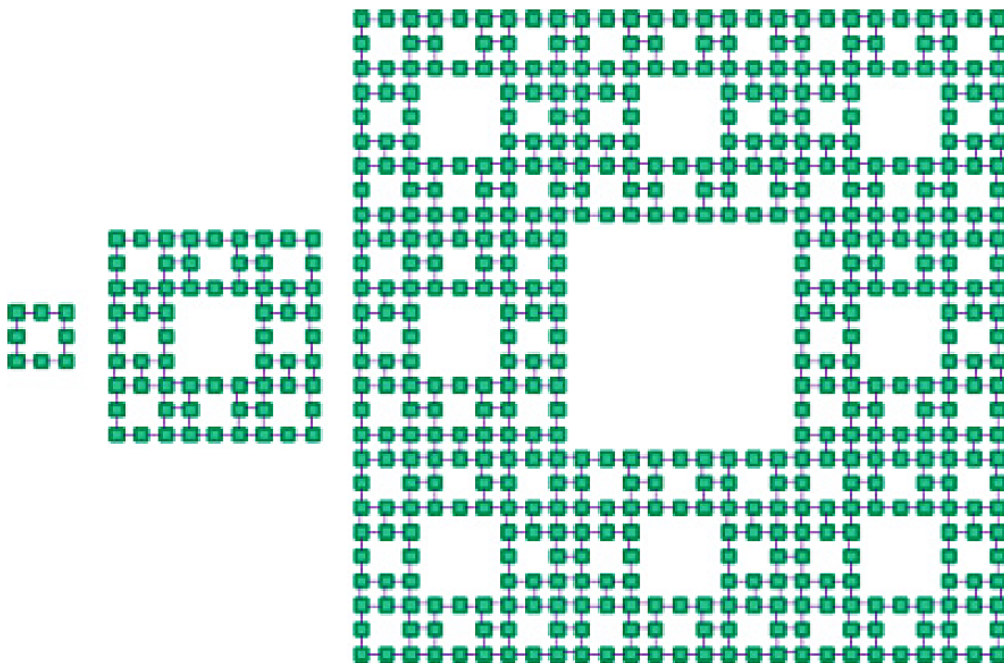
**Slika 12.** Različne realizacije bolj zapletenih povezljivosti z enostavnimi 2D postavitvami superprevodniških kubitov. Krížanja povezav niso problematična, ker sistem lahko zgradimo v več slojih. [5]

spontano magnetizacijo), pa tudi zato, ker naj bi nekateri fazni prehodi, ki se v 2D in 3D kvalitativno razlikujejo (so prvega oziroma drugega reda), to spremembo obnašanja doživeli pri neki vmesni dimenziji. Enostaven primer, ki omogoča dostop do vseh dimenzij med 1 in 2, je prikazan na sliki 13.

Ta pristop daje tudi dokaj neposredno idejo za simulacijo t.i. Bose-Hubbardovega modela, kjer imamo bozone na mreži, ki lahko skačejo med sosednjimi mesti. Da to dosežemo, uporabimo resonatorje (kvantne harmonične oscilatorje), katerih kvanti predstavljajo bozone; tehnologija, s katero jih lahko ustrezno sklopimo, že obstaja. Hamiltonian za ta model brez interakcije med delci je

$$H_{\text{BH}} = \sum_i \hbar\omega_i \left( a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \right) + \sum_{i,j} J_{ij} \left( a_i^\dagger a_j + a_j^\dagger a_i \right) \quad (41)$$

Prvi člen je običajen harmonični oscilator, drugi pa opisuje preskakovanje bozonov med sosednjimi mrežnimi mesti.



**Slika 13.** Iterativno sestavljanje preproge Sierpinskega. Dobimo jo tako, da na vsakem koraku objekt razrežemo na osem kosov (po tretjinah stranic) in vsakega nadomestimo s kopijo trenutne iteracije. Če je  $n$  širina prve iteracije,  $m$  pa velikost njene luknje, dobimo dimenzijo  $\ln(n^2 - m^2)/\ln n$ ; v zgornjem primeru je to  $\ln 8/\ln 3$ , na voljo pa nam je celoten razpon v intervalu (1, 2). [5]

#### 4.6.2 Ostali načini uporabe

Naštejmo še nekaj aplikacij kvantnih simulatorjev [3].

V kondenzirani snovi se najdejo poleg naštetega uporabe v študijah frustriranih sistemov, spinskih stekel, metamaterialov, superprevodnikov in topoloških efektov.

V fiziki visokih energij se ponuja možnost preučevanja mnogih relativističnih efektov v nerelativističnem okolju. Primer tega je *Zwitterbewegung* (dobesedno „gibanje med“), kar je naglo oscilatorno gibanje prostega Diracovega delca, katerega nerelativistični analog so najprej zaznali pri ujetem ionu in ne v izvornem kontekstu Diracovih delcev. Prav tako se lahko simulira umeritvena polja (že je uspela implementacija Klein-Gordonove enačbe, s katero so preučevali Casimirjev efekt).

V kozmologiji je relevantnih mnogo procesov, ki bi se jih dalo s to tehnologijo preučevati v laboratoriju. Posebej zanimiva je podobnost med superfluidnimi tekočinami in zgodnjim vesoljem. Z AQS bi lahko opazovali analoge doslej neopaženega Hawkingovega in Unruhovega sevanja.

Aplikacije se še vrstijo, npr. v atomski in jedrski fiziki, kvantnem kaosu, odprtih sistemih in kemiji. Skratka, razvoj zares zmognih simulatorjev bi pomembno vplival na tako rekoč vsa področja fizike, pa tudi na sorodne bazne znanosti.

### 5. Zaključek

V grobem smo predstavili kvantno računalništvo s poudarkom na simulaciji fizikalnih sistemov. Še enkrat poudarimo, da je motivacija za razvoj te tehnologije neizmerna, saj bi omogočila boljši vpogled v raznovrstne probleme, prav tako pa je pomemben korak k realizaciji univerzalnih kvantnih računalnikov, katerih izgradnja je zaradi bolj raznolikih zahtev še toliko težja. V zadnjih letih je razvoj nagel in dobro delujoči simulatorji s 50 kubiti že obstajajo, napovedi za prihodnja leta pa so prav tako optimistične. Vsekakor se nadejamo, da smo na prehodu v dobo kvantnega računalništva.

### 6. Zahvala

Rad bi se zahvalil profesorju Tomažu Prosenju za pomoč tako pri virih kot pri teoriji ter za ostale dobrodošle komentarje.

### LITERATURA

- [1] Michael A. Nielsen, and Isaac L. Chuang. „Quantum Computation and Quantum Simulation.“ *Cambridge University Press*, (2000)
- [2] Rok Žitko. „Kvantne in računalniške tehnologije.“ *DMFA - založništvo*, (2017)
- [3] I. M. Georgescu, S. Ashhab, and Franco Nori. „Quantum simulation.“ *Rev. mod. phys.* 86, 153 (2014)
- [4] Jianming Cai, Alex Retzker, Fedor Jelezko, and Martin B. Plenio. „A large-scale quantum simulator on a diamond surface at room temperature.“ *Nature Physics* 9, 168–173 (2013)
- [5] Dimitris I. Tsomokos, S. Ashhab, and Franco Nori. „Using superconducting qubit circuits to engineer exotic lattice systems.“ *Phys. Rev. A* 82, 052311 (2010)
- [6] J. Zhang, G. Pagano, P. W. Hess, A. Kyprianidis, P. Becker, H. Kaplan, A. V. Gorshkov, Z.-X. Gong and C. Monroe. „Observation of a many-body dynamical phase transition with a 53-qubit quantum simulator.“ *Nature* 551, 601–604 (2017)
- [7] Hannes Bernien, Sylvain Schwartz, Alexander Keesling, Harry Levine, Ahmed Omran, Hannes Pichler, Soonwon Choi, Alexander S. Zibrov, Manuel Endres, Markus Greiner, Vladan Vuletić and Mikhail D. Lukin. „Probing many-body dynamics on a 51-atom quantum simulator.“ *Nature* 551, 579–584 (2017)
- [8] R. Gerritsma, G. Kirchmair, F. Zähringer, E. Solano, R. Blatt, and C. F. Roos. „Quantum simulation of the Dirac equation.“ *Nature* 463, 68–71 (2010)

- [9] L. Lamata, J. León, T. Schätz, and E. Solano. „Dirac equation and quantum relativistic effects in a single trapped ion.“ *Phys. Rev. Lett.* 98, 253005 (2007)
- [10] S. Somaroo, C. H. Tseng, T. F. Havel, R. Laflamme, and D. G. Cory. „Quantum Simulations on a Quantum Computer.“ *Phys. Rev. Lett.* 82, 5381 (1999)
- [11] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch and I. Bloch. „Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms.“ *Nature* 415, 39–44 (2002)
- [12] Maciej Lewenstein, Anna Sanpera, Veronica Ahufinger, Bogdan Damski, Aditi Sen De, and Ujjwal Sen „Ultracold atomic gases in optical lattices: mimicking condensed matter physics and beyond.“ *Advances in Physics* 56 (2007)
- [13] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Shore\\_code.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Shore_code.svg) (19.2.2019)
- [14] [https://en.wikipedia.org/wiki/File:DC\\_SQUID.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/File:DC_SQUID.svg) (19.2.2019)