LIEJEVE ALGEBRE MAJHNIH RAZSEŽNOSTI

VALERIJA JORDAN

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Teorija Liejevih algeber je obsežno matematično področje, ki danes igra pomembno vlogo v matematiki in teoretični fiziki. Članek odgovori na vprašanje, katere Liejeve algebre majnih razsežnosti, torej dimenzij 1, 2 in 3, obstajajo in kako jih klasificirati. Najprej so predstavljene Lieje algebre na splošno, sledi nekaj primerov ter vse potrebne teoretične osnove za klasifikacijo Liejevih algeber majhnih razsežnosti. Ravno ta klasifikacija pa predstavlja glavni del članka.

LOW-DIMNESIONAL LIE ALGEBRAS

The theory of Lie algebras represents an important subject in modern mathematics and theoretical physics. The goal of this article is to classify low-dimnesional Lie algebras, i.e., those of dimensions 1, 2 and 3. First, the Lie algebras in general are introduced, some examples are given and theoretical background for the classification of low-dimensional Lie algebras is prepared. This classification is the main part of the article.

1. Uvod

Teorija Liejevih algeber je obsežno matematično področje, ki se je razvilo iz preučevanja Liejevih grup. Te je v 19. stoletju študiral norveški matematik Marius Sophus Lie, po katerem se tudi imenujejo. Tako Liejeve grupe kot tudi Liejeve algebre danes igrajo pomembno vlogo na različnih področjih matematike in teoretične fizike. Eno izmed vprašanj, ki se pojavi pri študiju Liejevih algeber je, koliko različnih (neizomorfnih) Liejevih algeber obstaja in kako jih klasificirati? Članek se bo omejil zgolj na Liejeve algebre majhnih razsežnosti, torej tiste dimenzij 1, 2 in 3.

Tako pri spoznavanju splošnih Liejevih algeber na začetku kot tudi pri razvrstitivi Liejevih algeber majhnih razsežnosti se članek opre predvsem na [1], pri klasifikaciji pa tudi na [4]. Vse Liejeve algebre, ki jih bomo obravnavali, bodo končno razsežne.

1.1 Definicija in primeri Liejevih algeber

Poglejmo si sedaj, kaj sploh je Liejeva algebra.

Definicija 1. Naj bo F polje. *Liejeva algebra* je vektorski prostor L, skupaj z bilinearno preslikavo

$$[\cdot,\cdot] : L \times L \to L, (x,y) \mapsto [x,y],$$

ki zadošča naslednjima lastnostima:

1. $[x,x] = 0$ za vse $x \in L$,
2. $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ za vse $x,y,z \in L$.

Bilinearno preslikavo iz definicije imenujemo tudi Liejev oklepaj, $[x,y]$ pa komutator elementov x in y. Lastnosti 2 iz definicije pravimo Jacobijeva identiteta. Iz definicije Liejevega oklepaja sledi nekaj njegovih pomembnih lastnosti:

(a) $[x,y] = -[y,x]$ za vsaka $x,y \in L$ (antisimetričnost).

(b) $[x,0] = 0 = [0,x]$ za vsak $x \in L$.

Lema 1. *Če za elementa x in y iz L velja $[x, y] \neq 0$, potem sta x in y linearno neodvisna.*

Dokaz. To lastnost zlahka dokažemo z negacijo. Predpostavimo, da sta x in y linearno odvisna in želimo pokazati, da velja $[x, y] = 0$. Po predpostavki obstaja neki skalar k iz F, da je $x = ky$. Potem je

$$[x, y] = [ky, y] = k[y, y] = 0.$$

Sedaj si bomo ogledali nekaj osnovnih primerov Liejevih algeber.

Primer 1. Naj bo F polje realnih števil, torej $F = \mathbb{R}$. Potem je $\mathbb{R}^3$ z običajnim vektorskim produktom $(x, y) \mapsto x \times y$ Liejeva algebra nad $\mathbb{R}$. Za komutator dveh elementov torej vzamemo njun vektorski produkt. Utemeljimo sedaj, da je to res Liejeva algebra. Vzemimo elementa $x = (x_1, x_2, x_3)$ in $y = (y_1, y_2, y_3)$ iz $\mathbb{R}^3$. Njun vektorski produkt je potem enak

$$x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Iz linearne algebre se spomnimo, da je $\mathbb{R}^3$ vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ in da je vektorski produkt bilinearen. Prav tako že vemo, da je vektorski produkt vektorja samega s seboj vedno enak 0, oziroma $[x, x] = 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}^3$. Pokažimo sedaj še Jacobijevo identiteto. Pri tem si pomagamo s formulo $x \times (y \times z) = (x \cdot z)y - (x \cdot y)z$, kjer je $x \cdot y$ običajen skalarni produkt vektorjev x in y. Pri računanju uporabimo komutativnost skalarnega produkta.

$$\begin{aligned}
&x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) \\
&= ((x \cdot z)y - (x \cdot y)z) + ((y \cdot x)z - (y \cdot z)x) + ((z \cdot y)x - (z \cdot x)y) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Primer 2 (Komutativne Liejeve algebre). Naj bo V poljuben vektorski prostor. Če definiramo $[x, y] = 0$ za vsaka $x, y \in V$, postane V (skupaj s tako definiranim Liejevim oklepajem) Liejeva algebra. Takim Liejevim algebram pravimo komutativne Liejeve algebre. Iz tega primera je razvidno, da lahko na vsako polje F gledamo kot na 1-dimenzionalno komutativno Liejevo algebro.

Primer 3. Naj bo A poljubna asociativna algebra nad poljem F. Če za Liejev oklepaj poljubnih dveh elementov $x, y \in A$ definiramo

$$[x, y] \coloneqq xy - yx,$$

postane A Liejeva algebra nad F. Res, iz linearne algebre vemo, da je A vektorski prostor. S krajšim računom se lahko prepričamo tudi, da veljata lastnosti 1 in 2, kar prepuščamo bralcu.

Vidimo torej, da vsaka asociativna algebra s tako definiranim Liejevim oklepajem postane Liejeva algebra, zato lahko rečemo, da so Liejeve algebre posplošitev asociativnih algeber. V nadaljevanju si bomo ogledali še nekaj takšnih primerov.

Primer 4 (Splošna linearna algebra). Naj bo V neki končno dimenzionalen vektorski prostor nad poljem F. Označimo z $gl(V)$ množico vseh linearnih preslikav iz V v V. Rečemo ji tudi splošna linearna algebra. Iz linearne algebre vemo, da je $gl(V)$ asociativna algebra nad F, če za operacijo množenja vzamemo kompozitum preslikav. Iz primera 3 sledi, da V postane Liejeva algebra nad F, če definiramo Liejev oklepaj elementov x in y iz $gl(V)$ z naslednjim predpisom:

$$[x, y] \coloneqq x \circ y - y \circ x \quad \text{za vse } x, y \in gl(V),$$

kjer $\circ$ označuje kompozitum preslikav.

Primer 5. Ta primer je podoben primeru 4, le da je v matrični obliki. Definiramo $gl(n, F)$ kot množico vseh $n \times n$ matrik nad poljem F. Tudi $gl(n, F)$ je asociativna algebra nad F. Če definiramo Liejev oklepaj elementov x in y iz $gl(n, F)$ kot

$$[x, y] \coloneqq xy - yx,$$

kjer je xy običajno množenje matrik, postane $gl(n, F)$ Liejeva algebra nad F.

Primer 6 (Specialna linearna algebra). Še en primer Liejeve algebre je $sl(n, F)$, ki ji pravimo specialna linearna algebra. To je podmnožica $gl(n, F)$, definirana kot

$$sl(n, F) = \{A \in gl(n, F) | sled(A) = 0\}.$$

Torej je $sl(n, F)$ množica vseh tistih $n \times n$ matrik nad poljem F, katerih sled (vsota diagonalnih elementov) je enaka 0. Če za Liejev oklepaj definiramo

$$[x, y] \coloneqq xy - yx,$$

postane $sl(n, F)$ Liejeva algebra. Res, saj se vse lastnosti Liejevega oklepaja v tem primeru prenesejo iz $gl(n, F)$. S kratkim računom se bralec lahko hitro prepriča tudi, da je $sl(n, F)$ zaprta za to operacijo, torej da je

$$[x, y] = xy - yx \in sl(n, F).$$

Primer 7. Še ena podmnožica $gl(n, F)$ je Liejeva algebra za isti Liejev oklepaj, kot smo ga definirali v primeru 5. To je množica vseh zgornje trikotnih $n \times n$ matrik nad F, ki jo označimo z $b(n, F)$. Želene lastnosti Liejevega oklepaja se tudi v tem primeru prenesejo iz $gl(n, F)$, velja pa tudi, da je $b(n, F)$ zaprta za to operacijo. To sledi iz dejstva, da je produkt dveh zgornje trikotnih matrik zgornje trikotna matrika in je tudi razlika dveh zgornje trikotnih matrik zgornje trikotna matrika. Zato velja, da je za poljubni zgornje trikotni matriki x in y iz $b(n, F)$ njun Liejev oklepaj $[x, y] = xy - yx$ zgornje trikotna matrika.

Primer 8. Podobno kot v primeru 7 lahko sklepamo, da je tudi množica vseh strogo zgornje trikotnih $n \times n$ matrik Liejeva algebra za Liejev oklepaj, definiran enako kot v primeru 5. Označimo jo z $n(n, F)$ in je, prav tako kot $b(n, F)$, podmnožica splošne linearne algebre.

S pomočjo primerov smo dobili malo boljšo predstavo o Liejevih algebrah. Sedaj pa si oglejmo, kakšne podstrukture lahko nastopajo znotraj njih.

1.2 Podalgebre, ideali in direktna vsota Liejevih algeber

V tem podpoglavju si bomo ogledali nekaj pomembnih podstruktur Liejevih algeber, ki jih bomo kasneje potrebovali za klasifikacijo Liejevih algeber majhnih razsežnosti. Videli bomo tudi, kako iz dveh Liejevih algeber zgradimo novo Liejevo algebro.

Definicija 2. Naj bo L Liejeva algebra. *Liejeva podalgebra* K Liejeve algebre L je vektorski podprostor $K \subseteq L$, za katerega velja

$$[x, y] \in K \quad \text{za vse } x, y \in K.$$

Liejeve podalgebre so same zase Liejeve algebre. Primeri 6, 7 in 8 so primeri Liejevih podalgeber $gl(n, F)$. Pomembni primeri podalgeber so ideali.

Definicija 3. Naj bo L Liejeva algebra. *Ideal* I Liejeve algebre L je vektorski podprostor $I \subseteq L$, za katerega velja

$$[x, y] \in I \text{ za vse } x \in L \text{ in vse } y \in I.$$

Iz definicije sledi, da je vsak ideal tudi podalgebra. Obratno pa ni nujno res: Vsaka Liejeva podalgebra ni nujno ideal. To nam jasno pokaže naslednji primer. Vzemimo kar $b(n, F)$ in $gl(n, F)$. Iz primera 7 je razvidno, da $b(n, F)$ zadošča definiciji za podalgebro $gl(n, F)$, za $n \geq 2$ pa $b(n, F)$ ni ideal $gl(n, F)$. Naj bo namreč e_{ij} matrika, ki ima v i-ti vrstici in j-tem stolpcu enico, povsod drugod pa ničle. Vzemimo sedaj matriko e_{11}, za katero vemo, da je element $b(n, F)$ in matriko e_{21}, ki je element $gl(n, F)$. Njun Liejev oklepaj, torej $[e_{21}, e_{11}] = e_{21}e_{11} - e_{11}e_{21} = e_{21} - 0 = e_{21}$ pa ni element $b(n, F)$, torej $b(n, F)$ ni ideal $gl(n, F)$. Zlahka se prepričamo, da je vsaka Liejeva algebra L sama svoj ideal in tudi da je $\{0\}$ ideal vsake Liejeve algebre. Tema dvema idealoma pravimo trivialna ideala Liejeve algebre L. Pomemben primer ideala, ki je pogosto netrivialen, pa je center $Z(L)$.

Definicija 4. Naj bo L Liejeva algebra. *Center* $Z(L)$ Liejeve algebre L je vektorski podprostor $Z(L) \subseteq L$, podan s predpisom

$$Z(L) = \{x \in L; [x, y] = 0 \ \text{ za vse } y \in L\}.$$

Center Liejeve algebre je torej množica tistih elementov, ki komutirajo z vsemi elementi v tej Liejevi algebri. Iz definicije je razvidno, da je Liejeva algebra L enaka svojemu centru natanko tedaj, ko je L komutativna.

Poglejmo si sedaj, kako lahko iz dveh idealov dobimo nov ideal.

Definicija 5. Naj bosta I in J ideala Liejeve algebre L. *Produkt idealov* I in J je množica

$$[I, J] = \mathfrak{Lin}\{[x, y] : x \in I, y \in J\}.$$

Produkt idealov I in J je torej linearna lupina vseh komutatorjev elementov x in y, pri čemer je x iz I in y iz J. Naslednja trditev pove, da je produkt idealov tudi ideal.

Trditev 2. *Naj bosta I in J ideala Liejeve algebre L. Potem je njun produkt $[I, J]$ ideal v L.*

Dokaz. Že iz definicije sledi, da je $[I, J]$ vektorski podprostor, saj je linearna lupina vseh Liejevih oklepajev elementov x in y, pri čemer je x iz I in y iz J. Želimo pokazati še, da velja

$$[u, v] \in [I, J] \text{ za vse } u \in L \text{ in vse } v \in [I, J].$$

Element v iz $[I, J]$ lahko po definiciji produkta idealov zapišemo na sledeč način:

$$v = \sum_{\substack{\alpha_n \in F \\ x_n \in I,\ y_n \in J}} \alpha_n [x_n, y_n].$$

Iz bilinearnosti Liejevega oklepaja sledi, da je

$$[u, v] = \left[u, \sum_{\substack{\alpha_n \in F \\ x_n \in I,\ y_n \in J}} \alpha_n [x_n, y_n] \right] = \sum_{\substack{\alpha_n \in F \\ x_n \in I,\ y_n \in J}} \alpha_n [u, [x_n, y_n]].$$

Oglejmo si sedaj, kje se nahaja Liejev oklepaj $[u, [x, y]]$ za poljubna $x \in I$ in $y \in J$. Jacobijeva identiteta nam da

$$[u, [x, y]] = [x, [u, y]] + [[u, x], y].$$

Ker sta I in J ideala, velja, da je $[u,x] \in I$ ter $[u,y] \in J$. Zato je $[[u,x],y] \in [I,J]$ ter $[x,[u,y]] \in [I,J]$. Čisto na začetku dokaza smo utemeljili, da je $[I,J]$ vektorski podprostor, zato je tudi vsota $[x,[u,y]] + [[u,x],y] \in [I,J]$. Pokazali smo torej, da je za poljubne elemente $u \in L$, $x \in I$ in $y \in J$ Liejev oklepaj $[u,[x,y]]$ v $[I,J]$. Zato je tudi

$$[u,v] = \sum_{\substack{\alpha_n \in F \\ x_n \in I,\ y_n \in J}} \alpha_n [u,[x_n,y_n]] \in [I,J],$$

saj je $[I,J]$ vektorski podprostor. Tako smo pokazali, da je $[I,J]$ res ideal.

Če namesto idealov I in J vzamemo kar Liejevo algebro L, pa dobimo izpeljano algebro.

Definicija 6. *Izpeljana algebra* L' Liejeve algebre L je

$$L' = [L,L].$$

Ker je Liejeva algebra L tudi ideal, je zgornja definicija smiselna. Oglejmo si primer Liejeve algebre, ki je enaka svoji izpeljani algebri.

Primer 9. Vzemimo množico vseh 2×2 matrik s sledjo 0 nad poljem F, ki nima karatkerstike 2, torej $sl(2,F)$. V primeru 6 smo utemeljili, da je to res Liejeva algebra. Utemeljimo, da velja $sl(2,F) = sl(2,F)'$. Po [3] lahko za bazo $sl(2,F)$ vzamemo $\mathcal{B} = \{x,y,z\}$, pri čemer je

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ker je Liejev oklepaj bilinearen, izpeljano algebro generirajo komutatorji baznih elementov x, y in z. Poglejmo, kateri so ti elementi:

$$\begin{aligned}
[x,y] &= xy - yx = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = z \\
[x,z] &= xz - zx = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -2x \\
[y,z] &= yz - zy = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2y
\end{aligned}$$

Izpeljana algebra je torej generirana z elementi $-2x$, $-2y$ in z. Ker skalarji pri tem ne igrajo nobene vloge, lahko brez škode za splošnost rečemo, da elementi x, y in z generirajo izpeljano algebro oziroma, da je njena baza enaka $\mathcal{B} = \{x,y,z\}$. Ugotovili smo, da imata $sl(2,F)$ in $sl(2,F)'$ isto bazo, zato res sovpadata.

1.2.1 Direktna vsota Liejevih algeber

Recimo, da imamo Liejevi algebri H in K. Ali lahko iz teh dveh algeber na kak način dobimo novo Liejevo algebro? Odgovor na zastavljeno vprašanje podaja naslednja trditev.

Trditev 3. *Naj bosta H in K Liejevi algebri nad poljem F. Definiramo*

$$L := \{(h,k);\ h \in H,\ k \in K\}.$$

Če za Liejev oklepaj vzamemo

$$[(h_1,k_1),(h_2,k_2)] := ([h_1,h_2],[k_1,k_2]),$$

postane L Liejeva algebra.

Pravimo, da je L *direktna vsota* H in K in zapišemo $L = H \oplus K$.

Dokaz trditve v celoti bomo izpustili, vseeno pa se iz linearne algebre spomnimo, da je direktna vsota vektorskih prostorov vektorski prostor. Liejevi algebri H in K sta tudi vektorska prostora, zato je L vektorski prostor. Preveriti je treba le še, da je Liejev oklepaj bilinearen in zadošča lastnostima 1 in 2. Vse to sledi iz definicij, o čemer se bralec lahko prepriča sam.

V nadaljevanju bomo spoznali še dve zanimivi posledici, ki pravita, da za Liejevo algebro L, ki jo lahko zapišemo kot direktno vsoto Liejevih algeber H in K, velja, da lahko tudi njen center zapišemo kot direktno vsoto centrov algeber H in K. Prav tako lahko tudi izpeljano algebro L' zapišemo kot direktno vsoto izpeljanih algeber H' in K'.

Lema 4. *Naj bo Liejeva algebra L direktna vsota Liejevih algeber H in K, torej $L = H \oplus K$. Potem lahko center $Z(L)$ zapišemo kot direktno vsoto centrov $Z(H)$ in $Z(K)$, torej $Z(L) = Z(H) \oplus Z(K)$.*

Dokaz. Po definiciji centra je

$$\begin{aligned} Z(L) &= \{z \in L;\ [z, y] = 0 \text{ za vsak } y \in L\} \\ &= \{(h, k) \in H \oplus K;\ [(h, k), (y_1, y_2)] = (0, 0) \text{ za vsak } (y_1, y_2) \in H \oplus K\}. \end{aligned}$$

Za vsak urejeni par (y_1, y_2) iz $H \oplus K$ torej velja $[(h, k), (y_1, y_2)] = (0, 0)$. Iz tega po definiciji Liejevega oklepaja v L sledi, da mora biti $([h, y_1], [k, y_2]) = (0, 0)$ za vsak (y_1, y_2) iz $H \oplus K$. Zato je $[h, y_1] = 0$ za vsak y_1 iz H, torej je h element $Z(H)$. Podobno je tudi $[k, y_2] = 0$ za vsak y_2 iz K in je zato k element $Z(K)$. Ugotovili smo, da je prva komponenta elementov iz $Z(L)$ iz $Z(H)$, druga komponenta pa je iz $Z(K)$. Obratna inkluzija je očitna. Center $Z(L)$ torej res lahko zapišemo kot direktno vsoto $Z(L) = Z(H) \oplus Z(K)$.

Lema 5. *Naj bo Liejeva algebra L direktna vsota Liejevih algeber H in K, torej $L = H \oplus K$. Potem lahko izpeljano algebro L' zapišemo kot direktno vsoto izpeljanih algeber H' in K', torej $L' = H' \oplus K'$.*

Dokaz. Upoštevamo definicijo izpeljane algebre in Liejevega oklepaja v L in dobimo

$$\begin{aligned} L' &= \mathfrak{Lin}\{[x, y]; x, y \in L\} \\ &= \mathfrak{Lin}\{[(h_1, k_1), (h_2, k_2)];\ h_i \in H,\ k_i \in K \text{ za } i = 1, 2\} \\ &= \mathfrak{Lin}\{([h_1, h_2], [k_1, k_2]);\ h_i \in H,\ k_i \in K \text{ za } i = 1, 2\} \\ &= (\mathfrak{Lin}\{[h_1, h_2];\ h_i \in H \text{ za } i = 1, 2\}, \mathfrak{Lin}\{[k_1, k_2];\ k_i \in K \text{ za } i = 1, 2\}) \\ &= H' \oplus K'. \end{aligned}$$

1.3 Homomorfizmi Liejevih algeber in strukturne konstante

Preden se zares lotimo klasifikacije Liejevih algeber majhnih razsežnosti, moramo pojasniti še, kaj pomeni, da sta dve Liejevi algebri "enaki" oziroma v matematičnem jeziku izomorfni. Poleg tega si bomo ogledali še strukturne konstante. To so skalarji, ki nam povedo, kako se komutatorji izražajo kot linearne kombinacije elementov iz Liejeve algebre.

Definicija 7. Naj bosta L_1 in L_2 Liejevi algebri nad poljem F. Preslikava $\phi : L_1 \to L_2$ je *homomorfizem* Liejevih algeber L_1 in L_2, če velja:

(I) $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$,

(II) $\phi(\lambda x) = \lambda \phi(x)$,

(III) $\phi[x, y] = [\phi(x), \phi(y)]$,

za vse $x, y \in L_1$ in $\lambda \in F$.

Ker mora homomorfizem zadoščati lastnostima I in II, je linearna preslikava. Če je homomorfizem bijektiven, ga imenujemo izomorfizem. Sedaj pa si poglejmo, kaj v matematičnem jeziku pomeni, da sta dve Liejevi algebri "enaki", tj. izomorfni.

Definicija 8. Liejevi algebri L_1 in L_2 sta *izomorfni*, če obstaja izomorfizem

$$\phi : L_1 \to L_2.$$

Izomofrnost algeber L_1 in L_2 označimo z $L_1 \cong L_2$.

Če Liejevi algebri nista izomorfni, pravimo, da sta *neizomorfni.* Za začetek si poglejmo primer homomorfizma

Primer 10. Zelo pomemben primer homomorfizma je *adjungirani homomorfizem.* To je preslikava

$$ad : L \to gl(L),$$

dana s predpisom

$$(ad\ x)(y) := [x, y] \text{ za vsaka } x, y \in L.$$

Ker je Liejev oklepaj bilinearen, je preslikava $ad\ x$ za vsak $x \in L$ linearna. Tudi preslikava $x \mapsto ad\ x$ je iz istega razloga linearna. Da bo $ad\ x$ res homomorfizem, moramo, upoštevajoč definicijo Liejevega oklepaja v $gl(V)$, pokazati še, da je

$$ad([x, y]) = [ad\ x, ad\ y] = ad\ x \circ ad\ y - ad\ y \circ ad\ x \text{ za vse } x, y \in L. \tag{1}$$

Na poljubnem elementu $z \in L$ preverimo, da ta enakost drži. Pri računanju upoštevamo antisimentričnost komutatorja in Jacobijevo identiteto. Torej

$$\begin{aligned} ad([x, y])(z) &= [[x, y], z] = -[z, [x, y]] = [x, [y, z] + [y, [z, x]] \\ &= [x, [y, z]] - [y, [x, z]] = (ad\ x)((ad\ y)(z)) - (ad\ y((ad\ x)(z)) \\ &= (ad\ x \circ ad\ y)(z) - (ad\ y \circ ad\ x)(z). \end{aligned}$$

Ker je to res za vsak $z \in L$, enakost (1) res velja.

Naslednja lema govori o pomembni lastnosti adjungiranega homomorfizma.

Lema 6. *Naj bo L Liejeva algebra in naj bo z neki element izpeljane algebre L'. Potem je $sled(ad\ z) = 0$.*

Preden si pogledamo dokaz, povejmo, kaj je sled linearne preslikave $ad\ x : L \to L$, saj bomo to v nadaljevanju večkrat potrebovali. Iz linearne algebre vemo, da lahko tako linearno preslikavo predstavimo s kvadratno matriko, ki je odvisna od izbire baze. Ta izbira je poljubna, zato lahko to linearno preslikavo predstavimo z neskončno mnogo matrikami. Vendar pa so vse te matrike povezane, so si namreč podobne. Ker sta sledi podobnih matrik enaki, lahko za sled preslikave $ad\ x$ vzamemo sled poljubne pripadajoče matrike. Sedaj pa se vrnimo na dokaz prejšnje leme.

Dokaz. Vsak element iz izpeljane algebre lahko zapišemo kot linearno kombinacijo Liejevih oklepajev $[x, y]$, kjer sta $x, y \in L$. Ker je *sled* linearna preslikava, je dovolj pokazati, da velja

$$sled(ad\ [x, y]) = 0 \text{ za vsaka } x, y \in L.$$

Res, saj je

$$\begin{aligned} sled(ad\ [x,y]) &= sled(ad\ x \circ ad\ y - ad\ y \circ ad\ x) \\ &= sled(ad\ x \circ ad\ y) - sled(ad\ y \circ ad\ x) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pri čemer smo upoštevali, da je $sled(f \circ g) = sled(g \circ f)$ za linearni preslikavi f in g.

Iz naslednje leme sledi pomembna lastnost izomorfizmov, ohranjaje diagonalizabilnosti preslikave $ad\ x$.

Lema 7. *Naj bosta H in K Liejevi algebri in naj bo $\phi : H \to K$ izomorfizem. Potem velja: če je za $h \in H$ preslikava $ad\ h : H \to H$ diagonalizabilna, potem je tudi preslikava $ad\ \phi(h) : K \to K$ diagonalizabilna.*

Dokaz. Predpostavimo, da je za neki element $h \in H$ preslikava $ad\ h : H \to H$ diagonalizabilna. To pomeni, da obstaja taka baza $\mathcal{B}_H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ Liejeve algebre H, da lahko matriko preslikave $ad\ h$ v tej bazi zapišemo v diagonalni obliki:

$$ad\ h = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

Ker je ϕ izomorfizem, iz linearne algebre vemo, da je $\mathcal{B}_K = \{\phi(h_1), \phi(h_2), \ldots, \phi(h_n)\}$ baza za K, velja pa tudi, da za poljubna $x, y \in H$ velja $\phi[x,y] = [\phi(x), \phi(y)]$. Torej velja tudi za h in h_i (za vsak $i = 1, 2, \ldots, n$). Zapišemo lahko

$$[\phi(h), \phi(h_i)] = \phi[h, h_i] = \phi(a_i h_i) = a_i \phi(h_i).$$

Preslikavo $ad\ \phi(h) : K \to K$ lahko zato v bazi $\mathcal{B}_K$ zapišemo z diagonalno matriko

$$ad\ \phi(h) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix},$$

kar pomeni, da je $ad\ \phi(h)$ res diagonalizabilna.

Oglejmo si sedaj še strukturne konstante. To so konstante, ki določajo izražavo komutatorjev kot linearno kombinacijo baznih elementov iz Liejeve algebre. Imejmo torej Liejevo algebro L nad poljem F, katere baza je $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Ker je Liejev oklepaj bilinearen, je komutator $[y, z]$, kjer sta y in z poljubna elementa iz L, natančno določen s komutatorji baznih elementov, torej s komutatorji oblike $[x_i, x_j]$. Tako pridemo do naslednje definicije.

Definicija 9. Naj bo L Liejeva algebra z bazo $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. *Strukturne konstante* L glede na bazo $\mathcal{B}$ so skalarji $a_{ij}^m \in F$, $i, j = 1, 2, ..., n$, $m = 1, 2, ..., n$, za katere je

$$[x_i, x_j] = \sum_{m=1}^{n} a_{ij}^m x_m.$$

Iz definicije je razvidno, da se strukturne konstante nanašajo na določeno bazo Liejeve algebre, zato so strukturne konstante v različnih bazah v splošnem različne. Izjema so komutativne Liejeve algebre, v katerih so strukturne konstante ne glede na izbor baze vselej enake 0. Po lastnosti 1 Liejevega oklepaja sledi, da je $[x_i, x_i] = 0$ za vsak $i = 1, 2, ..., n$, prav tako pa po lastnosti a velja, da je $[x_i, x_j] = -[x_j, x_i]$. Zato je dovolj, da poznamo strukturne konstante a_{ij}^m za $1 < i < j \leq n$. V nadaljevanju si bomo ogledali dva primera strukturnih konstant.

Primer 11. Poiščimo strukturne konstante specialne linearne algebre $sl(2, \mathbb{C})$. V primeru 9 smo videli, da v bazi $\{x, y, z\}$,

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

velja $[x, y] = z$, $[x, z] = -2x$ in $[y, z] = 2y$. Pišemo lahko $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. Strukturne konstante so torej enake

$$\begin{array}{lll} a_{12}^1 = 0 & a_{12}^2 = 0 & a_{12}^3 = 1 \\ a_{13}^1 = -2 & a_{13}^2 = 0 & a_{13}^3 = 0 \\ a_{23}^1 = 0 & a_{23}^2 = 2 & a_{23}^3 = 0 \end{array}$$

Omenimo še, da ima glede na bazo $\{x, y, z\}$ enake strukturne konstante tudi $sl(2, \mathbb{R})$.

Primer 12. Kakšne pa so strukturne konstante za $\mathbb{R}^3$ z običajnim vektorskim produktom? Izberemo si standardno bazo $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ in zapišimo $x_1 = i$, $x_2 = j$, $x_3 = k$. Vemo, da je $[i, j] = k$, $[i, k] = -j$ in $[j, k] = i$. Zato so strukturne konstante enake

$$\begin{array}{lll} a_{12}^1 = 0 & a_{12}^2 = 0 & a_{12}^3 = 1 \\ a_{13}^1 = 0 & a_{13}^2 = -1 & a_{13}^3 = 0 \\ a_{23}^1 = 1 & a_{23}^2 = 0 & a_{23}^3 = 0 \end{array}$$

Sedaj bomo pokazali pomembno trditev, ki pove, kako so povezane strukturne konstante z izomorfnimi Liejevimi algebrami.

Trditev 8. *Naj bosta H in K Liejevi algebri. Potem sta H in K izomorfni natanko tedaj, ko obstajata taki bazi $\mathcal{B}_H$ za H in $\mathcal{B}_K$ za K, da so strukturne konstante H glede na $\mathcal{B}_H$ enake strukturnim konstantam K glede na $\mathcal{B}_K$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Recimo, da sta H in K izomorfni. Naj bo $\phi : H \to K$ izomorfizem, $\mathcal{B}_H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ naj bo baza za H in a_{ij}^m naj bodo strukturne konstante H glede na $\mathcal{B}_H$, torej

$$[h_i, h_j] = \sum_{m=1}^{n} a_{ij}^m h_m.$$

Iščemo tako bazo $\mathcal{B}_K$ za K, da bodo strukturne konstante H glede na $\mathcal{B}_H$ enake strukturnim konstantam K glede na $\mathcal{B}_K$. Trdimo, da je

$$\mathcal{B}_K = \{\phi(h_1), \phi(h_2), \ldots, \phi(h_n)\}$$

iskana baza. Iz linearne algebre vemo, da je to res baza za K, preveriti pa moramo še, ali se strukturne konstante ujemajo. Ker je ϕ izomorfizem, velja

$$\phi[h_i, h_j] = \phi\left(\sum_{m=1}^{n} a_{ij}^m h_m\right) = \sum_{m=1}^{n} a_{ij}^m \phi(h_m) = [\phi(h_i), \phi(h_j)],$$

torej je

$$[\phi(h_i), \phi(h_j)] = \sum_{m=1}^{n} a_{ij}^m \phi(h_m),$$

in se strukturne konstante res ujemajo.

($\Leftarrow$) Recimo, da obstajata taki bazi $\mathcal{B}_H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ in $\mathcal{B}_K = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$, da so strukturne konstante H glede na $\mathcal{B}_H$ enake strukturnim konstantam K glede na $\mathcal{B}_K$. Pišemo lahko

$$[h_i, h_j] = \sum_{m=1}^{n} a_{ij}^m h_m \text{ in } [k_i, k_j] = \sum_{m=1}^{n} a_{ij}^m k_m.$$

Poiskali bomo izomorfizem med H in K. Naj bo $\phi : H \to K$ linearna preslikava, za katero definiramo $\phi(h_i) := k_i$. Iz linearne algebre vemo, da je ϕ izomorfizem H in K, če na njiju gledamo kot na vektorska prostora. Da pa bo ϕ tudi izomorfizem Liejevih algeber, mora veljati še $\phi[x, y] = [\phi(x), \phi(y)]$ za poljubna elementa $x, y \in H$. Ker je Liejev oklepaj bilinearen, zadošča preveriti, da to velja za vsaka bazna elementa h_i, h_j.

$$\begin{aligned}
\phi[h_i, h_j] &= \phi\left(\sum_{m=1}^{n} a_{ij}^m h_m\right) = \sum_{m=1}^{n} a_{ij}^m \phi(h_m) \\
&= \sum_{m=1}^{n} a_{ij}^m k_m = [k_i, k_j] \\
&= [\phi(h_i), \phi(h_j)]
\end{aligned}$$

Izrek pove, da če se strukturne konstante dveh Liejevih algeber ujemajo, sta potem ti dve algebri zagotovo izomorfni. Ni pa nujno, da nista izomorfni, če se strukturne konstante glede na neki bazi ne ujemajo.

2. Liejeve algebre majhnih razsežnosti

Definirali smo vse pomembne pojme, ki jih bomo v nadaljevanju potrebovali za preučevanje Liejevih algeber majhnih razsežnosti. Zanimalo nas bo, koliko različnih (neizomorfnih) Liejevih algeber je in kako jih razvrstiti. Pri organizaciji razvrstitve si bomo pomagali z nekaj lemami, s pomočjo katerih bomo spoznali lastnosti izomorfizmov in katere kriterije lahko uporabimo za klasifikacijo Liejevih algeber. Prva lema pove, da so Liejeve algebre različnih dimenzij zagotovo neizomorfne.

Lema 9. *Liejevi algebri različnih dimenzij ne moreta biti izomorfni.*

Dokaz. Vsaka Liejeva algebra je vektorski prostor. Iz linearne algebre se spomnimo, da sta dva vektorska prostora izomorfna natanko tedaj, ko sta istih dimenzij. Zato dve Liejevi algebri različnih dimenzij ne moreta biti izomorfni, saj nista izomorfni niti kot vektorska prostora.

Ta lema nam omogoča organizacijo razvrstitve Liejevih algeber glede na njihovo dimenzijo. S pomočjo naslednje leme pa bomo spoznali, da izomorfizmi Liejevih algeber ohranjajo izpeljane algebre in centre Liejevih algeber.

Lema 10. *Naj bosta L_1 in L_2 Liejevi algebri nad poljem F in naj bo $\phi : L_1 \to L_2$ izomorfizem. Potem velja:*

(i) $\phi(L_1') = L_2'$,

(ii) $\phi(Z(L_1)) = Z(L_2)$.

Dokaz. Najprej dokažimo, da izomorfizmi ohranjajo izpeljane algebre, torej trditev (i). To bomo naredili v dveh korakih. V prvem koraku bomo pokazali, da velja $\phi(L_1') \subseteq L_2'$, v drugem koraku pa bomo pokazali še $\phi^{-1}(L_2') \subseteq L_1'$. Od tod sledi (i).

1. korak: Želimo pokazati $\phi(L_1') \subseteq L_2'$. Naj bo $e_1 \in L_1'$. Po definiciji L_1' lahko zapišemo $e_1 = \sum_{\substack{\alpha_{ij} \in F \\ l_i, l_j \in L_1}} \alpha_{ij}[l_i, l_j]$. Zanima nas, če je $\phi(e_1) \in L_2'$. Sedaj upoštevamo, da je ϕ izomorfizem in vidimo, da je

$$\phi(e_1) = \phi\left(\sum_{\substack{\alpha_{ij} \in F \\ l_i, l_j \in L_1'}} \alpha_{ij}[l_i, l_j]\right) = \sum_{\substack{\alpha_{ij} \in F \\ l_i, l_j \in L_1}} \alpha_{ij}[\phi(l_i), \phi(l_j)].$$

Kar smo dobili, je linearna kombinacija komutatorjev slik elementov iz L_1. Ker velja $\phi(l_i), \phi(l_j) \in L_2$, je $[\phi(l_i), \phi(l_j)] \in L_2'$. Zato po definiciji L_2' res sledi, da je $\phi(e_1) \in L_2'$.

2. korak: V tem koraku se iz linearne alegbre spomnimo, da je inverz izomorfizma izomorfizem. Sedaj postopamo enako kot v koraku 1 in tako pokažemo, da res velja $\phi^{-1}(L_2') \subseteq L_1'$.

Dokaz trditve (ii) je podoben in prepuščen bralcu.

Iz zadnje leme sledi zelo pomembna posledica, ki nam bo omogočila, da razvrstitev Liejevih algeber organiziramo posebej za komutativne in posebej za nekomutativne Liejeve algebre.

Posledica 11. *Naj bosta H in K Liejevi algebri istih dimenzij. Naj bo H komutativna, K pa nekomutativna. Potem H in K ne moreta biti izomorfni.*

Dokaz. Res, saj je komutator poljubnih dveh elementov iz H enak 0, v K pa morata obstajati vsaj dva elementa x in y, katerih komutator je različen od 0. Če bi bil $\phi : H \to K$ izomorfizem, bi moralo za neka $u, v \in H$ veljati

$$0 = \phi([u, v]) = [\phi(u), \phi(v)] = [x, y] \neq 0,$$

kar pa je protislovje.

Od sedaj naprej bomo razdelili klasifikacijo Liejevih algeber majhnih razsežnosti na komutativne in nekomutativne.

2.1 Komutativne Liejeve algebre

V tem podrazdelku si bomo ogledali koliko različnih komutativnih Liejevih algeber obstaja. Vemo že, da Liejevi algebri različnih dimenzij ne moreta biti izomorfni, zato klasifikacijo ločimo na dimenzije. Čeprav je trenutno naš cilj razvrstiti komutativne Liejeve algebre majhnih razsežnosti, pa bomo videli, da to lahko storimo celo za vse razsežnosti.

Izrek 12. *Naj bosta L_1 in L_2 komutativni Liejevi algebri istih dimenzij nad poljem F. Potem sta L_1 in L_2 izomorfni.*

Dokaz. Ker imata L_1 in L_2 isti dimenziji, iz linearne algebre vemo, da sta izomorfni kot vektorska prostora. Naj bo $\phi : L_1 \to L_2$ izomorfizem L_1 in L_2, pri čemer na ϕ trenutno gledamo kot na izomorfizem vektorskih prostorov. Preslikava ϕ je zato že linearna, da pa bi bila tudi izomorfizem Liejevih algeber, mora veljati še:

$$\phi[x, y] = [\phi(x), \phi(y)]$$

za vsaka $x, y \in L_1$. Obe strani sta očitno enaki 0 in iz tega sledi, da je ϕ res izomorfizem Liejevih algeber L_1 in L_2.

Videli smo, da sta za vsako naravno število n poljubni dve komutativni Liejevi algebri dimenzije n izomorfni. Zato obstaja natanko ena (do izomorfizma natančno) komutativna Liejeva algebra dimenzije n. S tem smo razvrstili vse komutativne Liejeve algebre. Preden se spustimo v študij nekomutativnih Liejevih algeber, pa bomo pokazali še, da so vse 1-razsežne Liejeve algebre komutativne.

Trditev 13. *Vsaka* 1*-dimezionalna Liejeva algebra je komutativna.*

Dokaz. V 1-rasežni Liejevi algebri L sta vsaka dva elementa linearno odvisna, zato je njun komutator po lemi 1 enak 0. Zato je L res komutativna.

Vse Liejeve algebre dimenzije 1 so torej komutativne, in po izreku 12 obstaja natanko ena, do izomorfizma natančno določena Liejeva algebra. V nadaljevanju Liejeveih algeber dimenzije 1 zato ne bomo več obravnavali, saj smo o njih ugotovili vse, kar nas je zanimalo.

2.2 Nekomutativne Liejeve algebre

V tem razdelku se bomo ukvarjali s klasifikacijo nekomutativnih Liejevih algeber majhnih razsežnosti. Premislimo najprej, kako bi jih lahko razvrstili. Po lemi 9 sledi, da Liejeve algebre različnih dimenzij med seboj ne morejo biti izomorfne. Zato bomo iskanje različnih Liejevih algeber ločili glede na njihovo dimenzijo. Ker obravnavamo samo Liejeve algebre majhnih razsežnosti, bomo med seboj ločili Liejeve algebre dimenzije 2 in dimenzije 3 (spomnimo se, da so vse Liejeve algebre dimenzije 1 komutativne in jih v tem razdelku zato ne bomo obravnavali). Vemo, da je center nekomutativne Liejeve algebre L njena prava podmnožica in da je izpeljana algebra L' neničelna. Lema 10 nam pove tudi, da izomorfizmi ohranjajo izpeljane algebre in centre Liejevih algeber, zato bomo iskanje različnih Liejevih algeber od sedaj naprej organizirali glede na lastnosti izpeljanih algeber in centrov Liejevih algeber. Začeli bomo z 2-razsežnimi Liejevimi algebrami, potem pa si bomo pogledali še 3-razsežne.

2.2.1 Dimenzija 2

Oglejmo si najprej nekomutativne Liejeve algebre dimenzije 2. Zanima nas, koliko različnih obstaja in katere so. Recimo torej, da imamo 2-razsežno nekomutativno Liejevo algebro L nad poljem F. Za začetek se bomo vprašali, kaj lahko povemo o njeni izpeljani algebri. Vemo, da izpeljana algebra L' ni trivialna, saj zaradi nekomutativnosti L obstajata taka linearno neodvisna elementa x in y iz L, da je $[x, y] \neq 0$. Za bazo L lahko tako vzamemo kar $\mathcal{B} = \{x, y\}$. Prav element $[x, y]$ generira izpeljano algebro L' in je zato ta 1-razsežna.

Vzemimo sedaj neki neničelni element u iz L' in še en, od njega linearno neodvisen, element v' iz L. To lahko naredimo, saj je L 2-dimenzionalna. Vemo, da je $[u, v']$ v L' in da mora biti komutator $[u, v']$ neničeln, sicer bi bila L komutativna. Ker smo rekli, da je L' 1-dimenzionalna, obstaja tak skalar k iz F, da je $[u, v'] = ku$. Ker skalar ne vpliva na strukturo L, lahko v' zamenjamo z $v = k^{-1}v'$. Potem dobimo $[u, v] = u$. Zdaj lahko preimenujemo spremenljivke in imamo $u = x$, $v = y$, bazo $\mathcal{B} = \{x, y\}$ ter

$$[x, y] = x. \tag{2}$$

Poglejmo sedaj na vse skupaj iz drugega zornega kota: naj bosta x in y taka linearno neodvisna elementa iz L, za katera definiramo $[x, y] = x$. Naj velja tudi $[u, u] = 0$ in $[u, v] = -[v, u]$ za vse elemente u in v iz L. V naslednjem koraku bomo preverili, da tak predpis res določa Liejev oklepaj. Lastnost 1 je izpolnjena že po predpostavkah, pokazati pa moramo še Jacobijevo identiteto.

Vzemimo poljubne tri elemente r, s, t iz F. Vse tri lahko zapišemo kot linearno kombinacijo baznih elementov: $r = ax + by$, $s = cx + dy$, $t = ex + fy$. Želimo pokazati, da velja

$$[r, [s, t]] + [s, [t, r]] + [t, [r, s]] = 0. \tag{3}$$

Namesto elementov r, s, t v levo stran enačbe (3) zapišemo njihovo izražavo z baznima elementoma x in y in tako po nekaj računanja dobimo

$$\begin{aligned}
[r, [s, t]] + [s, [t, r]] + [t, [r, s]] &= [ax + by, cf[x, y] - de[x, y]] \\
&+ [cx + dy, eb[x, y] - fa[x, y]] \\
&+ [ex + fy, ad[x, y] - bc[x, y]] \\
&= [ax + by, cfx - dex] + [cx + dy, ebx - fax] \\
&+ [ex + fy, adx - bcx] \\
&= [by, (cf - de)x] + [dy, (eb - fa)x] + [fy, (ad - bc)x] \\
&= b(de - cf)x + d(fa - eb)x + f(bc - ad)x \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Jacobijeva identiteta je res izpolnjena. Pokazali smo torej, da za nekomutativno 2-dimenzionalno Liejevo algebro obstaja taka baza $\mathcal{B} = \{x, y\}$, da lahko Liejev oklepaj definiramo s predpisom $[x, y] := x$. S pomočjo tega bomo dokazali naslednji izrek.

Izrek 14. *Do izomorfizma natančno obstaja natanko ena 2-dimeznionalna nekomutativna Liejeva algebra nad poljem F.*

Dokaz. Naj bosta L in K nekomutativni 2-dimenzionalni Liejevi algebri nad poljem F. Zgoraj smo videli, da obstajata taki bazi $\mathcal{B}_{\mathcal{L}} = \{x, y\}$ (baza L) in $\mathcal{B}_{\mathcal{K}} = \{u, v\}$ (baza K), da velja $[x, y] = x$ ter $[u, v] = u$. Če za linearno presllikavo $\phi : L \to K$ definiramo

$$\phi(x) = u \text{ in } \phi(y) = v,$$

se zlahka prepričamo, da je ϕ izomorfizem vektorskih prostorov L in K. Ker je ϕ linearna, se moramo prepričati le še, da velja

$$\phi[x, y] = [\phi(x), \phi(y)]. \tag{4}$$

Zaradi bilinearnosti Liejevega oklepaja je res dovolj, da ta pogoj preverimo samo na bazi. Če upoštevamo definicijo Liejevega oklepaja v L, dobimo $\phi[x, y] = \phi(x) = u$. Zdaj upoštevamo definicijo Liejevega oklepaja v K in dobimo $[\phi(x), \phi(y)] = [u, v] = u$. Enakost (4) torej drži. Preslikava ϕ je torej izomorfizem Liejevih algeber L in K. S tem smo pokazali, da med poljubnima nekomutativnima 2- dimenzionalnima Liejevima algebrama lahko najdemo izomorfizem. Zato obstaja natanko ena (do izomorfizma natančno) taka Liejeva algebra.

2.2.2 Dimenzija 3

V tem poglavju se bomo ukvarjali z iskanjem različnih nekomutativnih 3-razsežnih Liejevih algeber. Kot smo že razmislili, lahko iskanje razdelimo glede na lastnosti izpeljane algebre L' in centra $Z(L)$. Ločili bomo primere, ki se bodo med seboj razlikovali v dimeziji izpeljane algebre ter vsebovanosti centra v izpeljani algebri.

2.2.3 Primer, ko je $dimL' = 1$

V tem podrazdelku bomo obravnavali 3-dimenzionalne Liejeve algebre, katerih izpeljana algebra L' je 1-dimenzionalna. Pri tem bomo ločili primera, ko je izpeljana algebra vsebovana v centru in ko ni vsebovana v njem.

(I) Izpeljana algebra je vsebovana v centru: $L' \subseteq Z(L)$. Naslednja trditev nam pove, da obstaja natanko ena takšna Liejeva algebra. Imenujemo jo Heisenbergova algebra.

Izrek 15. *Naj bo L 3-dimenzionalna nekomutativna Liejeva algebra nad poljem F. Naj bo izpeljana algebra L' 1-dimenzionalna in vsebovana v centru, torej $L' \subseteq Z(L)$. Potem do izomorfizma natančno obstaja natanko ena taka Liejeva algebra.*

Dokaz. Najprej bomo pokazali, da za L obstaja taka baza $\mathcal{B} = \{x, y, z\}$, da velja $[x, y] = z$ ter je z vsebovan v centru. Potem bomo med poljubnima 3-dimenzionalnima nekomutativnima Liejevima algebrama z 1-dimenzionalno izpeljano algebro poiskali izomorfizem in tako prišli do zaključka, da res obstaja (do izomorfizma natančno) natanko ena.

Vzemimo taka linearno neodvisna elementa x in y iz L, da je $[x, y] \neq 0$. To lahko naredimo, saj je L nekomutativna. Ker smo predpostavili, da je izpeljana algebra L' 1-dimenzionalna, jo lahko zapišemo kot linearno kombinacijo elementa $[x, y]$. V matematičnem jeziku to pomeni

$$L' = \mathfrak{Lin}\{[x, y]\} = \{\alpha[x, y];\ \alpha \in F\}.$$

Iz predpostavk sledi tudi, da $[x, y]$ komutira z vsemi elementi iz L, saj je izpeljana algebra vsebovana v centru. Za vsak element w iz L torej velja enakost

$$[[x, y], w] = 0. \tag{5}$$

Sedaj vpeljimo oznako

$$z = [x, y]. \tag{6}$$

Preveriti moramo, da so x, y in z linearno neodvisni. Če to drži, potem res tvorijo bazo L. Zapišimo ničlo kot linearno kombinacijo baznih elementov, torej $ax + by + cz = 0$. Pokazati želimo, da so skalarji $a, b, c \in F$ vsi enaki 0. Upoštevamo (6) in dobimo

$$ax + by + c[x, y] = 0. \tag{7}$$

Iz enakosti (5) sledi, da je

$$[c[x, y], w] = 0 \text{ za vse } w \text{ iz } L. \tag{8}$$

Iz enakosti (5) in (7) tako dobimo

$$[-ax - by, w] = 0 \text{ za vse } w \text{ iz } L,$$

oziroma

$$-a[x, w] - b[y, w] = 0 \text{ za vse } w \text{ iz } L. \tag{9}$$

Ker to velja za vse elemente iz L, velja tudi za x. Zato je

$$-a[x, x] - b[y, x] = b[x, y] = 0.$$

Rekli smo, da je $[x, y]$ neničelni element, torej mora biti $b = 0$. Podobno dobimo, če v enačbo (9) namesto w vstavimo y, torej

$$-a[x, y] - b[y, y] = -a[x, y] = 0.$$

Iz tega sledi, da mora biti $a = 0$. Na koncu upoštevamo še enačbo (7), ki se sedaj, ko vemo, da je $a = 0$ in $b = 0$, poenostavi v

$$c[x, y] = 0.$$

Zaključimo, da mora biti tudi $c = 0$. Skalarji a, b, c so vsi enaki 0, torej so elementi x, y, z res lienarno neodvisni in sestavljajo bazo Liejeve algebre L. Pokazali smo torej, da za vsako 3-dimezionalno nekomutativno Liejevo algebro, katere izpeljana algebra je 1-dimenzionalna in vsebovana v centru, obstaja baza iz elementov x, y, z in velja $[x, y] = z$ ter je z vsebovan v $Z(L)$.

Naj bosta sedaj L in K Liejevi algebri, ki ustrezata predpostavkam izreka, ki ga dokazujemo. Ravnokar smo videli, da obstajata taki bazi $\mathcal{B}_{\mathcal{L}} = \{x, y, z\}$ in $\mathcal{B}_{\mathcal{K}} = \{u, v, w\}$, da velja $[x, y] = z$ ter $[u, v] = w$, pri čemer je z vsebovan v $Z(L)$ in w vsebovan v $Z(K)$. Iščemo izomorfizem med L in K.

Naj bo $\phi : L \to K$ linearna preslikava, za katero velja

$$\phi(x) = u,\ \phi(y) = v,\ \phi(z) = w.$$

Prepričati se moramo še, da je ϕ izomorfizem L in K. Ker je ϕ že linearna, je dovolj preveriti, da velja

$$\phi[s, t] = [\phi(s), \phi(t)] \text{ za vsaka } s \text{ in } t \text{ iz } L.$$

To storimo na enak način kot pri dokazu izreka 14 - enakost je zaradi bilinearnosti komutatorja dovolj preveriti le na baznih elementih. Uspeli smo najti izomorfizem med poljubnima 3-dimezionalnima nekomutativnima Liejevima algebrama, katerih izpeljana algebra je 1-dimenzionalna in vsebovana v centru, torej obstaja (do izomorfizma natančno) ena sama.

Oglejmo si primer take Liejeve algebre.

Primer 13. Naj bo $L = n(3, F)$. To je Liejeva algebra vseh strogo zgornje trikotnih 3×3 matrik nad poljem F (to algebro smo podrobneje obravnavali v primeru 8). Liejev oklepaj je definiran s predpisom $[x, y] = xy - yx$. Če za bazo vzamemo

$$e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

hitro vidimo, da je

$$[e_{12}, e_{23}] = e_{13},\ [e_{12}, e_{13}] = 0,\ [e_{23}, e_{13}] = 0.$$

Z nekaj računanja pridemo do zaključka, da je izpeljana algebra enaka

$$n'(3, F) = \{ke_{13};\ k \in F\},$$

torej je res 1-dimenzionalna. Tudi center je $Z(n(3, F)) = \{ke_{13};\ k \in F\}$. Opazimo, da je izpeljana algebra res vsebovana v centru oziroma še več, da sta celo enaka.

(II) Izpeljana algebra ni vsebovana v centru: $L' \not\subseteq Z(L)$. Pri raziskovanju nekomutativne 3-dimenzionalne Liejeve algebre, katere izpeljana algebra je 1-dimenzionalna in ni vsebovana v centru, si bomo pomagali z lemama 4 in 5, ki govorita o direktni vsoti Liejevih algeber, njenem centru in izpeljani algebri.

Naj bo L 3-dimenzionalna nekomutativna Liejeva algebra, ki je direktna vsota 2-dimenzionalne nekomutativne Liejeve algebre L_1 in 1-dimenzionalne Liejeve algebre L_2, torej

$$L = L_1 \oplus L_2$$

Iz leme 5 in dejstva, da je $L_2' = \{0\}$, sledi, da je

$$L' = L_1' \oplus L_2' = L_1'.$$

V razdelku 2.2.1 smo utemeljili, da je L_1' 1-dimenzionalna. Lema 4 ter dejstvi, da je $Z(L_1) = 0$ in $Z(L_2) = L_2$, pa nam dajo

$$Z(L) = Z(L_1) \oplus Z(L_2) = L_2.$$

Vidimo lahko, da izpeljana algebra L' ni vsebovana v centru $Z(L)$. Liejeva algebra L ustreza vsem predpostavkam, ki jih obravnavamo v tem primeru. Pokazali bomo, da lahko vsako nekomutativno 3-dimenzionalna Liejevo algebro, katere izpeljana algebra je 1-dimenzionalna in ni vsebovana v centru, zapišemo kot direktno vsoto dveh Liejevih algeber, od katerih je ena 1-dimenzionalna, druga pa je nekomutativna in 2-dimenzionalna. Naslednji izrek nam pove, da obstaja natanko ena taka (do izomorfizma natančno) Liejeva algebra.

Izrek 16. *Do izomorfizma natančno obstaja natanko ena 3-dimenzionalna nekomutativna Liejeva algebra nad poljem F, katere izpeljana algebra je 1-dimenzionalna in ni vsebovana v centru.*

Dokaz. Naj bo L nekomutativna 3-dimenzionalna Liejeva algebra nad poljem F. Naj bo njena izpeljana algebra L' 1-dimenzionalna in naj velja $L' \not\subseteq Z(L)$. Vzemimo sedaj neki neničelni element $x \in L'$, ki ni element centra $Z(L)$. Tak element obstaja, saj L' ni vsebovana v $Z(L)$. Ker x ni iz centra $Z(L)$, zagotovo obstaja tak element $\tilde{y} \in L$, da velja $[x, \tilde{y}] \neq 0$. Po lemi 1 sledi, da sta x in $\tilde{y}$ linearno neodvisna. Izpeljana algebra L' je 1-dimenzionalna, torej je generirana z elementom x. Zato je $[x, \tilde{y}] = kx$ za neki neničeln k iz F. Pišimo $y = k^{-1}\tilde{y}$. Sedaj velja $[x, y] = x$. Ker je L 3-dimenzionalna, lahko najdemo tak element z, da bodo x, y in z tvorili bazo L. Rekli smo, da je L' generirana z elementom x, zato vemo, da obstajata taka skalarja a in b iz F, da velja

$$[x, z] = ax \text{ in } [y, z] = bx.$$

Trdimo, da L vsebuje neničelni element w iz centra $Z(L)$, ki ni vsebovan v linearni lupini elementov x in y. Zapišimo w kot linearno kombinacijo baznih elementov:

$$w = \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

Računajmo:

$$\begin{aligned}[x, w] &= [x, \alpha x + \beta y + \gamma z] = \beta x + \gamma a x \\ [y, w] &= [y, \alpha x + \beta y + \gamma z] = -\alpha x + \gamma b x\end{aligned}$$

Če vzamemo $\alpha = b$, $\beta = -a$ in $\gamma = 1$, dobimo $[x, w] = 0$, $[y, w] = 0$ ter $[z, w] = 0$, zato je w res element centra $Z(L)$. Hkrati pa velja $w = bx - ay + z$, zato w ni v linearni lupini elementov x in y.

S tem smo prišli do zaključka, da L res lahko zapišemo kot direktno vsoto nekomutativne 2-dimenzionalne Liejeve algebre in 1-dimenzionalne Liejeve algebre oziroma

$$L = \mathfrak{Lin}\{x, y\} \oplus \mathfrak{Lin}\{w\}.$$

Pokažimo sedaj, da obstaja natanko ena (do izomorfizma natančno) taka Liejeva algebra L. Imejmo torej Liejevi algebri H in K, ki zadoščata predpostavkam izreka, ki ga dokazujemo. Iščemo izomorfizem med njima. Zapišemo lahko

$$H = \mathfrak{Lin}\{x, y\} \oplus \mathfrak{Lin}\{z\} \text{ in } K = \mathfrak{Lin}\{u, v\} \oplus \mathfrak{Lin}\{w\},$$

pri čemer imajo elementi x, y, z, u, v in w ustrezne lastnosti (kot zgoraj). Če za linearno preslikavo $\phi : H \to K$ definiramo

$$\phi(x) = u,\ \phi(y) = v,\ \phi(z) = w,$$

se zlahka prepričamo (podobno kot v dokazu izreka 14), da je ϕ izomorfizem Liejevih algeber H in K.

Poglejmo si primer Liejeve algebre iz izreka 16. Vse ostale Liejeve algebre z istimi lastnostmi so potem po istem izreku izomorfne temu primeru.

Primer 14. Vzemimo množico vseh zgornje trikotnih 2×2 matrik nad $\mathbb{R}$. To je 3-razsežna Liejeva algebra, ki smo jo spoznali v primeru 7. Označimo jo z $b(2, \mathbb{R})$. Za bazo lahko vzamemo $\mathcal{B} = \{x, y, z\}$, pri čemer so

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Komutatorji baznih elementov so

$$[x, y] = x,\ [x, z] = 0,\ [y, z] = 0,$$

torej je izpeljana algebra res 1-razsežna, saj je generirana z baznim elementom x. Poleg tega pa lahko s kratkim računom preverimo, da je center generiran z elementom z, torej izpeljana algebra res ni vsebovana v centru. S tem smo preverili, da $b(2, \mathbb{R})$ zadošča vsem predpostavkam izreka 16. Zapišemo jo lahko kot $b(2, \mathbb{R}) = \mathfrak{Lin}\{x, y\} \oplus \mathfrak{Lin}\{z\}$.

2.2.4 Primer, ko je $dim\ L' = 2$

V tem podrazdelku bomo obravnavali 3-dimenzionalne nekomutativne Liejeve algebre, katerih izpeljana algebra je 2-dimenzionalna. Dokazali bomo, da obstaja, če za polje F vzamemo kompleksna števila $\mathbb{C}$, neskončno mnogo takih neizomorfnih Liejevih algeber. Še prej pa bomo pokazali, da so izpeljane algebre Liejevih algeber, obravnavanih v tem podrazdelku, komutativne in da je preslikava $ad\ x : L' \to L'$ (ki smo jo definirali v primeru 10), izomorfizem. Videli bomo tudi, da lahko iz dveh vektorskih prostorov in nekega izomorfizma skonstruiramo Liejevo algebro. Vse to bomo kasneje uporabili pri dokazovanju.

Lema 17. *Naj bo L 3-dimenzionalna nekomutativna Liejeva algebra, katere izpeljana algebra L' je 2-dimenzionalna. Potem je L' komutativna.*

Dokaz. Naj bo $\mathcal{B} = \{x, y\}$ baza za L'. Zaradi bilinearnosti Liejevega oklepaja je dovolj pokazati, da je $[x, y] = 0$. Po definiciji izpeljane algebre element $[x, y]$ leži v L', zato obstajata taka skalarja a in b iz F, da je $[x, y] = ax + by$. Spomnimo se sedaj definicije preslikave $ad\ x : L' \to L'$, $(ad\ x)(y) := [x, y]$. Če zapišemo njeno matriko, je ta enaka

$$ad\ x = \begin{pmatrix} 0 & a & * \\ 0 & b & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kjer $*$ označuje skalarja, ki za nas nista pomembna. Hitro vidimo, da je $sled(ad\ x) = b$. Ker je $x \in L'$, po lemi 6 sledi, da je $b = 0$. Če namesto matrike $ad\ x$ zapišemo matriko preslikave $ad\ y$, na enak način dobimo, da je $a = 0$. Torej je res $[x, y] = 0$.

Lema 18. *Naj bo L 3-dimenzionalna nekomutativna Liejeva algebra, katere izpeljana algebra L' je 2-dimenzionalna z bazo $\mathcal{B} = \{x, y\}$. Naj bo $z \in L$ in $z \notin \mathfrak{Lin}\{x, y\}$. Potem je preslikava $ad\ z : L' \to L'$ izomorfizem.*

Dokaz. Pokazali smo že, da je preslikava $ad\ z$ homomorfizem (to smo naredili v primeru 10). Sedaj se moramo prepričati še, da je $ad\ z$ bijektivna. Naj bo $\mathcal{B} = \{x, y\}$ baza za L' in naj bo $z \in L$ linearno neodvisen od x in y. Izpeljana algebra L' je generirana z elementi $[x, y], [z, x]$ in $[z, y]$. V dokazu leme 17 smo videli, da je $[x, y] = 0$. Ker je L' 2-dimenzionalna, lahko zaključimo, da je tudi množica $\mathcal{B}' = \{[z, x], [z, y]\}$ baza za L'. Elementa $\mathcal{B}'$ sta ravno generatorja slike preslikave $ad\ z$, zato je le-ta res izomorfizem.

Lema 19. *Naj bo L 3-dimenzionalen vektorski prostor nad F, ki ga zapišemo kot direktno vsoto $L = V \oplus \mathfrak{Lin}\{x\}$, pri čemer je V 2-razsežen vektorski prostor in x neničeln vektor. Naj bo $\phi : V \to V$ izomorfizem. Če definiramo Liejev oklepaj v L s predpisom*

$$[y, z] = 0 \ \textit{in}\ [x, y] = \phi(y) \ \textit{za vsaka}\ y, z \in V,$$

postane L Liejeva algebra in velja $dimL' = rang(\phi) = 2$.

Dokaz. Naj bo $L = V \oplus \mathfrak{Lin}\{x\}$, kjer je V 2-dimenzionalen vektorski prostor in x neničeln vektor. Na začetku bomo preverili, da Liejev oklepaj ustreza definiciji, saj je L že po predpostavki vektorski prostor. Prepričajmo se o bilinearnosti Liejevega oklepaja le v netrivialnem primeru, ko je eden od faktorjev iz $\mathfrak{Lin}\{x\}$, drugi pa iz V.

$$\begin{aligned}[\alpha x, \beta y + \gamma z] &= \alpha\phi(\beta y + \gamma z) = \alpha\phi(\beta y) + \alpha\phi(\gamma z) = \alpha\beta\phi(y) + \alpha\gamma\phi(z) \\ &= \alpha\beta[x, y] + \alpha\gamma[x, z].\end{aligned}$$

Dokazati moramo še Jacobijevo identiteto. Zaradi ravnokar dokazane bilinearnosti je dovolj, če Jacobijevo identiteto izračunamo samo na elementih x ter linearno neodvisnih $y, z \in V$. Pri tem upoštevamo definicijo Liejevega oklepaja iz predpostavk. Dobimo

$$\begin{aligned}[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] &= [x, 0] + [y, \phi(z)] + [z, \phi(y)] \\ &= 0 + 0 + 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Uspeli smo dokazati, da je L res Liejeva algebra. Preostane nam še dokaz, da je $dimL' = rang(\phi)$. Ker je ϕ surjektiven, je $rang(\phi) = dimV = 2$. Prepričajmo se, da je tudi $dimL' = 2$. Dovolj je, da se prepričamo, da je L' enak zalogi vrednosti preslikave ϕ. To pa očitno sledi iz definicije Liejevega oklepaja v L.

Sedaj si bomo podrobneje ogledali nekomutativne 3-razsežne Liejeve algebre, katerih izpeljana algebra je 2-razsežna. Obravnavali bomo Liejeve algebre nad kompleksnimi števili, saj bomo potrebovali lastne vrednosti homomorfizmov. V algebraično zaprtem polju kompleksnih števil jih vedno lahko najdemo.

Naj bo L Liejeva algebra nad $\mathbb{C}$, ki ima vse ravnokar omenjene lastnosti. Recimo, da obstaja taki neničeln element $\tilde{x} \notin L'$, da je preslikava $ad\ \tilde{x} : L' \to L'$ diagonalizabilna. Naj bosta linearno

neodvisna vektorja y in z iz L' lastna vektorja te preslikave. Ker je $ad\ \tilde{x}$ po lemi 18 izomorfizem, sta njuni pripadajoči lastni vrednosti neničelni. Recimo, da je $\alpha \in \mathbb{C}$ lastna vrednost, ki pripada y, torej $(ad\ \tilde{x})(y) = [\tilde{x}, y] = \alpha y$. Naj bo sedaj $x = \alpha^{-1}\tilde{x}$. Hitro vidimo, da je tudi preslikava $ad\ x : L' \to L'$ diagonalizabilna (množenje s skalarjem tega dejstva ne spremeni) in velja $[x, y] = [\alpha^{-1}\tilde{x}, y] = y$. Neničelna lastna vrednost, ki pripada lastnemu vektorju z za preslikavo $ad\ x$, pa naj bo $\beta \in \mathbb{C}$. V bazi izpeljane algebre $\mathcal{B}' = \{y, z\}$ preslikavo $ad\ x : L' \to L'$ predstavimo z matriko

$$ad\ x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Preslikava $ad\ x$ je izomorfizem, jasno pa je tudi, da lahko L zapišemo kot direktno vsoto $L = L' \oplus \mathfrak{Lin}\{x\}$. Če definiramo sedaj

$$[y, z] := 0 \text{ in } [x, y] := (ad\ x)(y) \text{ za vsaka } y, z \in L',$$

so izpolnjene vse predpostavke leme 19 za $\phi = ad\ x$. Zato vemo, da smo tako dobili novo Liejevo algebro, ki je tudi 3-razsežna in ima 2-razsežno izpeljano algebro. Imenujmo jo L_β.

Sedaj bomo pokazali, da sta Liejevi algebri L_β in L_γ izomorfni natanko tedaj, ko je $\beta = \gamma$ ali $\beta = \gamma^{-1}$. V nadaljevanju naj bo $\mathcal{B}_\beta = \{x, y, z\}$ baza Liejeve algebre L_β in naj velja, da je njena izpeljana algebra enaka $L'_\beta = \mathfrak{Lin}\{y, z\}$. Podobno naj bo $\mathcal{B}_\gamma = \{u, v, w\}$ baza L_γ in izpeljana algebra enaka $L'_\gamma = \mathfrak{Lin}\{v, w\}$.

Najprej se lotimo implikacije v levo smer. Dokazujemo torej, da sta za $\beta = \gamma$ ali $\beta = \gamma^{-1}$ Liejevi algebri L_β in L_γ izomorfni. Za trivialen primer, ko je $\beta = \gamma$, vzamemo za izomorfizem kar identiteto. Malo več dela nam ostane za primer, ko je $\beta = \gamma^{-1}$ oziroma $\gamma = \beta^{-1}$. Iščemo izomorfizem $\phi : L_\beta \to L_{\beta^{-1}}$. Opazimo lahko, da preslikavi $\beta^{-1} ad\ x$ v bazi $\{y, z\}$ pripada matrika

$$\beta^{-1} ad\ x = \begin{pmatrix} \beta^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ki pa je ravno matrika preslikave $ad\ u : L'_{\beta^{-1}} \to L'_{\beta^{-1}}$ v bazi $\{v, w\}$, če zamenjamo stolpce in vrstice, oziroma

$$ad\ u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix}.$$

Tako pridemo do izomorfizma. Za linearno preslikavo ϕ definiramo

$$\phi(x) := \beta u,\ \phi(y) := w \text{ in } \phi(z) := v.$$

Zlahka se prepričamo, da je to res izomorfizem. Preveriti moramo le še, da za poljubna elementa $s, t \in L_\beta$ velja $\phi[s, t] = [\phi(s), \phi(t)]$. Zaradi bilinearnosti Liejevega oklepaja je to dovolj storiti le na bazi $\mathcal{B}_\beta = \{x, y, z\}$. Upoštevamo definicijo preslikave ϕ ter lastnosti Liejevega oklepaja in dobimo

$$\begin{aligned}
\phi[x, y] &= \phi(y) = w = \beta\beta^{-1}w = \beta[u, w] = [\beta u, w] = [\phi(x), \phi(y)] \\
\phi[x, z] &= \phi(\beta z) = \beta\phi(z) = \beta v = \beta[u, v] = [\beta u, v] = [\phi(x), \phi(z)] \\
\phi[y, z] &= \phi(0) = 0 = [v, w] = [\phi(y), \phi(z)].
\end{aligned}$$

Ostane nam še implikacija v desno. Dokazali bomo, da velja $\beta = \gamma$ ali $\beta = \gamma^{-1}$, če sta L_β in L_γ izomorfni. Naj bo $\phi : L_\beta \to L_\gamma$ izomorfizem. Po lemi 10 sledi, da je ϕ tudi izomorfizem med izpeljanima algebrama L'_β in L'_γ. Ker je ϕ surjektiven, vemo, da obstaja tak neničelni skalar $a \in F$ in tak vektor $r \in L'_\gamma$, da je $\phi(x) = au + r$. Naj bo sedaj s neki element iz L'_β. Iz dejstva, da je ϕ izomorfizem, sledi, da je

$$\begin{aligned}
&[\phi(x), \phi(s)] = \phi[x, s] = (\phi \circ (ad\ x))s \\
&[\phi(x), \phi(s)] = [au + r, \phi(s)] = [au, \phi(s)] + [r, \phi(s)] = (ad\ au \circ \phi)s
\end{aligned}$$

za vsak s iz L'_β. Iz tega lahko zaključimo, da mora veljati

$$\phi \circ ad\ x = ad\ (au) \circ \phi.$$

Preslikavi oziroma matriki $ad\ x$ in $ad\ (au)$ sta si podobni, saj je ϕ izomorfizem. Zato morata imeti enako množico lastnih vrednosti. Velja torej

$$\{1, \beta\} = \{a, a\gamma\}.$$

Tukaj nastopita dve možnosti:

- $a = 1$ in $\beta = \gamma$.
- $a = \beta$ in $\beta\gamma = 1$, oziroma $\beta = \gamma^{-1}$.

Videli smo, da sta Liejevi algebri L_β in L_γ res izomorfni natanko tedaj, ko je $\beta = \gamma$ ali $\beta = \gamma^{-1}$. S tem razmislekom smo dokazali naslednji izrek:

Izrek 20. *Za vsako kompleksno število $\alpha \in \mathbb{C}$ obstaja 3-dimenzionalna nekomutativna Liejeva algebra L_α nad $\mathbb{C}$, katere izpeljana algebra je 2-razsežna in je za neki $x \notin L'_\alpha$ preslikava $ad\ x$ diagonalizabilna. Vsaka Liejeva algebra s temi lastnosti je izomorfna algebri L_α za neki $\alpha \in \mathbb{C}$. Pri tem sta Liejevi algebri L_β in L_γ izomorfni natanko tedaj, ko je $\beta = \gamma$ ali $\beta = \gamma^{-1}$.*

Oglejmo si sedaj še nekomutativno 3-razsežno Liejevo algebro L, ki ima 2-razsežno izpeljano algebro in za noben $x \notin L'$ preslikava $ad\ x$ ni diagonalizabilna. Naj bo $\tilde{x} \notin L'$. Naj bo y lastni vektor preslikave $ad\ \tilde{x} : L' \to L'$. Potem velja $[\tilde{x}, y] = \alpha y$ za neki neničelni skalar $\alpha \in F$. Če nadomestimo $\tilde{x}$ z $x = \alpha^{-1}\tilde{x}$, dobimo $[x, y] = y$. Za preslikavo $ad\ x$ je y lastni vektor, njegova pripadajoča lastna vrednost pa je enaka 1. Sedaj si izberemo neki od y linearno neodvisen element $\tilde{z} \in L'$. Tako smo dobili bazo izpeljane algebre: $\mathcal{B}_{L'} = \{y, \tilde{z}\}$. Ker smo predpostavili, da za noben x preslikava $ad\ x$ ni diagonalizabilna, mora obstajati tak neničeln skalar $a \in F$, da velja $[x, \tilde{z}] = ay + b\tilde{z}$ za neki skalar $b \in F$. Z ustreznim raztegom vektorja $\tilde{z}$ lahko dosežemo, da je $a = 1$. Res, naj bo $z = a^{-1}\tilde{z}$. Potem dobimo $[x, z] = [x, a^{-1}\tilde{z}] = y + ba^{-1}az = y + bz$. V bazi $\{y, z\}$ ima preslikava $ad\ x$ obliko

$$ad\ x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Ker $ad\ x$ ni diagonalizabilna, ne more imeti dveh različnih lastnih vrednosti. Zato je $b = 1$. To natanko določa Liejevo algebro, ki jo obravnavamo v tem primeru. S tem smo dokazali naslednji izrek:

Izrek 21. *Do izomorfizma natančno obstaja natanko ena nekomutativna 3-razsežna Liejeva algebra nad poljem kompleksnih števil $\mathbb{C}$, katere izpeljana algebra je 2-dimenzionalna in za noben $x \notin L'$ preslikava $ad\ x$ ni diagonalizabilna.*

2.2.5 Primer, ko je $dim\ L' = 3$

Za konec se bomo vprašali še, koliko je neizomorfnih nekomutativnih 3-razsežnih Liejevih algeber, ki so enake svoji izpeljani algebri. Najprej bomo obravnavali samo kompleksne algebre in bomo pokazali, da, do izomorfizma natančno, obstaja natanko ena Liejeva algebra, ki zadošča vsem tem lastnostim. Spoznali smo že en primer take Liejeve algebre. To je bila specialna linearna algebra $sl(2, \mathbb{C})$, ki smo si jo bolj podrobno ogledali v primeru 9. Predstavljamo si torej lahko, da so vse nekomutativne 3-razsežne kompleksne Liejeve algebre, ki so enake svoji izpeljani algebri, izomorfne $sl(2, \mathbb{C})$. Kasneje pa bomo ugotovili tudi, da nad poljem realnih števil $\mathbb{R}$ obstajata natanko dve neizomorfni 3-razsežni nekomutativni Liejevi algebri, ki sta enaki svojima izpeljanima algebrama.

Začnimo torej s kompleksnimi 3-razsežnimi Liejevimi algebrami, za katere je tudi izpeljana algebra 3-dimenzionalna.

Izrek 22. *Do izomorfizma natančno obstaja natanko ena 3-razsežna nekomutativna Liejeva algebra L nad poljem kompleksnih števil $\mathbb{C}$, ki je enaka svoji izpeljani algebri, torej $L' = L$.*

Dokaz. Naj bo L nekomutativna 3-razsežna Liejeva algebra nad $\mathbb{C}$, ki je enaka svoji izpeljani algebri. Za boljšo orientacijo bo dokaz razdeljen v štiri dele. Kasneje nam bo taka delitev prišla prav, saj bomo te dele poizkusili izvesti še v polju realnih števil (pri dokazu izreka 23).

1. del: Naj bo $\mathcal{B} = \{x, y, z\}$ baza Liejeve algebre L. Pokažimo, da je $rang(ad\ x) = 2$. Izpeljana algebra L' je generirana z elementi $[x, y]$, $[x, z]$ in $[y, z]$ in ker je 3-razsežna, morajo biti ti elementi med seboj linearno neodvisni. Zato je rang preslikave $ad\ x$ enak 2, saj sta v bazi njene slike, ki je enaka $\mathcal{B}_{Im(ad\ x)} = \{[x, y], [x, z]\}$, dva linearno neodvisna elementa.

2. del: Sedaj bomo poiskali tak element $l \in L$, za katerega ima preslikava $ad\ l : L \to L$ lasten vektor, kateremu pripadajoča lastna vrednost je neničelna. Izberimo poljuben element $x \in L$. Če ima preslikava $ad\ x : L \to L$ neničelno lastno vrednost, vzamemo kar $l = x$. Če pa ima $ad\ x$ same ničelne lastne vrednosti, zapišemo Jordanovo formo te preslikave, ki je enaka

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kletka je res ena sama, saj smo v delu 1 pokazali, da je preslikava $ad\ x$ ranga 2, torej je dimenzija njenega jedra enaka 1. Ker sta si matriki preslikave $ad\ x$ in J podobni, lahko sklepamo, da obstaja taka baza $\mathcal{B}' = \{x, u, v\}$ Liejeve algebre L, da velja $[x, u] = x$ in $[x, v] = u$. Iz tega takoj razberemo, da je x lastni vektor preslikave $ad\ u$, saj velja $[u, x] = -x$. Njegova pripadajoča lastna vrednost je enaka -1. V tem primeru zato vzamemo $l = u$.

3. del: V prejšnjem delu smo pokazali, da lahko najdemo taka neničelna elementa l in $\tilde{x}$ iz L, da je $[l, \tilde{x}] = a\tilde{x}$ za neki neničelni skalar $a \in \mathbb{C}$. Ker je l iz L in je izpeljana algebra enaka $L' = L$, je l tudi element L'. Po lemi 6 sledi, da je $sled(ad\ l) = 0$. Iz linearne algebre je znano, da je sled enaka vsoti lastnih vrednosti. Zato ima $ad\ l$ tri različne lastne vrednosti, ki so $a, -a$ in 0. Recimo, da je $y \in L$ lastni vektor za $ad\ l$, ki mu pripada lastna vrednost $-a$. Potem so $\tilde{x}, y$ in l linearno neodvisni in tvorijo bazo za L, torej $\mathcal{B}'' = \{\tilde{x}, y, l\}$. V tej bazi lahko preslikavo $ad\ l$ predstavimo z diagonalno matriko

$$ad\ l = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. del: Da bo Liejeva algebra natančno definirana, moramo vedeti, kakšen je Liejev oklepaj za poljubna dva elementa iz L. Naj bodo elementi $l, \tilde{x}$ in y takšni kot v delu 3. Vidimo, da po Jacobijevi identiteti ter lastnostih teh treh elementov velja

$$[l, [\tilde{x}, y]] = [[l, \tilde{x}], y] + [\tilde{x}, [l, y]] = a[\tilde{x}, y] + (-a)[\tilde{x}, y] = 0. \tag{10}$$

Ker je po delu 1 rang preslikave $ad\ l$ enak 2, sledi, da je njeno jedro 1-razsežno in je zato enako $ker(ad\ l) = \mathfrak{Lin}\{l\}$. Iz enačbe (10) vidimo, da je element $[\tilde{x}, y]$ v jedru, zato ga lahko zapišemo v obliki $[\tilde{x}, y] = \alpha l$ za neki skalar $\alpha \in \mathbb{C}$. Skalar α mora biti neničeln, sicer bi bilo jedro preslikave $ad\ \tilde{x}$ 2-razsežno, to pa bi bilo v prostislovju s prvim delom tega dokaza. Če sedaj nadomestimo $\tilde{x}$ z $x = \alpha^{-1}\tilde{x}$, dobimo $[x, y] = l$, torej je v tem primeru $\alpha = 1$.

Zanima nas, koliko neizomorfnih algeber je. Če v delu 3 l nadomestimo z ustreznim neničelnim večratnikom l, lahko dobimo poljubno neničelno vrednost skalarja a. Tako si lahko izberemo, da l nadomestimo z $l' = 2a^{-1}l$ in namesto skalarja a dobimo 2. V tem primeru imamo $[x, y] = l'$, $[x, l'] = -2x$ in $[y, l'] = 2y$. Sedaj vidimo, da se strukturne konstante L v bazi $\{x, y, l'\}$ ujemajo s strukturnimi konstantami specialne linearne algebre $sl(2, \mathbb{C})$ v ustrezni bazi. Te smo poiskali v primeru 11. Po trditvi 8 sledi, da je L izomorfna $sl(2, \mathbb{C})$.

Tako nam je uspelo dokazati, da obstaja natanko ena, do izomorfizma natančno, 3-razsežna nekomutativna kompleksna Liejeva algebra, ki je enaka svoji izpeljani algebri.

Izrek 23. *Do izomorfizma natančno obstajata natanko dve neizomorfni 3-razsežni nekomutativni Liejevi algebri nad poljem realnih števil $\mathbb{R}$, ki sta enaki svojima izpeljanima algebrama.*

Dokaz. Naj bo L 3-razsežna nekomutativna Liejeva algebra nad $\mathbb{R}$. Vrnimo se k dokazu izreka 22 in poglejmo, katere izmed štirih delov lahko izvedemo tudi v polju realnih števil. Dela 1 in 2 veljata tudi v $\mathbb{R}$. Če lahko najdemo tak element $x \in L$, da ima preslikava $ad\ x : L \to L$ neničelno realno lastno vrednost, se v tem primeru tudi dela 3 in 4 ne spremenita. Strukturne konstante L glede na ustrezno bazo (takšno, kot smo jo našli v dokazu izreka 22) se ujemajo s strukturnimi konstantami $sl(2, \mathbb{R})$ glede na bazo iz primera 11, zato je po trditvi 8 L izomorfna $sl(2, \mathbb{R})$. Imamo torej natanko eno, do izomorfizma natančno, 3-razsežno nekomutativno Liejevo algebro L nad $\mathbb{R}$, ki je enaka svoji izpeljani algebri in je za neki element $x \in L$ preslikava $ad\ x$ diagonalizabilna ter ima neničelno realno lastno vrednost.

Ostane še primer, ko za noben neničeln $x \in L$ preslikava $ad\ x$ ni diagonalizabilna. Lahko bi rekli tudi, da ima za vsak neničeln $x \in L$ preslikava $ad\ x$ tudi kompleksne lastne vrednosti. V tem primeru so lastne vrednosti $a, \bar{a}, 0$, pri čemer $a \notin \mathbb{R}$. Še vedno mora biti po lemi 6 $sled(ad\ x) = 0$, zato lahko sklepamo, da je a čisto imaginarno število. Predpostavimo lahko, da je $a = i$ (sicer to dosežemo z ustreznimi raztegi baznih vektorjev). Tako lahko preslikavo $ad\ x$ predstavimo z matriko

$$ad\ x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ker je $det(ad\ x - \lambda I) = \lambda(\lambda^2 + 1)$, so $i, -i$ in 0 res lastne vrednosti te preslikave. Iz tega je razvidno, da obstaja taka elementa $y, z \in L$, da je $[x, y] = z$ in $[x, z] = -y$. Da bomo imeli popolnoma definiran Liejev oklepaj nas zanima še, kaj je $[y, z]$. Postopamo podobno kot v delu 4 prejšnjega dokaza in s pomočjo Jacobijeve identitete dobimo, da je

$$[x, [y, z]] = [y, [x, z]] + [[x, y], z] = [y, -y] + [z, z] = 0.$$

Element $[y, z]$ mora biti torej v jedru preslikave $ad\ x$. Ugotovili smo že, da je jedro 1-razsežno, zato mora biti $[y, z] = \alpha x$, za $\alpha \neq 0$. Brez škode za splošnost predpostavimo, da je $\alpha = 1$. Do tega zopet pridemo z raztegi baznih vektorjev. Sedaj imamo $[x, y] = z, [x, z] = -y$ in $[y, z] = x$. Strukturne konstante L glede na bazo $\{x, y, z\}$ so torej enake strukturnim konstantam $\mathbb{R}^3$ z običajnim vektorskim produktom, glede na standardno bazo {i,j,k}. Te smo poiskali v primeru 12. Po trditvi 8 sta L in $\mathbb{R}^3$ z vektorskim produktom izomorfni. Imamo torej natanko eno, do izomorfizma natančno, 3-razsežno nekomutativno realno Liejevo algebro L, za katero je $L' = L$ in za noben njen element x preslikava $ad\ x$ nima samih realnih lastnih vrednosti.

Utemeljiti moramo le še, da $sl(2, \mathbb{R})$ in $\mathbb{R}^3$ z vektorskim produktom nista izomorfni. Tu se skličemo na lemo 7. Tekom dokaza smo videli, da je $sl(2, \mathbb{R})$ izomorfna Liejevim algebram, za katere lahko najdemo neničelni element x, da je preslikava $ad\ x$ diagonalizabilna. Za Liejeve algebre, izomorfne $\mathbb{R}^3$, pa takega elementa ne moremo najti. Po lemi 7 torej $sl(2, \mathbb{R})$ in $\mathbb{R}^3$ z običajnim vektorskim produktom nista izomorfni.

3. Zaključek

Zdi se, da nam je uspelo odgovoriti na glavno vprašanje: koliko Liejevih algeber majhnih razsežnosti je in kako jih klasificirati? Ugotovili smo, da:

- za vsako naravno število n do izomorfizma natančno obstaja natanko ena komutativna Liejeva algebra dimnezije n,
- je vsaka 1-razsežna Liejeva algebra komutativna in zato do izomorfizma natančno obstaja natanko ena,
- do izomorfizma natančno obstaja natanko ena nekomutativna 2-razsežna Liejeva algebra,
- do izomorfizma natančno obstaja natanko ena 3-razsežna nekomutativna Liejeva algebra, katere izpeljana algebra je 1-dimnezionalna in vsebovana v centru,
- do izomorfizma natančno obstaja natanko ena 3-razsežna nekomutativna Liejeva algebra, katere izpeljana algebra je 1-dimnezionalna in ni vsebovana v centru,
- obstaja neskončno mnogo neizomorfnih 3-razsežnih nekomutativnih Liejevih algeber nad $\mathbb{C}$, ki imajo 2-razsežno izpeljano algebro,
- do izomorfizma natančno obstaja natanko ena 3-razsežna nekomutativna Liejeva algebra nad $\mathbb{C}$, ki je enaka svoji izpeljani algebri,
- do izomorfizma natančno obstajata natanko dve 3-razsežni nekomutativni Liejevi algebri nad $\mathbb{R}$, ki sta enaki svojima izpeljanima algebrama.

Kot že omenjeno, je teorija Liejevih algeber obsežna matematična teorija in tako pušča še veliko gradiva za nadaljnje raziskovanje.

LITERATURA

[1] K. Erdmann in M. J . Wildon, *Introduction to Lie Algebras*, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer, London, 2007.

[2] J. Mrčun, *Liejeve grupe*, verzija 27. 1. 2016, [ogled 27. 8. 2017], dostopno na `http://www.fmf.uni-lj.si/~mrcun/preprints/lg.pdf`.

[3] *Special linear Lie algebra*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia, [ogled 27. 8. 2017], dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Special_linear_Lie_algebra`.

[4] A. Bowers, *Classification of Three-Dimensional Real Lie Algebras*, verzija 29. 4. 2005, [ogled 27. 8. 2017], dostopno na `http://www.math.ucsd.edu/~abowers/downloads/survey/3d_Lie_alg_classify.pdf`