ALEXANDROV POLINOM

JUŠ KOSMAČ

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

57M05, 57M27

V članku je razvit način za ločevanje med vozli različnih tipov. Na kratko je ponovljeno potrebno predznanje o predstavitvah grup in Tietzejevih transformacijah. Opisan je postopek za konstrukcijo Wirtingerjeve predstavitve grupe vozla iz diagrama vozla. S pomočja odvajanja v grupnem kolobarju so definirane invariante tipa vozla – elementarni ideali in vozelni polinomi. Njihova uporaba je prikazana na primerih.

ALEXANDER POLYNOMIAL

The main object of this article is to develop a way to distinguish among knots of different types. Some basic knowledge regarding presentations of groups and Tietze transformations is briefly recalled. A procedure of constructing the Wirtinger presentation of a knot group using the knot diagram is developed. Invariants of a knot type are defined with the use of derivation in a group ring – these are elementary ideals and knot polynomials. Their application is demonstrated in some examples.

1. Uvod

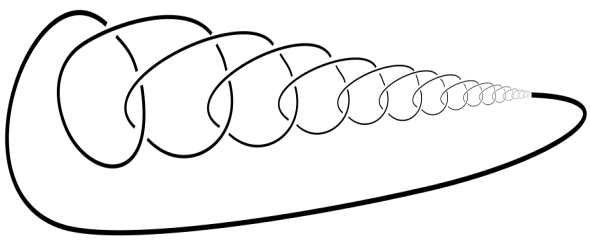
Obravnavana tema članka spada v teorijo vozlov, ki se širše gledano uvršča pod topologijo, vendar pa uporablja precej algebraičnih pristopov. Teorija vozlov se je začela razvijati v 2. polovici 19. stoletja. Problema klasifikacije vozlov se je prvi sistematično lotil Peter Guthrie Tait, matematik in fizik škotskega rodu.

Kako vsakdanjo predstavo o tem, kaj je vozel, prenesemo v matematični svet? Za začetek si poglejmo osnovni definiciji.

Definicija 1. *Vozel* je slika poljubne vložitve krožnice S^1 v $\mathbb{R}^3$.

Definicija 2. Vozla K_1 in K_2 sta *ekvivalentna* oz. *istega tipa*, če obstaja homeomorfizem $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, da velja $\varphi(K_1) = K_2$.

Opomba 1. V definiciji 1 nismo od vložitve zahtevali nobenih dodatnih lastnosti. V nadaljevanju se bomo omejili na vozle, ki so ekvivalentni poligonskim. Slednji so unija končno mnogo daljic, torej je vložitev v tem primeru kosoma linearna. Bolj splošno se izkaže, da so vozli tudi pri gladkih ali odsekoma gladkih vložitvah ekvivalentni poligonskim ([1, str. 147–152]). Ključno je, da se izognemo vozlom, ki pa niso ekvivalentni poligonskim – imenujemo jih *divji vozli*.



Slika 1. Divji vozel, ki je sicer gladek povsod, razen v eni "problematični" točki. Tako točko imenujemo *divja točka*.

S tako definicijo ekvivalentnosti vozlov želimo posnemati situacijo iz realnosti. Dva vozla smatramo za enaka, če lahko enega zvezno preoblikujemo v drugega, brez da bi prerezali vrv oz. krožnico.

Želimo klasificirati vozle, torej povedati, kdaj sta dva vozla ekvivalentna in kdaj ne. Neposredno po definiciji bi morali za vsak homeomorfizem ambientnega prostora preveriti, če preslika prvi vozel na drugega, kar se zdi nemogoča naloga. V članku bomo predstavili način, s katerim bomo lažje določali, ali sta vozla istega tipa. Poiskali bomo razmeroma preproste invariante tipa vozla, ki bodo v našem primeru algebraične narave. Če se dva vozla razlikujeta v neki invarianti, potem zagotovo nista istega tipa. Ena izmed njih je Alexandrov polinom, ki ga je leta 1923 odkril ameriški topolog James Wadell Alexander kot eno prvih invariant vozlov.

Ključnega pomena pri razlikovanju vozlov bo fundamentalna grupa. Potrebno predznanje o fundamentalni grupi za razumevanje članka lahko bralec najde v [3, podpoglavje 1.1]. Če sta K_1 in K_2 vozla istega tipa, potem po definiciji obstaja homeomorfizem $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ki K_1 preslika na K_2. To pa pomeni, da je zožitev φ tudi homeomorfizem med komplementoma $\mathbb{R}^3 \setminus K_1$ in $\mathbb{R}^3 \setminus K_2$.

Definicija 3. *Grupa vozla* K je fundamentalna grupa $\pi(\mathbb{R}^3 \setminus K)$.

Opomba 2. Izhodišča p pri fundamentalni grupi nismo navedli, ker je prostor $\mathbb{R}^3 \setminus K$ povezan s potmi in so zato fundamentalne grupe z različnimi izhodišči med sabo izomorfne.

Ker imajo homeomorfni prostori izomorfne fundamentalne grupe, morata biti grupi vozlov istega tipa izomorfni. Na tem bo temeljilo ločevanje med vozli v nadaljevanju.

2. Predstavitev grupe in Tietzejeve transformacije

Preden se lahko poglobimo v teorijo vozlov, bomo na kratko ponovili pojem predstavitve grupe (povzeto po [1, poglavje 4]).

Definicija 4. Naj bo X neka množica in $R \subseteq F_X$ podmnožica proste grupe na množici X. Definiramo $\langle X \mid R \rangle = F_X/N_R$, kjer je N_R najmanjša edinka, ki vsebuje R.

Iz univerzalne lastnosti proste grupe sledi, da za vsako grupo G obstajata X in R, da je $\langle X \mid R \rangle \cong G$. Pravimo, da je $\langle X \mid R \rangle$ *predstavitev grupe* G. Če sta X in R končni množici, rečemo, da je predstavitev *končna*. Vsaka končna grupa premore končno predstavitev.

Opomba 3. X imenujemo množica generatorjev, R pa množica relacij. Relacije nam povedo zveze med generatorji, ki veljajo v grupi. Predstavitev $\langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} \rangle$ pove, da je $xyx^{-1}y^{-1} \in N_R$, kar pomeni, da v F_X/N_R velja $xyN_R = yxN_R$. Zato pri predstavitvah uporabljamo tudi zapis $\langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} = 1 \rangle$ ali $\langle x, y \mid xy = yx \rangle$, ki je veliko bolj nazoren.

Za nas bo glavni problem določiti, kdaj dve predstavitvi predstavljata isto grupo. Predstavitvi $\langle x, y \mid xyx = yxy \rangle$ in $\langle a, b \mid a^3 = b^2 \rangle$ sta sicer na pogled precej različni, vendar v resnici predstavljata isto grupo, kot bomo videli v kasnejšem primeru.

Definicija 5. *Preslikava predstavitev* $\langle X \mid R \rangle$ in $\langle Y \mid S \rangle$ je homomorfizem $f : F_X \to F_Y$, za katerega velja $f(R) \subseteq N_S$.

$$\begin{tikzcd}
F_X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma"'] & F_Y \arrow[d, "\gamma'"] \\
\langle X \mid R \rangle \arrow[r, "f_*"] & \langle Y \mid S \rangle
\end{tikzcd}$$

Opomba 4. f iz definicije inducira enolično določen homomorfizem $f_* : \langle X \mid R\rangle \to \langle Y \mid S\rangle$, ki zadošča $f_*\gamma = \gamma' f$, kjer sta γ in γ' kvocientni projekciji v ustrezni grupi.

Preslikave predstavitev lahko tudi komponiramo med sabo. Dodajmo še tretjo predstavitev $\langle Z \mid T\rangle$ s kvocientno projekcijo γ'' in preslikavo predstavitev $g : F_Y \to F_Z$. Velja $(g_*f_*)\gamma = g_*(f_*\gamma) = g_*(\gamma' f) = (g_*\gamma')f = (\gamma'' g)f = \gamma''(gf)$. Torej za g_*f_* velja ista zveza kot za inducirani homomorfizem $(gf)_*$. Zaradi enoličnosti mora zato veljati $g_*f_* = (gf)_*$.

Definicija 6. Preslikavi f_1 in f_2 predstavitev $\langle X \mid R\rangle$ in $\langle Y \mid S\rangle$ sta *homotopni*, označujemo $f_1 \simeq f_2$, če za vsak $x \in X$ velja $f_1(x)f_2(x^{-1}) \in N_S$.

Pogoj iz definicije nam pove, da je $\gamma'(f_1(x)f_2(x^{-1})) = 1$ oziroma $(\gamma' f_1)(x) = (\gamma' f_2)(x)$ za vsak $x \in X$. Po definiciji induciranega homomorfizma to pomeni $(f_1)_*(\gamma(x)) = (f_2)_*(\gamma(x))$ za vsak $x \in X$. Toda, če se dva homomorfizma ujemata na vseh generatorjih, potem sta enaka. Sklep velja tudi v obratno smer, torej je $f_1 \simeq f_2$ natanko tedaj, ko je $(f_1)_* = (f_2)_*$.

Trditev 1. *Za vsak homomorfizem $\phi : \langle X \mid R\rangle \to \langle Y \mid S\rangle$ obstaja preslikava predstavitev f, da velja $f_* = \phi$.*

Dokaz. Za vsak $x \in X$ je $(\phi\gamma)(x)$ neki odsek v $\langle Y \mid S\rangle$, torej $\gamma'(y)$ za neki $y \in F_Y$ (seveda y ni nujno enolično določen; izberemo katerikoli y, ki ustreza). Definirajmo $f(x) = y$. S tem zagotovimo, da velja $(\phi\gamma)(x) = (\gamma' f)(x)$. Po univerzalni lastnosti proste grupe lahko f razširimo do homomorfizma (uporabljamo kar isto oznako f), za katerega bo tudi veljalo $\phi\gamma = \gamma' f$. Naj bo $r \in R$. Velja $\gamma'(f(r)) = \phi(\gamma(r)) = \phi(1) = 1$. To pa pomeni, da je $f(r) \in N_S$. S tem smo dokazali, da je f res ustrezna preslikava predstavitev. Razmislek pred trditvijo nam pove, da je f do homotopije enolično določena. Če namreč ustreza tudi neka druga preslikava $\tilde{f}$, potem velja $\tilde{f}_* = \phi = f_*$ in zato $\tilde{f} \simeq f$.

Definicija 7. Predstavitvi $\langle X \mid R\rangle$ in $\langle Y \mid S\rangle$ sta *istega tipa*, če obstaja par preslikav predstavitev $f : F_X \to F_Y$ in $g : F_Y \to F_X$, da velja $fg \simeq id_{F_Y}$ in $gf \simeq id_{F_X}$. Paru (f, g) pravimo *ekvivalenca predstavitev.*

Izrek 2. *Predstavitvi predstavljata isto grupo natanko tedaj, ko sta istega tipa.*

Dokaz. ($\Longleftarrow$) Uporabljamo iste oznake kot v definiciji pred izrekom. Homotopnost $fg \simeq id$ in $gf \simeq id$ lahko prepišemo v $(fg)_* = f_*g_* = id_*$ in $(gf)_* = g_*f_* = id_*$. Očitno je tudi, da identiteta id med prostima grupama F_X oz. F_Y inducira identiteto id_* med kvocientnima grupama $\langle X \mid R\rangle$ oz. $\langle Y \mid S\rangle$. Torej smo našli inverzna homomorfizma f_* in g_*, kar pomeni, da sta naši kvocientni grupi res izomorfni.

($\Longrightarrow$) Naj bo ϕ izomorfizem med $\langle X \mid R\rangle$ in $\langle Y \mid S\rangle$. Po trditvi 1 obstajata preslikavi predstavitev f in g, da velja $f_* = \phi$ in $g_* = \phi^{-1}$. Torej $(fg)_* = f_*g_* = \phi\phi^{-1} = id = id_*$, kar pomeni $fg \simeq id$. Podobno velja tudi $gf \simeq id$.

Poskušali bomo najti način, kako preveriti, ali dve predstavitvi predstavljata isto grupo. Omejili se bomo le na končne predstavitve. V naslednji definiciji bomo spoznali transformacije, s katerimi bomo lahko preoblikovali predstavitve. Z uporabo teh transformacij bomo sicer v teoriji rešili zastavljen problem, vendar bo postopek ponavadi v praksi zelo težko izvedljiv.

Definicija 8. Naj bo $\langle X \mid R\rangle$ končna predstavitev. *Tietzejeve transformacije* predstavitve so:

- $T1$ – dodajanje nove relacije $s \in N_R$: $\langle X \mid R \cup \{s\}\rangle$,
- $T1'$ – brisanje relacije $s \in R$, če velja $N_R = N_{R\setminus\{s\}}$: $\langle X \mid R \setminus \{s\}\rangle$,

- $T2$ – dodajanje novega generatorja $y \notin X$ in nove relacije $s = y\xi^{-1}$ za neki $\xi \in F_X$: $\langle X \cup \{y\} \,|\, R \cup \{s\}\rangle$,
- $T2'$ – brisanje generatorja y, če obstaja natanko ena relacija $s \in R$, ki vsebuje črki y ali y^{-1} in je oblike $s = y\xi^{-1}$ za neki $\xi \in F_{X\setminus\{y\}}$: $\langle X \setminus \{y\} \,|\, R \setminus \{s\}\rangle$.

Na enostavnem primeru si oglejmo, kako si razlagamo Tietzejeve transformacije. Izberimo neko preprosto grupo, npr. $\mathbb{Z}_n$, katere predstavitev je $\langle a \,|\, a^n = 1\rangle$. $T1$ je dodajanje nove relacije, ki pa je že "posledica" obstoječih relacij. Če v naši grupi velja $a^n = 1$, potem zagotovo velja tudi $a^{2n} = 1$, torej je $\langle a \,|\, a^n = 1, a^{2n} = 1\rangle$ prav tako predstavitev $\mathbb{Z}_n$. Pri $T2$ pa gre v bistvu za vpeljavo "nove oznake" za neki element. Oglejmo si predstavitev $\langle a, b \,|\, a^n = 1, b = a^3\rangle$. Vloga novega generatorja b je samo v tem, da lahko v vseh izrazih v naši grupi a^3 nadomestimo z b. Torej s tem nismo spreminjali strukture grupe in je intuitivno jasno, da je to tudi predstavitev $\mathbb{Z}_n$.

Dokažimo prejšnji razmislek tudi formalno.

Trditev 3. *Tietzejeve transformacije ohranjajo tip predstavitve.*

Dokaz. $T1$ in $T1'$: Oglejmo si predstavitvi $\langle X \,|\, R\rangle$ in $\langle X \,|\, R \cup \{s\}\rangle$. Definirajmo preslikavi $\mathrm{I}, \mathrm{I}' : F_X \to F_X$ kot identiteti. Velja $R \subseteq N_{R\cup\{s\}}$ in zaradi $s \in N_R$ tudi $R \cup \{s\} \subseteq N_R$, torej sta I in I′ preslikavi predstavitev. Par $(\mathrm{I}, \mathrm{I}')$ je očitno ekvivalenca predstavitev, saj velja $\mathrm{I}\,\mathrm{I}' = \mathrm{I}'\,\mathrm{I} = id$.

$T2$ in $T2'$: Opazujmo predstavitvi $\langle X \,|\, R\rangle$ in $\langle X \cup \{y\} \,|\, R \cup \{y\xi^{-1}\}\rangle$. Označimo $Y = X \cup \{y\}$ in $S = R \cup \{y\xi^{-1}\}$. Definirajmo preslikavo $\mathrm{II} : X \to F_Y$ s predpisom $\mathrm{II}(x) = x$ za vsak $x \in X$ in jo po univerzalni lastnosti razširimo do homomorfizma iz F_X v F_Y. Velja $\mathrm{II}(R) = R \subseteq S \subseteq N_S$, torej je II preslikava predstavitev. Obratno definiramo $\mathrm{II}' : Y \to F_X$ s predpisom $\mathrm{II}'(x) = x$ za vsak $x \in X$ in $\mathrm{II}'(y) = \xi$. Tudi II′ razširimo do homomorfizma in opazimo $\mathrm{II}'(S) = R \cup \{1\} \subseteq N_R$. Zato je tudi II′ preslikava predstavitev. Preverimo, da je par $(\mathrm{II}, \mathrm{II}')$ ekvivalenca predstavitev. Res velja $(\mathrm{II}'\,\mathrm{II}(x))x^{-1} = 1 \in N_R$ in $(\mathrm{II}\,\mathrm{II}'(x))x^{-1} = 1 \in N_S$ za vsak $x \in X$, poleg tega pa tudi $(\mathrm{II}\,\mathrm{II}'(y))y^{-1} = \mathrm{II}(\xi)y^{-1} = \xi y^{-1} = (y\xi^{-1})^{-1} \in N_S$. Torej drži $\mathrm{II}\,\mathrm{II}' \simeq 1$ in $\mathrm{II}'\,\mathrm{II} \simeq 1$, kar smo želeli dokazati.

Sledeči izrek (dokaz lahko najdete v [4, izrek 3.14]) bo utemeljil pomembnost Tietzejevih transformacij.

Izrek 4. *Naj bosta $\langle X \,|\, R\rangle$ in $\langle Y \,|\, S\rangle$ končni predstavitvi. Potem predstavljata isto grupo natanko tedaj, ko obstaja končno zaporedje Tietzejevih transformacij T1, T1', T2 ali T2', ki predstavitev $\langle X \,|\, R\rangle$ transformirajo v $\langle Y \,|\, S\rangle$.*

Če želimo definirati neko lastnost grupe na podlagi njene predstavitve, potem se moramo najprej prepričati, da je to zares lastnost grupe in ne samo neke specifične predstavitve (npr. število relacij in generatorjev se lahko razlikuje za različne predstavitve). Izrek 4 nam zagotavlja, da se poljubni končni predstavitvi iste grupe razlikujeta le za neko zaporedje Tietzejevih transformacij. Torej je dovolj preveriti, da je opazovana lastnost invariantna za Tietzejeve transformacije. S tem dokažemo, da imajo vse končne predstavitve grupe enako lastnost in je torej to resnično lastnost grupe. Ta razmislek nam bo koristil v nadaljevanju članka.

Primer 1. Pokazali bomo $\langle x, y \,|\, xyx = yxy\rangle \cong \langle a, b \,|\, a^3 = b^2\rangle$. Definirajmo nove oznake $a = xy$ in $b = yxy$ in si predstavljamo, da so a, b, x in y elementi neke grupe. Opazimo, da velja $a^3 = (xy)(xy)(xy) = (xyx)(yxy) = (yxy)(yxy) = b^2$ natanko tedaj, ko velja $xyx = yxy$. Oglejmo si naslednje zaporedje Tietzejevih transformacij (uporabljamo enostavnejši zapis iz opombe 3):

$$
\begin{aligned}
\langle x, y \,|\, xyx = yxy \rangle &\cong \langle a, b, x, y \,|\, xyx = yxy, a = xy, b = yxy \rangle && T2, T2 \\
&\cong \langle a, b, x, y \,|\, xyx = yxy, a = xy, b = yxy, a^3 = b^2 \rangle && T1 \\
&\cong \langle a, b, x, y \,|\, a = xy, b = yxy, a^3 = b^2 \rangle && T1' \\
&\cong \langle a, b, x, y \,|\, a = xy, b = yxy, y = ba^{-1}, a^3 = b^2 \rangle && T1 \\
&\cong \langle a, b, x, y \,|\, a = xy, y = ba^{-1}, a^3 = b^2 \rangle && T1' \\
&\cong \langle a, b, x, y \,|\, a = xy, x = ay^{-1}, y = ba^{-1}, a^3 = b^2 \rangle && T1 \\
&\cong \langle a, b, x, y \,|\, x = ay^{-1}, y = ba^{-1}, a^3 = b^2 \rangle && T1' \\
&\cong \langle a, b, y \,|\, y = ba^{-1}, a^3 = b^2 \rangle && T2' \\
&\cong \langle a, b \,|\, a^3 = b^2 \rangle. && T2'
\end{aligned}
$$

Kot vidimo, smo morali pametno uganiti nova generatorja a in b, da smo lahko uporabili ustrezne Tietzejeve transformacije. Pri bolj zapletenih predstavitvah je to lahko zelo težka naloga.

Za konec poglavja se spomnimo prostega produkta grup, saj ga bomo potrebovali v naslednjem poglavju. Naj bosta G in H grupi s predstavitvama $\langle X \,|\, R \rangle$ in $\langle Y \,|\, S \rangle$. Njun prosti produkt označimo z $G * H$. Konstruiramo ga podobno kot prosto grupo, tako da tvorimo besede iz elementov grup G in H ter jih ustrezno reduciramo. Vse relacije, ki veljajo v G in H, veljajo tudi v prostem produktu, saj lahko obe grupi vložimo vanj, poleg tega pa nismo dodali nobenih novih relacij. Zato je jasno, da velja $G * H \cong \langle X \cup Y \,|\, R \cup S \rangle$. Prosti produkt in njegova predstavitev sta obsežnejše opisana v [6, podpoglavje 4.1].

3. Predstavitev grupe vozla

V tem poglavju bomo opisali preprost postopek, s katerim poiščemo predstavitev grupe vozla. S pomočjo Seifert-van Kampenovega izreka pa bomo lahko dokazali, da predstavitev zares ustreza iskani fundamentalni grupi. Za začetek ponovimo formulacijo omenjenega izreka.

Izrek 5 (Seifert-van Kampen). *Naj bodo X_1, X_2 in $X_1 \cap X_2$ neprazni, odprti in s potmi povezani podprostori v prostoru $X = X_1 \cup X_2$. Naj bodo $x_0 \in X_1 \cap X_2$ in $(i_1)_* : \pi(X_1 \cap X_2, x_0) \to \pi(X_1, x_0)$ ter $(i_2)_* : \pi(X_1 \cap X_2, x_0) \to \pi(X_2, x_0)$ z vložitvama inducirana homomorfizma. Označimo $M = \{(i_1)_*(w)(i_2)_*(w)^{-1} \,|\, w \in \pi(X_1 \cap X_2, x_0)\}$. Potem velja $\pi(X, x_0) \cong (\pi(X_1, x_0) * \pi(X_2, x_0))/N_M$.*

Opomba 5. Če ima $\pi(X_1, x_0)$ predstavitev $\langle Y \,|\, R \rangle$, $\pi(X_2, x_0)$ predstavitev $\langle Z \,|\, S \rangle$ in $\pi(X_1 \cap X_2, x_0)$ predstavitev $\langle W \,|\, T \rangle$, potem ima $\pi(X, x_0)$ predstavitev $\langle Y \cup Z \,|\, R \cup S \cup \{(i_1)_*(w)(i_2)_*(w)^{-1} \,|\, w \in W\} \rangle$. Poleg običajnih relacij v prostem produktu moramo namreč dodati še relacije, ki nastopijo zaradi "identifikacij" v kvocientni grupi.

Več o Seifert-van Kampenovem izreku si lahko preberete v [3, podpoglavje 1.2]. Našli boste razlago izreka, dokaz in več primerov uporabe.

Vrnimo se nazaj na teorijo vozlov. Za vir bomo uporabljali [1, poglavje 6] in [8, str. 144–148]. Kot smo napovedali že v uvodu, bomo obravnavali le vozle, ki so ekvivalentni *poligonskim vozlom*. Poligonski vozel je unija končno mnogo daljic. Krajišča daljic imenujemo *vozlišča vozla*.

Definicija 9. *Projekcija vozla K* je slika vozla pri projekciji $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ki je podana s predpisom $P(x, y, z) = (x, y, 0)$.

Točka r je *večkratna točka* projekcije vozla K, če praslika $P^{-1}(r) \cap K$ vsebuje več kot eno točko. *Dvojna točka* ali *križišče* je taka večkratna točka, katere praslika vsebuje natanko 2 točki, torej je $|P^{-1}(r) \cap K| = 2$.

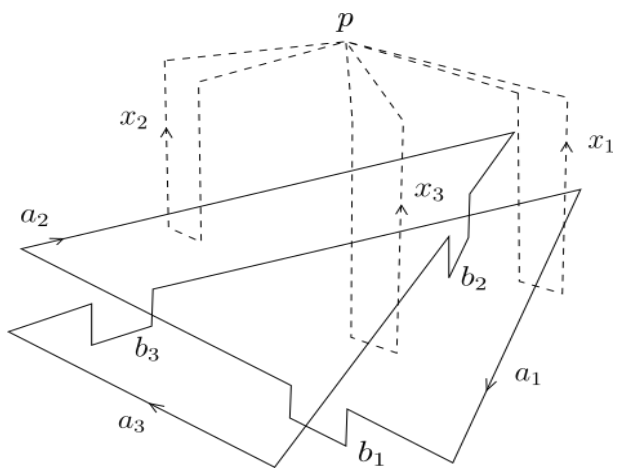
Definicija 10. Projekcija vozla K je *regularna*, če zadošča:

- edine večkratne točke projekcije so dvojne točke in teh je samo končno mnogo,
- nobena dvojna točka ni slika vozlišča vozla K.

Ta dva pogoja zagotavljata, da se vedno križata samo dva loka vozla hkrati in da je v križišču dejansko prišlo do križanja. Nočemo, da bi se projekciji lokov v ravnini samo dotikali, saj bi v tem primeru lahko pri poljubno majhni rotaciji vozla ali ravnine, na katero projiciramo, križišče izginilo. Razlog, da preučujemo le poligonske vozle, je v tem, da jih lahko s homeomorfizmom preslikamo tako, da bo njihova projekcija regularna. Pri divjih vozlih tega ne moremo storiti.

Samo iz projekcije ne moremo rekonstruirati tipa vozla, saj ne vemo, kateri lok gre zgoraj in kateri spodaj pri križanju.

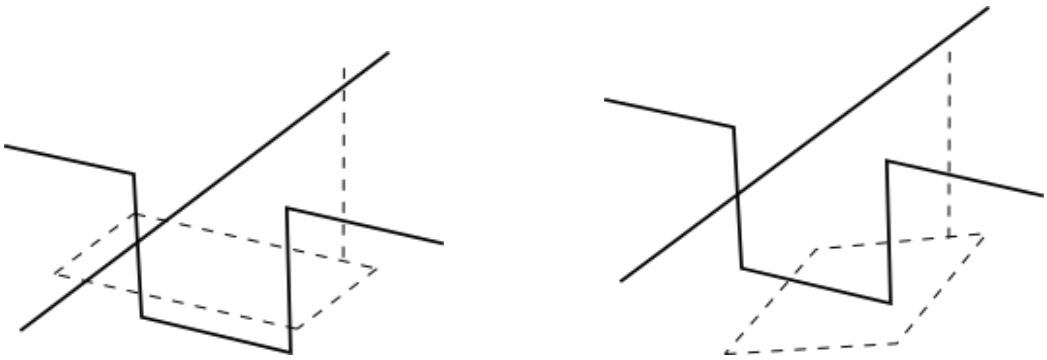
Definicija 11. *Diagram vozla K* je regularna projekcija, ki vsebuje dodatno informacijo o križanju v križiščih. Pove nam, kateri lok gre zgoraj, t.i. *nadvoz*, in kateri spodaj, t.i. *podvoz*.



Slika 2. Vozel *deteljica* z označenimi nadvozi, podvozi in zankami (črtkano) okoli nadvozov. Orientacija vozla in smeri zank so označene s puščicami.

Sedaj privzamemo, da je vozel v posebnem položaju, ki ga bomo opisali (sicer bi ga lahko s homeomorfizmom preslikali vanj). Primer vozla v želenem položaju je prikazan za sliki 2, pripadajoči diagram vozla pa je na sliki 7. Vsi nadvozi naj ležijo v ravnini $z = 1$, pri vsakem križišču pa se navpično spustimo do ravnine $z = 0$, ki vsebuje podvoze. Lahko si predstavljamo, da nadvozi tvorijo skoraj celoten vozel, podvozi pa so zelo kratki. Izberemo orientacijo vozla in v skladu z njo po vrsti označimo nadvoze, kot si sledijo pri obhodu vozla, z $a_1, \ldots, a_n$, podvoze z $b_1, \ldots, b_n$ ter izhodiščno točko $p = (0, 0, 2)$. Za vsak $i = 1, \ldots, n$ konstruiramo zanko x_i z izhodiščem v p, ki gre okoli nadvoza a_i. Malce bolj natančno: na nivoju $z = \frac{1}{2}$ narišemo kratko daljico, ki gre pod nadvozom a_i (s tem mislimo, da bi daljica sekala a_i, če bi ležala v ravnini $z = 1$). Krajišča daljice podaljšamo navpično navzgor do ravnine $z = 2$ in vodoravno povežemo s točko p. Tako dobljena krivulja predstavlja tir zanke x_i. Smer zanke x_i izberemo tako, da potujemo pod a_i z desne strani na levo glede na orientacijo vozla (če gremo v drugi smeri, pa to ustreza x_i^{-1}). Ponavadi pripadajoče zanke x_i s puščicami označimo tudi na diagramu vozla. Smiselno je pričakovati, da bodo x_i generatorji grupe vozla. Kaj pa so relacije? "Okrog" vsakega podvoza b_i konstruiramo zanko, ki bi jo lahko

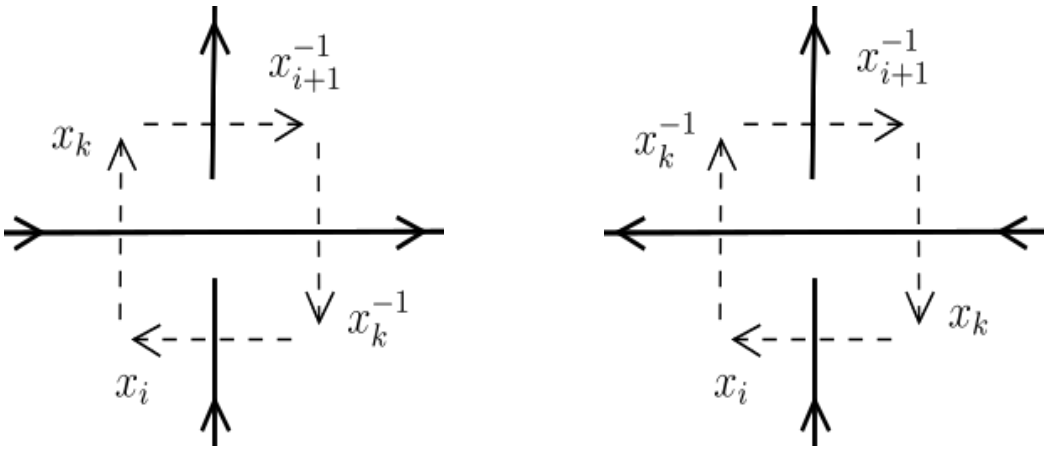
sneli pod podvozom in stisnili v p (prikazano na sliki 3). To pomeni, da bo v fundamentalni grupi ekvivalenčni razred te zanke predstavljal enoto. Če to zanko izrazimo z generatorji x_i, torej dobimo neko relacijo r_i med njimi. Glede na način križanja dobimo v vsakem križišču eno od dveh relacij: $r_i = x_i x_k x_{i+1}^{-1} x_k^{-1}$ ali $r_i = x_i x_k^{-1} x_{i+1}^{-1} x_k$ – imenujemo jih *Wirtingerjeve relacije*. Bolj podrobno je postopek opisan na sliki 4. Trdimo, da smo s tem dobili predstavitev grupe vozla.



(a) Zanka okrog podvoza.

(b) Snemanje zanke pod podvozom.

Slika 3. Zanke okrog podvozov so homotopne konstantni zanki.



(a) Prvi tip relacije $x_i x_k x_{i+1}^{-1} x_k^{-1}$ – nadvoz prečka podvoz z leve na desno.

(b) Drugi tip relacije $x_i x_k^{-1} x_{i+1}^{-1} x_k$ – nadvoz prečka podvoz z desne na levo.

Slika 4. Wirtingerjevi relaciji. Črtkane puščice predstavljajo zanke okoli nadvozov. S sklapljanjem lahko iz njih sestavimo zanko okrog podvoza, ki ustreza želeni relaciji. Sklop dobimo izražen z generatorji, če sledimo črtkanim puščicam okrog navideznega črtkanega kvadrata. Vedno začnemo pri x_i.

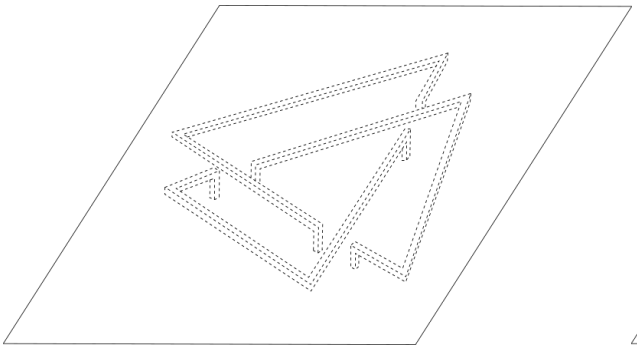
Izrek 6. Wirtingerjeva predstavitev *grupe vozla je* $\langle x_1, \ldots, x_n \,|\, r_1, \ldots, r_n \rangle$.

Dokaz. Uporabili bomo Seifert-van Kampenov izrek 5. Ključni del dokaza bo izbira primernih množic X_1 in X_2 iz izreka, za kateri bomo znali izračunati fundamentalni grupi.

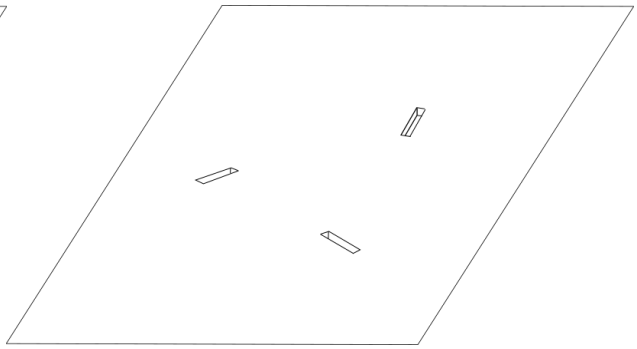
Vozel K naj bo v takem položaju, kot je opisano v prejšnjem odstavku – nadvozi na nivoju $z = 1$ in podvozi na nivoju $z = 0$, povezujejo pa jih navpične daljice. Cilj je izračunati fundamentalno grupo $\pi(\mathbb{R}^3 \setminus K)$. Za začetek "odebelimo" vozel tako, da vsako daljico, ki ga tvori, nadomestimo s produktom te daljice, ki jo v obeh krajiščih podaljšamo za $\frac{\epsilon}{2}$, in zaprtega kvadrata s stranico ϵ. Dobljeno kvadratno cev označimo z N. Pri tem mora biti središče vsakega kvadrata, ki je del prereza

N, točka na ustrezni daljici vozla. Prav tako mora vsak kvadrat ležati v ravnini, katere normala je pripadajoča daljica. Predstavljamo si lahko, da smo majhen kvadrat "peljali" vzdolž vozla in ga s tem odebelili. Notranjost cevi N označimo z M. Prostor $\mathbb{R}^3 \setminus M$ je deformacijski retrakt $\mathbb{R}^3 \setminus K$, če izberemo dovolj majhen ϵ. Izberemo ga tako, da je presek sosednjih odebeljenih daljic v N le kocka s stranico ϵ in središčem v skupnem vozlišču vozla, sicer pa so odebeljene daljice disjunktne. Opišimo še, kakšna je krepka deformacijska retrakcija. Za lažjo predstavo si lahko mislimo analogno situacijo v dveh dimenzijah – kvadrat brez središča retraktiramo na njegov rob. V prostoru storimo podobno – cev brez vozla v sredini retraktiramo na njen rob, izven cevi pa mirujemo. S tem smo dokazali, da velja $\pi(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \pi(\mathbb{R}^3 \setminus M)$.

Definirajmo $X_1 = (\mathbb{R}^3 \setminus M) \cap \{z > 0\}$ in $X_2 = (\mathbb{R}^3 \setminus M) \cap \{z < \frac{\epsilon}{2}\}$. Ker sta $\{z > 0\}$ in $\{z < \frac{\epsilon}{2}\}$ odprti množici v $\mathbb{R}^3$, sta X_1 in X_2 odprti v $\mathbb{R}^3 \setminus M$, torej je tudi njun presek $X_1 \cap X_2$ odprt v $\mathbb{R}^3 \setminus M$. Malce bolj natančno opišimo izgled prostorov X_1, X_2 in $X_1 \cap X_2$. Iz opisa bo tudi jasno, da so vsi trije prostori povezani s potmi. X_1 in X_2 v primeru deteljice lahko vidimo na sliki 5.

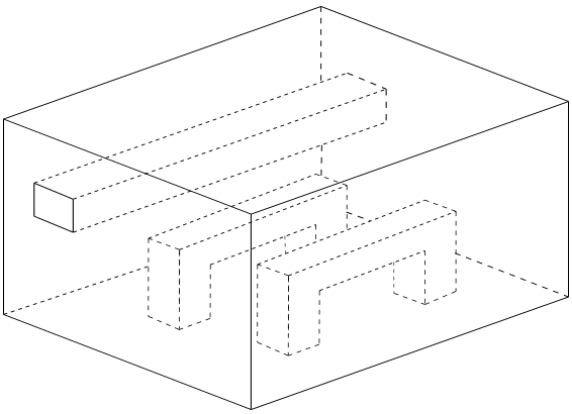


(a) X_1 – zgornji polprostor z manjkajočimi odebeljenimi nadvozi (udrtine zaradi podvozov smo že potlačili na nivo $z = 0$).

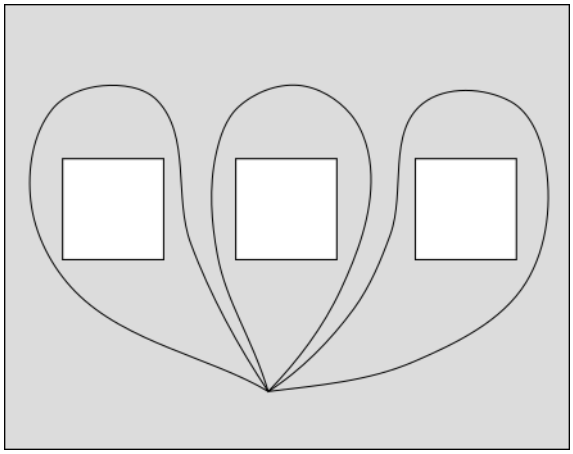


(b) X_2 – spodnji polprostor z vdolbinami.

Slika 5. Pogled od zgoraj na prostora X_1 in X_2, ki tvorita prostor $\mathbb{R}^3 \setminus M$.



(a) Kocka z vzporednimi tuneli, ki je homeomorfna X_1. Prvi tunel smo že raztegnili v želen položaj.



(b) Kvadrat z luknjami, ki je deformacijski retrakt kocke na levi. Narisan šop krožnic pa je deformacijski retrakt tega kvadrata.

Slika 6. Dva koraka v transformaciji prostora X_1.

X_1 je odprt zgornji polprostor, ki ima n "izkopanih" tunelov zaradi manjkajočih odebeljenih

nadvozov. Poleg tega ima še n pravokotnih udrtin na spodnji strani, ki pripadajo odebeljenim podvozom, saj ti segajo do nivoja $z = \frac{\epsilon}{2}$. X_1 bomo najprej s homeomorfizmi preslikali v bolj pregleden prostor. Udrtine potlačimo na nivo $z = 0$, tunele pa razporedimo vzporedno enega poleg drugega. Hkrati celoten prostor skrčimo v veliko kocko, ki vsebuje vse tunele. Odprtine tunelov sedaj ležijo na spodnji strani kocke. Vsak tunel preoblikujemo tako, da primemo obe končni odprtini in vsako potegnemo na eno od nasprotnih stranskih ploskev. Dobili smo kocko, ki ima n vzporednih tunelov od ene do druge stranske ploskve. Če kocko sploščimo v vodoravni smeri, dobimo kvadrat z n luknjami kot njen deformacijski retrakt. V kvadrat vložimo šop n krožnic K_n, tako da vsaka krožnica obdaja natanko eno luknjo. Če luknje raztegnemo in del kvadrata izven krožnic skrčimo, vidimo, da je K_n deformacijski retrakt kvadrata z luknjami. Velja $\pi(X_1) \cong \pi(K_n)$, ker je bil na vsakem koraku dobljeni prostor homeomorfen prejšnjemu ali pa deformacijski retrakt prejšnjega. Torej vemo, da je $\pi(X_1)$ prosta grupa. Njeni generatorji so zanke, ki obkrožajo posamezne krožnice v šopu. V prvotnem prostoru X_1 pa so bile to ravno zanke okoli nadvozov. Zato velja $\pi(X_1) = \langle x_1, \ldots, x_n \mid \rangle$.

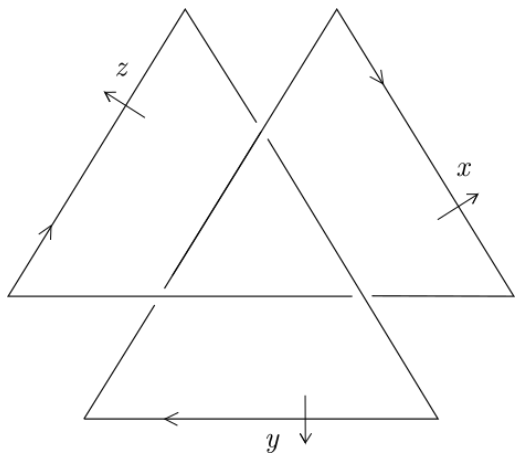
X_2 je odprt polprostor pod nivojem $z = \frac{\epsilon}{2}$, ki ima podobno kot X_1 pravokotne vdolbine zaradi odebeljenih podvozov. Spet lahko vdolbine izravnamo in tako dobimo konveksen prostor, ki pa je enostavno povezan. Torej je grupa $\pi(X_2)$ trivialna.

Presek $X_1 \cap X_2$ je "debela" ravnina med $z = 0$ in $z = \frac{\epsilon}{2}$. Vendar pa ima n pravokotnih lukenj, saj odebeljeni podvozi segajo od nivoja $z = -\frac{\epsilon}{2}$ ravno do $z = \frac{\epsilon}{2}$. $X_1 \cap X_2$ retraktiramo z navpično projekcijo na ravnino $z = \frac{\epsilon}{4}$ in dobimo ravnino z n luknjami. Torej je z enakim razmislekom kot prej $\pi(X_1 \cap X_2)$ prosta grupa na n generatorjih $w_1, \ldots, w_n$. Pri Seifert-van Kampenovem izreku moramo vedeti, kako se ti generatorji preslikajo v $\pi(X_1)$ in $\pi(X_2)$ s homomorfizmoma $(i_1)_*$ in $(i_2)_*$. Ker je $\pi(X_2)$ trivialna grupa, bo zagotovo veljalo $(i_2)_*(w_j) = 1$. Oglejmo si še $(i_1)_*(w_j)$: w_j predstavlja zanko okrog odebeljenega podvoza, torej to ustreza ravno Wirtingerjevi relaciji r_j v $\pi(X_1)$.

Sedaj lahko uporabimo Seifert-van Kampenov izrek in opombo 5. Kot rezultat dobimo

$$\pi(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \pi(\mathbb{R}^3 \setminus M) = \pi(X_1 \cup X_2) = \langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1, \ldots, r_n \rangle.$$

Opomba 6. Katerakoli relacija r_i je posledica preostalih, zato jo lahko izpustimo. To pomeni, da je $N_R = N_{R \setminus \{r_i\}}$ in je zato $\pi(X_1 \cup X_2) = \langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1, \ldots, r_{i-1}, r_{i+1}, \ldots, r_n \rangle$ tudi predstavitev grupe vozla. Dokaz te trditve lahko najdete v [7, str. 57–60] ali pa v [1, str. 78–85].



Slika 7. Diagram deteljice (*trefoil knot*). Prekinjena črta v križišču pove, kateri lok vozla gre zgoraj in kateri spodaj. Puščice na vozlu označujejo orientacijo vozla, puščice s črkovnimi oznakami pa označujejo zanke, ki generirajo grupo vozla.

Primer 2 (Deteljica). Wirtingerjeva predstavitev za deteljico je

$$\langle x, y, z \mid x = y^{-1}zy, y = z^{-1}xz, z = x^{-1}yx \rangle.$$

Z uporabo Tietzejevih transformacij lahko to še malo poenostavimo. Če v prvih dveh relacijah uporabimo zvezo $z = x^{-1}yx$, dobimo

$$\langle x, y, z \mid x = y^{-1}x^{-1}yxy, y = x^{-1}y^{-1}xyx, z = x^{-1}yx\rangle.$$

Opazimo, da se po $T2'$ lahko znebimo tretje relacije in generatorja z. Poleg tega sta prvi dve relaciji ekvivalentni, saj sta obe enaki $xyx = yxy$ (to je v resnici posledica opombe 6). Končni rezultat je tako

$$\langle x, y \mid xyx = yxy\rangle.$$

4. Odvajanje v grupnem kolobarju

V tem poglavju bomo spoznali nekaj osnov o grupnih kolobarjih, ki jih bomo potrebovali kasneje (povzeto po [1, str. 94–100] in [2]). Vpeljali bomo odvajanje, ki bo glavno orodje pri definiciji invariant vozlov v naslednjem poglavju. Zaradi naših potreb bomo obravnavali le grupne kolobarje nad celimi števili. Ponovimo najprej osnovno definicijo.

Definicija 12. Naj bo G grupa. *Grupni kolobar* $\mathbb{Z}[G]$ je množica vseh preslikav $\nu : G \to \mathbb{Z}$ s končnim nosilcem. Seštevanje in množenje sta definirana sledeče:

- $(\nu_1 + \nu_2)(g) = \nu_1(g) + \nu_2(g)$,
- $(\nu_1 \cdot \nu_2)(g) = \sum_{h\in G} \nu_1(h)\nu_2(h^{-1}g)$ za vsak $g \in G$ in vsaka $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{Z}[G]$.

Elemente $\mathbb{Z}[G]$ si lahko predstavljamo kot končne celoštevilske kombinacije elementov iz G. Naj bo funkcija ν neničelna samo na elementih $g_1, \ldots, g_k$. Za ν lahko uporabljamo zapis $\nu(g_1)g_1 + \cdots + \nu(g_k)g_k$. Torej so koeficienti v "razvoju" po elementih G ravno pripadajoče funkcijske vrednosti. Tak zapis je priročen predvsem zaradi tega, ker se z njim množenje v $\mathbb{Z}[G]$ precej poenostavi. Konvolutivnemu množenju namreč ustreza množenje linearnih kombinacij kot navadnih veččlenikov. Iz takega zapisa tudi vidimo, da se komutativnost množenja v grupnem kolobarju prenese na komutativnost množenja v grupi. Grupni kolobar je torej komutativen natanko tedaj, ko je grupa komutativna.

Trditev 7. *Vsak homomorfizem φ med grupama G in H lahko enolično razširimo do homomorfizma $\widetilde{\varphi}$ med grupnima kolobarjema $\mathbb{Z}[G]$ in $\mathbb{Z}[H]$.*

Dokaz. Vsak element $\mathbb{Z}[G]$ lahko zapišemo kot končno vsoto $\sum_i n_i g_i$. Če želimo, da je $\widetilde{\varphi}$ homomorfizem, ki razširja φ, mora veljati $\widetilde{\varphi}(\sum_i n_i g_i) = \sum_i n_i \widetilde{\varphi}(g_i) = \sum_i n_i \varphi(g_i)$. Iz tega takoj sledi, da je $\widetilde{\varphi}$ enolično določen. Kratek račun pokaže, da je tako definirani $\widetilde{\varphi}$ res homomorfizem.

Definicija 13. *Odvajanje* v grupnem kolobarju $\mathbb{Z}[G]$ je vsaka preslikava $D : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G]$, ki ustreza:

- $D(\nu_1 + \nu_2) = D\nu_1 + D\nu_2$ in
- $D(\nu_1\nu_2) = (D\nu_1)\tau(\nu_2) + \nu_1 D\nu_2$ za vsaka $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{Z}[G]$,

kjer je $\tau : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$ *trivializator*, definiran s predpisom $\tau(\sum_i n_i g_i) = \sum_i n_i$.

Opomba 7. Tako definiran odvod imenujemo *Foxov odvod*. Opazimo, da se formula iz definicije za odvod produkta razlikuje od "običajnega" odvoda, saj ni simetrična glede na menjavo vrstnega reda faktorjev.

Omenimo nekaj osnovnih lastnosti odvajanja.

(i) $Dn = 0$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$

(ii) $D(\sum_i n_i g_i) = \sum_i n_i D(g_i)$

(iii) $Dg^{-1} = -g^{-1}Dg$ za vsak $g \in G$

Zaradi lastnosti (ii) in (iii) ter pravila za odvod produkta je vsako odvajanje enolično določeno, če definiramo vrednosti odvoda za generatorje grupe G.

Enostaven izračun pokaže sledečo trditev. Lahko si pomagamo z očitnim dejstvom, da je za dokaz, da je D odvajanje, dovolj preveriti, da je D aditivna preslikava in za vsaka $g_1, g_2 \in G$ velja $D(g_1 g_2) = Dg_1 + g_1 Dg_2$.

Trditev 8. *Naj bosta D in D' odvajanji ter $u \in \mathbb{Z}[G]$. Potem sta tudi $D + D'$ in $D \cdot u$, definirana kot $(D + D')\nu = D\nu + D'\nu$ in $(D \cdot u)\nu = (D\nu)u$, odvajanji.*

Osredotočili se bomo na grupni kolobar proste grupe $\mathbb{Z}[F_X]$. Privzeli bomo, da je množica $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ števna. Naslednja trditev in njena posledica bosta razkrili, da lahko precej enostavno opišemo vsa možna odvajanja v $\mathbb{Z}[F_X]$.

Trditev 9. *Vsakemu generatorju x_j proste grupe F_X pripada enolično odvajanje $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, da velja $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$, tj. $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = 1$, če je $i = j$, in $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = 0$, če $i \neq j$.*

Dokaz. Za vsak indeks $j = 1, 2, \ldots$ in vsak $u \in F_X$ definiramo

$$\langle j, u \rangle = \begin{cases} 1, & x_j \text{ je prva črka v besedi } u \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$$

Definicijo linearno razširimo na $\mathbb{Z}[F_X]$ s predpisom $\langle j, \sum_i n_i u_i \rangle = \sum_i n_i \langle j, u_i \rangle$. Za vsak indeks j, $w \in F_X$ in $\nu = \sum_i n_i u_i \in \mathbb{Z}[F_X]$ definiramo $\langle j, w, \nu \rangle = \langle j, w^{-1}\nu \rangle - \langle j, w^{-1} \rangle \tau(\nu)$. Računamo

$$\begin{aligned} \langle j, w, \nu \rangle &= \langle j, w^{-1}\nu \rangle - \langle j, w^{-1} \rangle \tau(\nu) \\ &= \langle j, w^{-1} \sum_i n_i u_i \rangle - \langle j, w^{-1} \rangle \sum_i n_i \\ &= \sum_i n_i (\langle j, w^{-1} u_i \rangle - \langle j, w^{-1} \rangle) \\ &= \sum_i n_i \langle j, w, u_i \rangle, \end{aligned}$$

kjer smo upoštevali, da je $\tau(u_i) = 1$.

Opazujmo $\langle j, w, u_i \rangle = \langle j, w^{-1} u_i \rangle - \langle j, w^{-1} \rangle$. Rečemo, da je w *predpona* u_i, če u_i dobimo iz w tako, da dodamo nekaj črk na desni brez reduciranja (npr. vse predpone besede $x^{-1}y^2$ so $1, x^{-1}, x^{-1}y$ in $x^{-1}y^2$). Če w ni predpona u_i, potem se pri stiku $w^{-1}u_i$ beseda w^{-1} ne reducira v celoti in imata zato w^{-1} ter $w^{-1}u_i$ enako prvo črko. To pa pomeni, da je $\langle j, w, u_i \rangle = 0$. Če želimo, da je $\langle j, w, \nu \rangle \neq 0$, mora biti torej w predpona nekega u_i, kar pa pomeni, da je takih w le končno mnogo. Vsak u_i namreč vsebuje končno črk (torej ima končno predpon), indeksna množica, po kateri teče i, pa je tudi končna.

Tako definiramo

$$\frac{\partial \nu}{\partial x_j} = \sum_{w \in F_X} \langle j, w, \nu \rangle w.$$

Zaradi prejšnjega razmisleka je definicija smiselna, saj je vsota končna (le končno koeficientov je neničelnih). Zaradi $\langle j, w, \nu \rangle = \sum_i n_i \langle j, w, u_i \rangle$ velja $\langle j, w, \nu_1 + \nu_2 \rangle = \langle j, w, \nu_1 \rangle + \langle j, w, \nu_2 \rangle$ in zato je

$\frac{\partial}{\partial x_j}$ res aditivna. Z neposrednim računom lahko preverimo, da za $u, v \in F_X$ velja $\frac{\partial(uv)}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j} + u\frac{\partial v}{\partial x_j}$, torej je $\frac{\partial}{\partial x_j}$ res odvajanje. Izračunajmo še $\frac{\partial x_i}{\partial x_j}$. Upoštevamo, da sta 1 in x_i edini predponi x_i. Torej je $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \langle j, 1, x_i\rangle + \langle j, x_i, x_i\rangle x_i = (\langle j, x_i\rangle - \langle j, 1\rangle) + (\langle j, 1\rangle - \langle j, x_i^{-1}\rangle)x_i = (\delta_{ij} - 0) + (0 - 0)x_i = \delta_{ij}$.

Posledica 10. *Naj bo D poljubno odvajanje v $\mathbb{Z}[F_X]$. Vrednosti na generatorjih označimo z $Dx_i = u_i$. Potem velja*

$$D = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot u_i.$$

Dokaz. Dokažimo najprej, da je za vsak $\nu \in \mathbb{Z}[F_X]$ vsota $\sum_i \frac{\partial \nu}{\partial x_i} u_i$ končna. Dovolj je, da to preverimo le za $v \in F_X$. V reducirani besedi v nastopa le končno mnogo generatorjev x_i ali njihovih inverzov. Parcialni odvodi po vseh ostalih generatorjih bodo zato enaki 0.

Dokazali smo, da je odvajanje enolično določno z vrednostmi na generatorjih. Očitno velja $(\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot u_j)x_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial x_j} u_j = u_i$. Če upoštevamo še trditev 8, je posledica dokazana.

Zanimivo je, da lahko vsak element $\mathbb{Z}[F_X]$ izrazimo preko parcialnih odvodov. Definirajmo $D\nu = \nu - \tau(\nu)$. Na D lahko gledamo kot na aditivno razširitev predpisa $Du = u - 1$ za $u \in F_X$. Ker velja $D(uv) = uv - 1 = (u - 1) + u(v - 1) = Du + uDv$, je D odvajanje. Po posledici 10 velja

$$D\nu = \sum_i \frac{\partial \nu}{\partial x_i}(x_i - 1),$$

kar nam da pomemben zapis

$$\nu = \sum_i \frac{\partial \nu}{\partial x_i}(x_i - 1) + \tau(\nu).$$

5. Alexandrova matrika in elementarni ideali

Pripravljeno imamo vse potrebno, da lahko začnemo z najpomembnejšim delom. Za vir bomo uporabljali [1, str. 100–107]. Preko Alexandrove matrike bomo iz predstavitve grupe vozla dobili elementarne ideale. Dokazali bomo, da so invariante tipa vozla, torej bomo z njimi lahko ločevali vozle različnih tipov. Postopali bomo sicer bolj splošno, saj se ne bomo omejili le na grupe vozlov. V naslednjem poglavju pa bomo od elementarnih idealov prešli na bolj specifične invariante, kjer pa se bomo morali omejiti zgolj na grupe vozlov.

Naj bo G grupa s končno predstavitvijo $\langle X \mid R\rangle$, kjer je $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ in $R = \{r_1, \ldots, r_m\}$. Naj bosta $\gamma : F_X \to G$ in $\alpha : G \to G/[G, G]$ kvocientni projekciji. Označimo $G/[G, G] = H$. Z $\widetilde{\gamma} : \mathbb{Z}[F_X] \to \mathbb{Z}[G]$ in $\widetilde{\alpha} : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[H]$ označimo enolični razširitvi do homomorfizmov med grupnimi kolobarji, ki obstajata po trditvi 7.

Definicija 14. *Alexandrova matrika* predstavitve $\langle X \mid R\rangle$ je $m \times n$ matrika $A = [a_{ij}]$, kjer je

$$a_{ij} = \widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right).$$

Opomba 8. Razlog, da $\frac{\partial r_i}{\partial x_j}$ komponiramo z $\widetilde{\gamma}$ in $\widetilde{\alpha}$, je, da se s tem izraz poenostavi. V G "identificiramo" vse v jedru $\ker \gamma$, H pa je komutativna grupa. Enako velja za $\mathbb{Z}[G]$ in $\mathbb{Z}[H]$. Kot bomo videli, bo končni izraz pri grupah vozlov še posebej enostaven.

Primer 3 (Deteljica). V primeru 2 smo videli, da ima grupa deteljice predstavitev $\langle x, y \,|\, xyx = yxy\rangle$. Če želimo izračunati Alexandrovo matriko, moramo parcialno odvajati relacijo $(xyx)(yxy)^{-1}$ po generatorjih x in y. Za lažje računanje si v splošnem poglejmo, kako izgleda parcialni odvod relacije oblike $r_i s_i^{-1}$. Po pravilih za odvajanje računamo

$$\frac{\partial r_i s_i^{-1}}{\partial x_j} = \frac{\partial r_i}{\partial x_j} - r_i s_i^{-1} \frac{\partial s_i}{\partial x_j}.$$

Ker $\widetilde{\gamma}$ razširja γ, mora veljati $\widetilde{\gamma}(r_i s_i^{-1}) = 1$. Dobimo

$$\widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}\left(\frac{\partial r_i s_i^{-1}}{\partial x_j}\right) = \widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right) - \widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}\left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j}\right).$$

V našem primeru imamo

$$\frac{\partial xyx}{\partial x} = 1 + x\frac{\partial yx}{\partial x} = 1 + x\left(0 + y\frac{\partial x}{\partial x}\right) = 1 + xy$$

in

$$\frac{\partial yxy}{\partial x} = 0 + y\frac{\partial xy}{\partial x} = y\left(1 + x\frac{\partial y}{\partial x}\right) = y.$$

Torej

$$\widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial x}(xyx)(yxy)^{-1}\right) = \widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}(1 + xy - y)$$

in simetrično

$$\widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial y}(xyx)(yxy)^{-1}\right) = \widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}(x - 1 - yx).$$

Alexandrova matrika je zato

$$A = \begin{bmatrix}\widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}(1 + xy - y) & \widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}(x - 1 - yx)\end{bmatrix}.$$

Kakšno konkretno vlogo imata $\widetilde{\alpha}$ in $\widetilde{\gamma}$ pri poenostavljanju izrazov v tem primeru, pa bomo videli kasneje.

Definicija 15. Naj bo R komutativni kolobar z enico in $A \in M_{m\times n}(R)$ matrika. Za vsak $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$ definiramo *k-ti elementarni ideal* $E_k(A)$ matrike A:

- $E_k(A)$ je ideal, generiran z determinantami vseh podmatrik v A velikosti $n-k$, če je $0 < n-k \leq m$,
- $E_k(A) = 0$, tj. ničelni ideal, če je $n - k > m$,
- $E_k(A) = R$, če je $n - k \leq 0$.

Dokažimo preprosto trditev, ki nam bo povedala, v kakšni zvezi so zaporedni elementarni ideali.

Trditev 11. *Elementarni ideali tvorijo naraščajočo verigo.*

Dokaz. Naj k in $k + 1$ ustrezata prvemu od treh pogojev v definiciji. Vzemimo neko podmatriko velikosti $n - k$. Če njeno determinanto $D \in E_k(A)$ razvijemo po prvi vrstici, dobimo zapis oblike $D = a_1 D_1 + \cdots + a_{n-k} D_{n-k}$. Pri tem so D_i determinante matrik velikosti $n-k-1 = n-(k+1)$, torej elementi $E_{k+1}(A)$. Zato velja tudi $D \in E_{k+1}(A)$. Preverimo še robne primere: če je $n-k > m$, potem zagotovo velja $0 = E_k(A) \subseteq E_{k+1}(A)$. Če pa je $n - (k + 1) \leq 0$, potem drži $E_k(A) \subseteq E_{k+1}(A) = R$. V vsakem primeru imamo torej vsebovanost $E_k(A) \subseteq E_{k+1}(A)$.

Z naslednjo definicijo bomo povezali Alexandrovo matriko in elementarne ideale.

Definicija 16. k-ti elementarni ideal končne predstavitve $\langle X \mid R \rangle$ je k-ti elementarni ideal pripadajoče Alexandrove matrike A.

Opazimo, da smo elementarne ideale definirali glede na predstavitev grupe. Naš cilj bo dokazati, da so v resnici odvisni le od grupe in ne od izbire predstavitve zanjo. Najprej bomo pokazali, da določene operacije na matrikah ohranjajo elementarne ideale. Nato pa bomo opazovali, kako se spreminja Alexandrova matrika pri različnih predstavitvah iste grupe – videli bomo tesno povezavo s prej omenjenimi operacijami.

Definicija 17. Matriki A in A' z elementi iz komutativnega kolobarja R z enico sta *ekvivalentni*, pišemo $A \simeq A'$, če lahko eno pretvorimo v drugo s končnim zaporedjem sledečih operacij:

(i) menjava stolpcev ali vrstic,

(ii) dodajanje vrstice ničel: $A \to \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$,

(iii) prištevanje linearne kombinacije vrstic neki drugi vrstici,

(iv) prištevanje linearne kombinacije stolpcev nekemu drugemu stolpcu,

(v) dodajanje nove vrstice in stolpca z enico v presečišču: $A \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Opomba 9. Operacijo (v) lahko nadomestimo z bolj splošno operacijo (v'): $A \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$, kjer je a poljubna vrstica. Najprej uporabimo (v), nato pa vsem stolpcem, razen zadnjemu, prištejemo ustrezen večkratnik zadnjega stolpca (torej večkrat uporabimo (iv)).

Trditev 12. *Ekvivalentni matriki imata enako verigo elementarnih idealov.*

Dokaz. Želimo dokazati, da za vsak $k \geq 0$ velja $E_k(A) = E_k(A')$, če je $A \simeq A'$. Naj bo A $m \times n$, A' pa $m' \times n'$ matrika. Dovolj je preveriti enakost idealov le za matrike A', ki smo jih iz A dobili z eno od petih operacij iz definicije 17.

(i): Če zamenjamo stolpca ali vrstici, bo množica determinant vseh podmatrik velikosti $n-k$ ostala nespremenjena do predznaka elementov natančno, kar pa ne vpliva na generirani ideal. Robni pogoji se ne spremenijo, ker (i) ohranja dimenzijo matrik.

(ii): Velja $m' = m+1$ in $n' = n$. Obravnavajmo vse tri primere iz definicije elementarnih idealov 15. Če je $n-k \leq 0$, potem je tudi $n'-k \leq 0$, in po definiciji velja $E_k(A) = E_k(A') = R$. Če je $0 < n-k \leq m$, potem je tudi $0 < n'-k \leq m'$. Podmatrike v A' velikosti $n'-k$ so enake podmatrikam v A velikosti $n-k$, razen če podmatrika v A' vsebuje zadnjo ničelno vrstico, ki je A nima. Toda v tem primeru je njena determinanta enaka 0. Zato velja $E_k(A) = E_k(A')$. Če je $n-k > m$, potem je $n'-k > m'$, razen v primeru, ko je $n'-k = m'$. Vendar tedaj poljubna podmatrika v A' velikosti m' vsebuje vse vrstice, torej tudi zadnjo ničelno, in je zato njena determinantna enaka 0. V vsakem primeru velja $E_k(A) = E_k(A') = 0$.

(iii): Dimenzije matrike se ne spremenijo, torej moramo preveriti samo primer, ko je $0 < n-k \leq m$. Dovolj je, da dokažemo trditev le v primeru, ko i-ti vrstici prištejemo večkratnik j-te vrstice, za neka $i \neq j$, saj za poljubno linearno kombinacijo samo večkrat ponovimo ta korak za različne j. Označimo z A_i i-to vrstico A. Naj velja $A'_i = A_i + cA_j$ za neki $c \in R$. Vzemimo poljubno $(n-k) \times (n-k)$ podmatriko v A', označimo jo z B. Če ne vsebuje i-te vrstice, je to

tudi podmatrika v A. Sicer pa njeno determinanto, prek razvoja po i-ti vrstici, lahko zapišemo kot $\det B = \det B_1 + c \cdot \det B_2$, kjer je B_1 podmatrika v A, B_2 pa podmatrika v $\widehat{A}$. Matrika $\widehat{A}$ je enaka kot A, le da velja $\widehat{A}_i = A_j$ (podvojena j-ta vrstica). B_2 ima lahko dve enaki vrstici (njena determinanta je 0) ali pa je do permutacije vrstic enaka neki podmatriki v A (morda je vrstica A_j na napačnem mestu). Iz tega sledi, da sta $\det B_1$ in $\det B_2$ v $E_k(A)$ in zato je tudi $\det B \in E_k(A)$. Torej sledi $E_k(A') \subseteq E_k(A)$. Za obratno smer uporabimo, da velja $A_i = A'_i - cA'_j$, torej z enakim razmislekom sledi tudi $E_k(A) \subseteq E_k(A')$.

(iv): Dokažemo podobno kot (iii).

(v): Dokaz lahko najdete v [4, stran 29].

Naj bosta R in R' komutativna kolobarja z enico, $A \in M_{m\times n}(R)$ matrika in $\phi : R \to R'$ homomorfizem. Definiramo lahko $\phi(A)$, tako da vse elemente slikamo s ϕ, torej $\phi(A)_{ij} = \phi(A_{ij})$.

Trditev 13. *Če je ϕ surjektiven, velja $\phi(E_k(A)) = E_k(\phi(A))$.*

Dokaz. Vedno velja $\phi(0) = 0$ in po predpostavki $\phi(R) = R'$, torej trditev velja za $n - k > m$ in $n-k \leq 0$. V primeru, ko je $0 < n-k \leq m$, označimo z D množico determinant vseh podmatrik v A velikosti $n - k$ in analogno D' za podmatrike v $\phi(A)$. D generira $E_k(A)$, D' pa generira $E_k(\phi(A))$. Ker je determinanta vsota produktov elementov matrike ter ϕ ohranja vsote in produkte, saj je homomorfizem, velja $\phi(D) = D'$ in zato $E_k(\phi(A)) = \phi(E_k(A))$.

Ponovimo, kako izgleda trenutna situacija. Naj bosta $G = \langle X \mid R\rangle$ in $G' = \langle Y \mid S\rangle$ različni predstavitvi iste grupe in (f, g) ekvivalenca predstavitev. S H in H' označimo abelizirani grupi $G/[G, G]$ in $G'/[G', G']$. Pripadajoče kvocientne projekcije naj imajo enake oznake kot do sedaj: $\gamma : F_X \to G$, $\gamma' : F_Y \to G'$ in $\alpha : G \to H$, $\alpha' : G' \to H'$. Vemo, da preslikavi f in g inducirata inverzna homomorfizma f_* in g_* med G in G'. Po definiciji velja $f_*\gamma = \gamma' f$ in analogno tudi $g_*\gamma' = \gamma g$.

Ker za poljubna elementa $g, h \in G$ velja $f_*([g, h]) = [f_*(g), f_*(h)]$, sledi vsebovanost $f_*([G, G]) \subseteq [G', G']$. Tako spet lahko na enak način kot v opombi 4 definiramo induciran homomorfizem $f_{**} : H \to H'$, za katerega velja $f_{**}\alpha = \alpha' f_*$. Povsem enak razmislek velja za g_* in induciran homomorfizem g_{**}. Od prej vemo, da velja $f_*g_* = id$ in $g_*f_* = id$. Sedaj pa imamo tudi $f_{**}g_{**} = (f_*g_*)_* = id_* = id$ in enako $g_{**}f_{**} = id$. Torej sta si tudi f_{**} in g_{**} inverzna.

$$\begin{tikzcd}
F_X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, "\gamma"'] & F_Y \arrow[l, shift left, "g"] \arrow[d, "\gamma'"] \\
G \arrow[r, shift left, "f_*"] \arrow[d, "\alpha"'] & G' \arrow[l, shift left, "g_*"] \arrow[d, "\alpha'"] \\
H \arrow[r, shift left, "f_{**}"] & H' \arrow[l, shift left, "g_{**}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}[F_X] \arrow[r, shift left, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "\widetilde{\gamma}"'] & \mathbb{Z}[F_Y] \arrow[l, shift left, "\widetilde{g}"] \arrow[d, "\widetilde{\gamma}'"] \\
\mathbb{Z}[G] \arrow[r, shift left, "\widetilde{f}_*"] \arrow[d, "\widetilde{\alpha}"'] & \mathbb{Z}[G'] \arrow[l, shift left, "\widetilde{g}_*"] \arrow[d, "\widetilde{\alpha}'"] \\
\mathbb{Z}[H] \arrow[r, shift left, "\widetilde{f}_{**}"] & \mathbb{Z}[H'] \arrow[l, shift left, "\widetilde{g}_{**}"]
\end{tikzcd}$$

Vse homomorfizme med grupami zdaj enolično razširimo do homomorfizmov med grupnimi kolobarji po trditvi 7. Da jih ločimo med sabo, jih označujemo z vijugo. Enoličnost razširitve tudi zagotavlja, da velja $\widetilde{g}_{**}\widetilde{f}_{**} = id$ na celotnem $\mathbb{Z}[H]$, ne le na H (H gledamo kot podmnožico $\mathbb{Z}[H]$). To pomeni, da sta $\widetilde{f}_{**}$ in $\widetilde{g}_{**}$ inverzna izomorfizma grupnih kolobarjev. Vse opisano prikazujeta zgornja diagrama. Pripravljeni smo, da formuliramo najpomembnejši izrek tega poglavja – izrek o invarianci elementarnih idealov.

Izrek 14. *Naj bosta $\langle X \mid R\rangle$ in $\langle Y \mid S\rangle$ končni predstavitvi in (f, g) ekvivalenca predstavitev. Potem $\widetilde{f}_{**}$ preslika k-ti elementarni ideal $\langle X \mid R\rangle$ na k-ti elementarni ideal $\langle Y \mid S\rangle$. Analogno velja tudi za $\widetilde{g}_{**}$.*

Dokaz. Ker sta $\widetilde{f}_{**}$ in $\widetilde{g}_{**}$ inverzna, je dovolj trditev dokazati le za $\widetilde{f}_{**}$. Zaradi izreka 4 se lahko omejimo na primer, ko je f ena izmed Tietzejevih ekvivalenc I ali II. Označimo $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ in $R = \{r_1, \ldots, r_m\}$.

Naj bo $f = \mathrm{I}$. V tem primeru je $Y = X$ in $S = R \cup \{s\}$ za neki $s \in N_R$. Z A in A' označimo Alexandrovi matriki obeh predstavitev. Ker je I identiteta, sta identiteti tudi I_* in I_{**} in zato enako velja tudi za razširitev $\widetilde{\mathrm{I}}_{**}$. Torej moramo dokazati enakost idealov $E_k(A') = \widetilde{\mathrm{I}}_{**}(E_k(A)) = E_k(\widetilde{\mathrm{I}}_{**}(A)) = E_k(A)$ (drugi enačaj je posledica trditve 13). To bo sledilo iz ekvivalentnosti matrik A in A' in trditve 12. A' dobimo iz A tako, da dodamo še eno vrstico, ki ustreza odvodom nove relacije $\frac{\partial s}{\partial x_j}$ za $j = 1, \ldots, n$. Ker je $s \in N_R$, velja $s = \prod_{k=1}^{p} u_k r_{i_k}^{\beta_k} u_k^{-1}$ za neke $u_k \in F_X$, $\beta_k \in \mathbb{Z}$ in $p \in \mathbb{N}$. Zaradi zveze $u_k r_{i_k}^{\beta_k} u_k^{-1} = (u_k r_{i_k}^{\mathrm{sgn}(\beta_k)} u_k^{-1})^{|\beta_k|}$ lahko predpostavimo, da je $\beta_k = \pm 1$. Odvajamo in večkrat uporabimo pravilo za odvod produkta, da dobimo

$$\frac{\partial s}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(u_1 r_{i_1}^{\beta_1} u_1^{-1}) + u_1 r_{i_1}^{\beta_1} u_1^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j}(u_2 r_{i_2}^{\beta_2} u_2^{-1}) + \cdots + \left(\prod_{k=1}^{p-1} u_k r_{i_k}^{\beta_k} u_k^{-1}\right) \frac{\partial}{\partial x_j}(u_p r_{i_p}^{\beta_p} u_p^{-1}).$$

Ker velja $\widetilde{\gamma}(r_i) = 1$, se izraz poenostavi v

$$\widetilde{\gamma}\left(\frac{\partial s}{\partial x_j}\right) = \sum_{k=1}^{p} \widetilde{\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(u_k r_{i_k}^{\beta_k} u_k^{-1})\right).$$

Če uporabimo formulo za odvod inverza, dobimo

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(u_k r_{i_k}^{\beta_k} u_k^{-1}) = \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + u_k \frac{\partial r_{i_k}^{\beta_k}}{\partial x_j} - u_k r_{i_k}^{\beta_k} u_k^{-1} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}.$$

Uporabimo $\widetilde{\gamma}$ in poenostavimo izraz v

$$\widetilde{\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(u_k r_{i_k}^{\beta_k} u_k^{-1})\right) = \widetilde{\gamma}(u_k)\widetilde{\gamma}\left(\frac{\partial r_{i_k}^{\beta_k}}{\partial x_j}\right).$$

Če je $\beta_k = 1$, velja $\widetilde{\gamma}\left(\frac{\partial r_{i_k}^{\beta_k}}{\partial x_j}\right) = \widetilde{\gamma}\left(\frac{\partial r_{i_k}}{\partial x_j}\right)$. Sicer pa je $\beta_k = -1$ in velja $\widetilde{\gamma}\left(\frac{\partial r_{i_k}^{\beta_k}}{\partial x_j}\right) = \widetilde{\gamma}\left(\frac{\partial r_{i_k}^{-1}}{\partial x_j}\right) = \widetilde{\gamma}\left(-r_{i_k}^{-1}\frac{\partial r_{i_k}}{\partial x_j}\right) = -\widetilde{\gamma}\left(\frac{\partial r_{i_k}}{\partial x_j}\right)$. Torej v vsakem primeru drži $\widetilde{\gamma}(\frac{\partial r_{i_k}^{\beta_k}}{\partial x_j}) = \beta_k \widetilde{\gamma}(\frac{\partial r_{i_k}}{\partial x_j})$. Če označimo $\beta_k \widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}(u_k) = c_k$, dobimo kot rezultat

$$\widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}\left(\frac{\partial s}{\partial x_j}\right) = \sum_{k=1}^{p} \widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}(u_k)\widetilde{\alpha}\left(\beta_k \widetilde{\gamma}\left(\frac{\partial r_{i_k}}{\partial x_j}\right)\right) = \sum_{k=1}^{p} c_k \widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}\left(\frac{\partial r_{i_k}}{\partial x_j}\right).$$

Ker so koeficienti c_k enaki za vse indekse j, je zadnja vrstica A' linearna kombinacija preostalih vrstic. Torej smo A' dobili iz A z uporabo operacij (ii) in (iii) iz definicije 17.

Podobno dokažemo za $f = \mathrm{II}$. Tokrat matriko A' dobimo tako, da A dodamo novo vrstico, ki ustreza odvodom nove relacije, in nov stolpec, ki ustreza odvajanju po novem generatorju. Enakost idealov spet dokažemo prek ekvivalentnosti matrik z uporabo operacije (v') iz opombe 9. Podrobnosti so v [4, stran 31].

6. Vozelni polinomi

V prejšnjem poglavju smo za poljubno končno predstavitev definirali elementarne ideale in pokazali, da so invariante tipa predstavitve. Sedaj pa se bomo omejili le na grupe vozlov – označimo z G grupo vozla K. Najprej si bomo bolj podrobno pogledali abelizirano grupo $G/[G,G]$, ki jo bomo označevali s H. Videli bomo, da se zaradi dodatne komutativnosti grupa zelo poenostavi. Pri tem si bomo pomagali z Wirtingerjevo predstavitvijo G. Temeljni vir, ki vsebuje snov tega poglavja, je [1, poglavje 8].

Trditev 15. *Naj bo G grupa vozla K. Njena abelizirana grupa H je neskončna ciklična grupa.*

Dokaz. Naj bo $\langle X \mid R\rangle$ predstavitev grupe G. Predstavitev $G/[G,G] = H$ je potem $\langle X \mid R \cup \{[x_i, x_j] \mid x_i, x_j \in X\}\rangle$. Uporabimo Wirtingerjevo predstavitev iz izreka 6, kar nam da $H \cong \langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1, \ldots r_n \cup \{[x_i, x_j] \mid x_i, x_j \in X\}\rangle$. Spomnimo se, da so relacije r_i oblike $x_i x_k^{-1} x_{i+1}^{-1} x_k$ ali $x_i x_k x_{i+1}^{-1} x_k^{-1}$. Če upoštevamo komutativnost generatorjev H, se v obeh primerih r_i poenostavi v $x_i = x_{i+1}$. Vse relacije lahko torej po $T1$ in $T1'$ nadomestimo z $x_1 = x_2, \ldots, x_{n-1} = x_n$, da dobimo ekvivalentno predstavitev

$$\langle x_1, \ldots, x_n \mid x_1 = x_2, x_2 = x_3, \ldots, x_{n-1} = x_n\rangle.$$

Ker generator x_n nastopa kot črka le v zadnji relaciji $x_n x_{n-1}^{-1}$, ga lahko skupaj z relacijo odstranimo s transformacijo $T2'$. Postopek ponavljamo in zaporedoma odstranimo še generatorje $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_2$ s pripadajočimi relacijami. Na koncu nam ostane le $\langle x_1 \mid \rangle$, kar je predstavitev neskončne ciklične grupe.

Na elemente grupnega kolobarja $\mathbb{Z}[H]$ lahko gledamo kot na posplošene polinome v spremenljivki t, kjer je t generator H, npr. $3t^{-2} + 5 + 7t^3$. Polinome, pri katerih dopuščamo tudi negativne eksponente, imenujemo *Laurentovi polinomi*. Uporabljamo tudi oznako $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.

Pri Alexandrovi matriki smo omenili, da je vloga $\widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}$ v poenostavitvi izrazov, ki nastopajo v matriki. Sedaj lahko končno bolj konkretno povemo, kaj smo mislili s tem. Poglejmo, kam se z $\alpha\gamma$ slikajo generatorji proste grupe x_i. Vemo, da za vsako Wirtingerjevo relacijo r_i velja $\alpha\gamma(r_i) = 1$. Privzemimo, da je r_i tipa $x_i x_k^{-1} x_{i+1}^{-1} x_k$ (enako bi veljalo za drugi tip). Ker je H komutativna, velja

$$1 = \alpha\gamma(x_i x_k^{-1} x_{i+1}^{-1} x_k) = \alpha\gamma(x_i)\alpha\gamma(x_{i+1})^{-1}\alpha\gamma(x_k)^{-1}\alpha\gamma(x_k) = \alpha\gamma(x_i)\alpha\gamma(x_{i+1})^{-1}.$$

To pomeni, da so vse slike generatorjev $\alpha\gamma(x_i)$ enake. Ker pa je $\alpha\gamma$ surjektivna, morajo generirati neskončno ciklično grupo H. Torej so enake njenemu generatorju t (lahko bi izbrali tudi generator t^{-1}). Enako velja tudi za $\widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}$, ker razširja $\alpha\gamma$.

Primer 4 (Deteljica). V primeru 3 smo že izračunali Alexandrovo matriko

$$A = \begin{bmatrix} \widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}(1 + xy - y) & \widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}(x - 1 - yx) \end{bmatrix}.$$

Po prejšnjem razmisleku lahko to poenostavimo v

$$A = \begin{bmatrix} 1 + t^2 - t & t - 1 - t^2 \end{bmatrix}.$$

Dimenzije matrike so $m = 1$ in $n = 2$. Po definiciji elementarnih idealov velja

- $E_0(A) = 0$, saj je $n - k = 2 - 0 > 1 = m$,
- $E_1(A) = (1 - t + t^2, -(1 - t + t^2)) = (1 - t + t^2)$, saj v tem primeru gledamo ideal, generiran z elementi A,

- $E_k(A) = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ za $k \geq 2$, saj je $n - k = 2 - k \leq 0$.

Oglejmo si še trivialni vozel, tj. vozel brez križišč. Ima samo en nadvoz, torej ima njegova grupa en sam generator in nobene relacije – njena predstavitev je $\langle x \mid \rangle$. Alexandrova matrika A' ima dimenzije $m = 0$ in $n = 1$, zato takoj iz definicije elementarnih idealov sledi, da je $E_0(A') = 0$ ter $E_k(A') = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ za $k \geq 1$. Z izomorfizmom očitno ne moremo preslikati $E_1(A)$ na $E_1(A')$, ki je celoten kolobar. Po izreku 14 smo s tem dokazali, da deteljica in trivialni vozel nimata iste grupe vozla, zato tudi nista vozla istega tipa. To je "dokaz", da deteljice ne moremo razvezati.

Preden definiramo vozelne polinome, moramo spoznati nekaj lastnosti grupnega kolobarja $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. Za začetek ponovimo definicijo največjega skupnega delitelja v celem kolobarju.

Definicija 18. d je največji skupni delitelj $a_1, \ldots, a_n$, če $d \mid a_i$ za vsak $i = 1, \ldots, n$, tj. d je skupni delitelj $a_1, \ldots, a_n$, poleg tega pa $e \mid d$, čim je e neki drugi skupni delitelj $a_1, \ldots, a_n$.

Opomba 10. Ekvivalentno bi lahko definirali d kot generator najmanjšega glavnega ideala, ki vsebuje $a_1, \ldots, a_n$, če ta obstaja. Pogoj $a_i \in (d)$ pomeni, da je $a_i = p_i d$ oz. $d \mid a_i$, torej je d skupni delitelj $a_1, \ldots, a_n$. Za vsak drugi skupni delitelj e pa velja $(d) \subseteq (e)$ in zato $e \mid d$.

Sledeča trditev je enostavna posledica znanega dejstva, da v kolobarju polinomov ene spremenljivke s celoštevilskimi koeficienti vedno obstaja največji skupni delitelj.

Trditev 16. *V $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ obstaja največji skupni delitelj poljubne končne množice.*

Sledi definicija *vozelnih polinomov*, ki je zelo podobna definiciji elementarnih idealov 15.

Definicija 19. Naj bodo $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, $\langle X \mid R \rangle$ končna predstavitev grupe vozla in A Alexandrova matrika te predstavitve. Definiramo *k-ti vozelni polinom* Δ_k predstavitve $\langle X \mid R \rangle$:

- Δ_k je največji skupni delitelj determinant vseh podmatrik v A velikosti $n-k$, če je $0 < n-k \leq m$,
- $\Delta_k = 0$, če je $n - k > m$,
- $\Delta_k = 1$, če je $n - k \leq 0$.

Dobra definiranost vozelnih polinomov je posledica trditve 16. Po opombi 10 bi lahko Δ_k definirali tudi kot generator najmanjšega glavnega ideala, ki vsebuje determinante vseh $(n - k) \times (n - k)$ podmatrik v A. Ker pa te determinante generirajo ravno elementarni ideal $E_k(A)$, je Δ_k generator najmanjšega glavnega ideala, ki vsebuje $E_k(A)$. Taka definicija se ujema tudi za robna primera $n - k > m$ in $n - k \leq 0$.

Opomba 11. Ko govorimo o vozelnih polinomih, ponavadi mislimo vozelne polinome v *normalizirani obliki.* Vemo, da je največji skupni delitelj določen le do asociiranosti natančno, tj. do množenja z obrnljivim elementom. Kratek razmislek pove, da so edini obrnljivi elementi v $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ potence $\pm t^m$ za poljuben $m \in \mathbb{Z}$. Če želimo normalizirano obliko neničelnega vozelnega polinoma, izberemo tak $\pm t^m$, da dobljeni polinom ne bo imel negativnih potenc in bo njegov konstantni koeficient pozitiven (npr. normalizirana oblika $3t + t^{-3} - 2t^{-5}$ je $-3t^6 - t^2 + 2$).

Iz opombe 6 o odvečni relaciji v Wirtingerjevi predstavitvi sledi, da vedno obstaja predstavitev grupe vozla z n generatorji in $n - 1$ relacijami. V tem primeru bo Alexandrova matrika dimenzij $(n-1) \times n$. Zato bosta $E_0(A) = 0$ in $\Delta_0 = 0$. Podobno kot za elementarne ideale bomo dokazali, da so vozelni polinomi neodvisni od predstavitve grupe vozla, torej bo vedno veljalo $\Delta_0 = 0$. Zato bo Δ_1 prvi neničelni vozelni polinom. V praksi se izkaže, da zelo pogosto lahko vozle ločimo že samo na podlagi Δ_1. Zaradi njegove pomembnosti se je za vozelni polinom Δ_1 uveljavilo posebno ime – *Alexandrov polinom.*

Naslednja trditev bo še bolj povezala Alexandrov polinom in prvi elementarni ideal $E_1(A)$.

Trditev 17. *Elementarni ideal $E_1(A)$ je glavni ideal in njegov generator je Alexandrov polinom Δ_1.*

Dokaz. Naj bo r_i Wirtingerjeva relacija iz predstavitve grupe vozla. Spomnimo se formule, ki smo jo dokazali prek posledice 10:

$$r_i - 1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial x_j}(x_j - 1).$$

Če na njej uporabimo $\widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}$, dobimo

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)(\widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}(x_j) - 1).$$

Upoštevamo, da je $A_{ij} = \widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}(\frac{\partial r_i}{\partial x_j})$ in $\widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}(x_j) = t^{\pm 1}$. Torej je

$$0 = \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\right)(t^{\pm 1} - 1).$$

Ker v $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ nimamo deliteljev niča, mora veljati $\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = 0$ za vsak i. To pomeni, da je vsota elementov v vsaki vrstici enaka 0. Če zadnjemu stolpcu A prištejemo vse ostale stolpce, dobimo zato stolpec ničel. Matrika A je torej ekvivalentna $(n-1) \times n$ matriki z ničelnim zadnjim stolpcem. V tej matriki pa je največ ena $(n-1) \times (n-1)$ podmatrika z neničelno determinanto. Torej je ideal $E_1(A)$ res generiran z enim samim elementom, ki je očitno Δ_1.

Kot posledico trditve 11 lahko dokažemo podobno zvezo tudi za vozelne polinome in sicer $\Delta_{k+1} \mid \Delta_k$ za vsak $k \geq 0$. Vemo, da velja $E_k(A) \subseteq E_{k+1}(A) \subseteq (\Delta_{k+1})$. Ker pa je (Δ_k) najmanjši glavni ideal, ki vsebuje $E_k(A)$, mora veljati $(\Delta_k) \subseteq (\Delta_{k+1})$. Zato res drži $\Delta_{k+1} \mid \Delta_k$.

Dokažimo sedaj izrek o invarianci vozelnih polinomov. Situacija je popolnoma enaka kot v opisu pred izrekom 14 o invarianci elementarnih idealov. Uporabljali bomo tudi enake oznake.

Izrek 18. *Naj bosta $\langle X \mid R\rangle$ in $\langle Y \mid S\rangle$ končni predstavitvi grupe vozla in (f, g) ekvivalenca predstavitev. Potem je slika k-tega vozelnega polinoma Δ_k predstavitve $\langle X \mid R\rangle$ s $\widetilde{f}_{**}$ asociirana k-temu vozelnemu polinomu Δ'_k predstavitve $\langle Y \mid S\rangle$. Simetrično velja tudi za $\widetilde{g}_{**}$.*

Dokaz. Skoraj vse delo smo opravili že z dokazom izreka 14. Vemo, da velja $E_k(A) \subseteq (\Delta_k)$, $E_k(A') \subseteq (\Delta'_k)$ in $\widetilde{f}_{**}(E_k(A)) = E_k(A')$. Torej sledi $E_k(A') \subseteq \widetilde{f}_{**}((\Delta_k))$. Ideal $\widetilde{f}_{**}((\Delta_k))$ je glavni, ker je izomorfna slika glavnega ideala. Ker pa je (Δ'_k) najmanjši glavni ideal, ki vsebuje $E_k(A')$, mora veljati $(\Delta'_k) \subseteq \widetilde{f}_{**}((\Delta_k))$. Enak razmislek lahko naredimo tudi za $\widetilde{g}_{**} = \widetilde{f}_{**}^{-1}$ in dobimo $(\Delta_k) \subseteq \widetilde{f}_{**}^{-1}((\Delta'_k))$. Zato res velja $\widetilde{f}_{**}((\Delta_k)) = (\Delta'_k)$ in njuna generatorja $\widetilde{f}_{**}(\Delta_k)$ in Δ'_k morata biti asociirana.

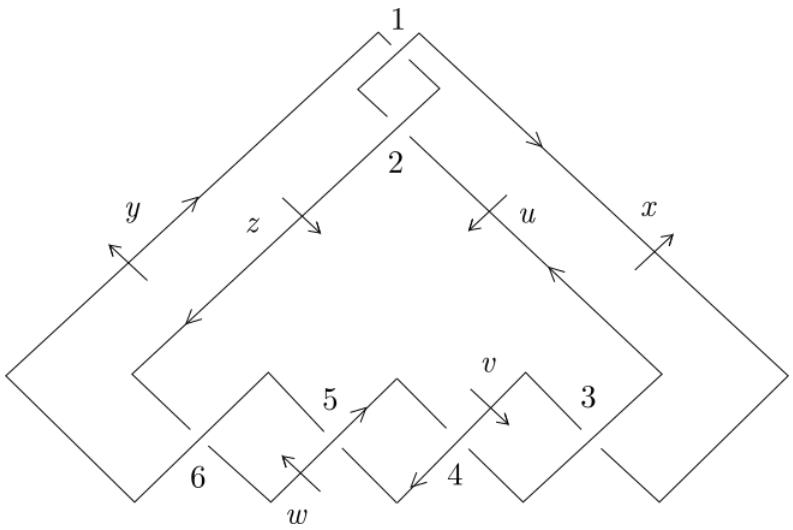
Ali lahko iz pravkar dokazanega izreka sklepamo, da se morata normalizirana polinoma Δ_k in Δ'_k ujemati v vseh koeficientih? Vemo, da to velja za $\widetilde{f}_{**}(\Delta_k)$ in Δ'_k, saj imajo associirani elementi isto normalizirano obliko. Razmislimo, kakšne možnosti imamo za izomorfizem $f_{**} : H \to H'$. Ker sta H in H' po trditvi 15 neskončni ciklični grupi, imamo samo dve možnosti: f_{**} lahko preslika generator t v t' ali pa v t'^{-1}. V prvem primeru se normalizirana oblika zagotovo ohranja. Poglejmo si, kaj se zgodi v drugem primeru. Če v polinomu $a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0$ zamenjamo t s t'^{-1} in normaliziramo, dobimo $\pm(a_0 t'^n + \cdots + a_{n-1}t' + a_n)$, ki ima ravno zamenjan vrstni red koeficientov. Izkaže se, da so vsi vozelni polinomi "palindromski" (dokaz lahko najdete v [1, str. 136–144]), torej vedno velja $a_n = a_0$, $a_1 = a_{n-1}, \ldots$ ali bolj na kratko $\Delta_k(t) = t^m \Delta_k(t^{-1})$ za neki $m \in \mathbb{Z}$. Ta

lastnost zagotavlja, da se normalizirane oblike vozelnih polinomov vozlov istega tipa ujemajo v vseh koeficientih.

Kot zanimivost omenimo še, da Alexandrov polinom karakterizirata naslednji dve lastnosti: palindromskost, tj. $\Delta_1(t) = t^m \Delta_1(t^{-1})$ za neki $m \in \mathbb{Z}$, in vrednost $\tau(\Delta_1) = \pm 1$ pri sliki s trivializatorjem. To pomeni, da je vsak polinom, ki zadošča tema dvema lastnostma, Alexandrov polinom nekega poligonskega vozla. Še več, obstaja celo karakterizacija celotnega zaporedja vozelnih polinomov. O lastnostih Alexandrovega polinoma lahko več preberete v [1, poglavje 9], karakterizacija zaporedja vozelnih polinomov pa je opisana v [5].

Primer 5. Za zaključek si poglejmo še primer, ki bo pokazal razliko med elementarnimi ideali in vozelnimi polinomi. Na kratko ponovimo zgodbo od začetka. Želimo ločiti vozle različnih tipov. Definiramo grupo vozla in iz njene predstavitve dobimo neko dokaj lahko izračunljivo invarianto – zaporedje elementarnih idealov ali vozelnih polinomov. Pomanjkljivost tega postopka je, da na vsakem koraku izgubimo nekaj informacij o vozlu. To pomeni, da sta lahko vozla različnega tipa, ampak ju z našim postopkom ne bomo mogli ločiti, ker smo izgubili preveč informacij. Obstajajo celo vozli različnih tipov, ki imajo enake grupe vozlov, torej naš način ločevanja odpove že na samem začetku. Ogledali si bomo dva vozla, ki ju lahko ločimo z elementarnimi ideali, vozelni polinomi pa so pri obeh enaki. Torej je prednost elementarnih idealov, da boljše ločujejo med vozli, vendar pa je vozelne polinome lažje izračunati.

Prvi vozel ima oznako 6_1 po Alexander-Briggsovi notaciji, kjer 6 označuje najmanjše možno število križišč v diagramu vozla. Označimo generatorje grupe vozla z x, y, z, u, v, w. Naš cilj bo



Slika 8. Diagram vozla 6_1 (*Stevedore's knot*) z označenimi generatorji in križišči.

preko Wirtingerjevih relacij generatorje z, u, v, w izraziti z x in y. Za to bomo potrebovali 4 relacije. Peta Wirtingerjeva relacija nam bo dala neko relacijo med x in y, ki bo dejansko nastopala v končni poenostavljeni predstavitvi, šesta pa bo služila za preizkus. Če smo pravilno računali, bi namreč morala biti šesta relacija posledica prvih petih. Križišča 1–4 nam zaporedoma dajo izražave $z = xyx^{-1}$, $u = z^{-1}xz = xy^{-1}xyx^{-1}$, $v = u^{-1}xu = xy^{-1}x^{-1}yxy^{-1}xyx^{-1}$ in $w = vuv^{-1} = xy^{-1}x^{-1}yxy^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}$. Peto križišče nam da zvezo $vw = wy$, ki je ekvivalentna

$$xy^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xyx^{-1} = y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y.$$

Šesto križišče pa ustreza relaciji $zy = yw$, ki je res posledica prejšnjih. Če upoštevamo vseh 5 zvez,

ki smo jih do sedaj izpeljali, namreč dobimo:

$$\begin{aligned} yw &= y(xy^{-1}x^{-1}yxy^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}) = (yxy^{-1}x^{-1}y)(xy^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}) \\ &= (yxy^{-1}x^{-1}y)(y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y) = (xyx^{-1})y \\ &= zy. \end{aligned}$$

S Tietzejevimi transformacijami poenostavljena predstavitev grupe vozla je torej

$$\langle x, y \,|\, xy^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xyx^{-1} = y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y \rangle.$$

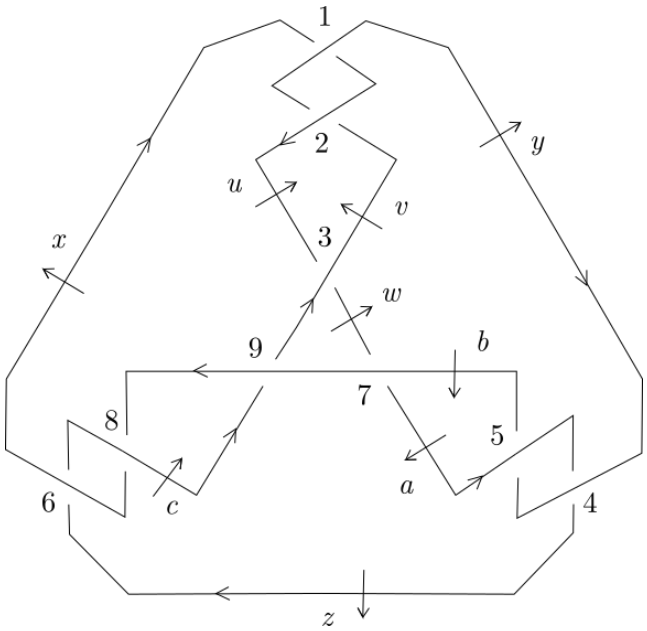
Izračunajmo Alexandrovo matriko. Po odvajanju postanejo izrazi zelo dolgi, vendar se močno poenostavijo, če postavimo $\widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}(x) = \widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}(y) = t$. Pri tem se moramo zavedati, da to lahko storimo, ker pri poenostavljanju predstavitve nismo vpeljali novih generatorjev, ampak sta x in y generatorja iz prvotne Wirtingerjeve predstavitve. Novi generatorji se ne bi nujno slikali v isti element t. Kot rezultat dobimo

$$A = \begin{bmatrix} -2t + 5 - 2t^{-1} & 2t - 5 + 2t^{-1} \end{bmatrix}.$$

Iz matrike takoj lahko preberemo elementarne ideale in vozelne polinome:

- $E_0(A) = 0$ in $\Delta_0 = 0$,
- $E_1(A) = (2t^2 - 5t + 2)$ in $\Delta_1 = 2t^2 - 5t + 2$,
- $E_k(A) = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ in $\Delta_k = 1$ za $k > 1$.

Drugi vozel pa ima oznako 9_{46}, kar pomeni, da ima 9 križišč. Postopek bo potekal popolnoma



Slika 9. Diagram vozla 9_{46}.

enako kot prej, le da bomo tokrat iz križišč 1–6 preostale generatorje izrazili z x, y in z, križišči 7 in 8 nam bosta dali 2 relaciji v naši grupi, križišče 9 pa bi lahko služilo za preizkus. Dobljene izražave so: $u = yxy^{-1}$, $v = u^{-1}yu = yx^{-1}yxy^{-1}$, $w = vuv^{-1} = yx^{-1}yxy^{-1}xy^{-1}$, $a = yzy^{-1}$, $b = a^{-1}ya = yz^{-1}yzy^{-1}$, $c = xzx^{-1}$. Relaciji pa sta

- s_1: $wb = ba$ oz. $x^{-1}yxy^{-1}x = z^{-1}yzy^{-1}z$,

- s_2: $cb = xc$ oz. $yz^{-1}yzy^{-1} = xz^{-1}xzx^{-1}$.

Tako dobimo poenostavljeno predstavitev grupe vozla

$$\langle x, y, z \,|\, x^{-1}yxy^{-1}x = z^{-1}yzy^{-1}z, yz^{-1}yzy^{-1} = xz^{-1}xzx^{-1}\rangle.$$

Pri odvajanju nam bo koristilo, da sta relaciji zapisani v taki obliki, da na vsaki strani enačaja nastopata le 2 generatorja. To pomeni, da bo odvod po tretjem generatorju enak 0. Če odvajamo s_1 po x, dobimo

$$\begin{aligned}\widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}\left(\frac{\partial s_1}{\partial x}\right) &= \widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x^{-1}yxy^{-1}x) - \frac{\partial}{\partial x}(z^{-1}yzy^{-1}z)\right)\\ &= \widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}((-x^{-1} + x^{-1}y + x^{-1}yxy^{-1}) - 0)\\ &= -t^{-1} + 1 + 1 = -t^{-1} + 2.\end{aligned}$$

Vse ostale odvode izračunamo na zelo podoben način. Dobljena Alexandrova matrika je

$$A = \begin{bmatrix} 2 - t^{-1} & 0 & -2 + t^{-1} \\ t - 2 & -t + 2 & 0 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 + t^{-1} \\ 0 & -t + 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Namesto z A bomo računali z ekvivalentno matriko (zgoraj na desni), ki jo dobimo, če prvemu stolpcu prištejemo drugega in tretjega. Imamo samo eno 2×2 podmatriko z neničelno determinanto – njena determinantna je $(-t + 2)(-2 + t^{-1}) = 2t - 5 + 2t^{-1}$. To pomeni, da je $E_1(A) = (2t^2 - 5t + 2)$ in $\Delta_1 = 2t^2 - 5t + 2$, če normaliziramo. Če gledamo vse 1×1 podmatrike, dobimo $E_2(A) = (-t + 2, -2 + t^{-1})$ in $\Delta_2 = \gcd(-t + 2, -2 + t^{-1}) = \gcd(-t + 2, -2t + 1) = 1$. Za $k > 2$ pa očitno velja $E_k(A) = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ in $\Delta_k = 1$ po definiciji.

Če povzamemo, smo do sedaj dokazali, da imata vozla enako zaporedje vozelnih polinomov. Edina razlika v verigi elementarnih idealov pa se morda pojavi pri $E_2(A)$. Za prvi vozel velja $E_2(A) = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, pri drugem pa je $E_2(A) = (-t + 2, -2 + t^{-1})$. Pokažimo, da $(-t+2, -2+t^{-1}) \neq \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. Prek predpisa $t, t^{-1} \mapsto -1$ definirajmo homomorfizem $\varphi : \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \to \mathbb{Z}$. Ker je v njegovi sliki generator -1, je φ surjektiven. Kaj pa je slika $\varphi((-t + 2, -2 + t^{-1}))$? Velja $\varphi(-t + 2) = 3$ in $\varphi(-2+t^{-1}) = -3$, torej so vsi elementi v sliki deljivi s 3. To pa pomeni, da $\varphi((-t+2, -2+t^{-1})) \neq \mathbb{Z} = \varphi(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ in zato res $(-t + 2, -2 + t^{-1}) \neq \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.

7. Zahvala

Za nasvete in popravke pri pisanju članka se zahvaljujem izr. prof. dr. Sašu Strletu.

LITERATURA

[1] R. H. Crowell in R. H. Fox, *Introduction to Knot Theory*, Graduate Texts in Mathematics **57**, Springer-Verlag, New York, 1977; dostopno tudi na `www.maths.ed.ac.uk/~aar/papers/crowfox.pdf`.

[2] R. H. Fox, *Free Differential Calculus. I: Derivation in the Free Group Ring*, The Annals of Mathematics, 2nd Ser. **57** (1953) 547–560; dostopno tudi na `www.maths.ed.ac.uk/~aar/papers/fox1.pdf`.

[3] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, New York, 2002; dostopno tudi na `www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf`.

[4] J. Kosmač, *Alexandrov polinom*, delo diplomskega seminarja, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2017.

[5] J. Levine, *A Characterization of Knot Polynomials*, Topology **4** (1965) 135–141; dostopno tudi na `www.brandeis.edu/departments/mathematics/docs/levinepapers/charknotpoly.pdf`.

[6] W. Magnus, A. Karrass in D. Solitar, *Combinatorial Group Theory*, Pure and Applied Mathematics **XIII**, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1966.

[7] D. Rolfsen, *Knots and Links*, AMS Chelsea Publishing, Providence, 2003; dostopno tudi na `www.maths.ed.ac.uk/~aar/papers/rolfsen.pdf`.

[8] J. Stillwell, *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*, Graduate Texts in Mathematics **72**, Springer-Verlag, New York, 1980.