

PERKOLACIJA

MIHA ROT

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

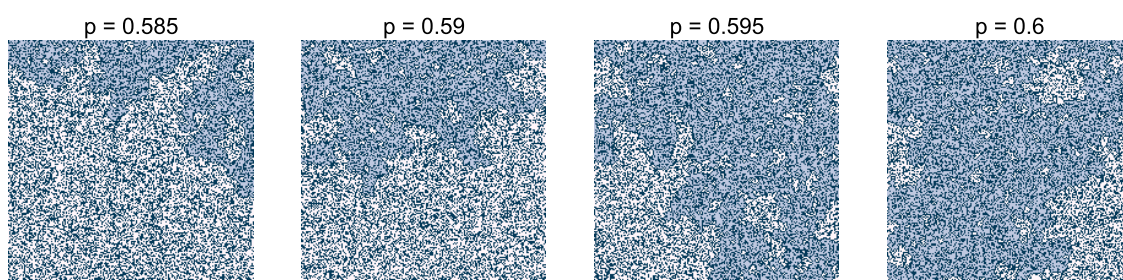
Članek predstavi osnove perkolacije in na preprostih primerih prikaže ključne pojme, s katerimi si olajšamo opis sistemov s faznimi prehodi, ki bi bili drugače morda prezahtevni za obravnavo. Proti koncu članka so prikazani konkretni zgledi uporabe teorije perkolacije, urejanje celic v žilni sistem in opazovanje obnašanja vremenskega sistema.

PERCOLATION

The article presents basics of percolation theory and uses simple examples to demonstrate concepts that enable a description of systems with phase transitions that would otherwise be too difficult to deal with. Real world examples of percolation theory usage are described in the latter part of the article, specifically cell growth ordering and weather system analysis.

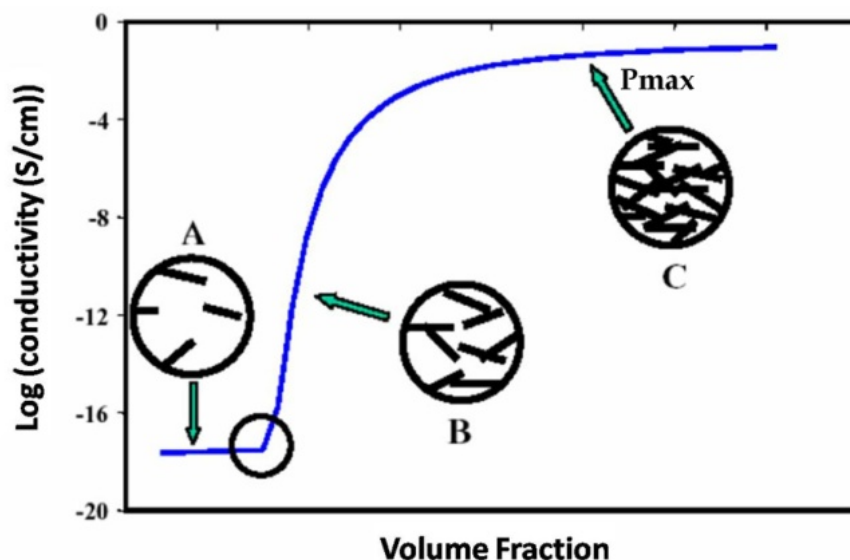
1. Uvod

Pri perkolaciji se pravzaprav ukvarjamo s konceptom povezanosti. V fiziki je zelo pogosta osnova, ki je sama po sebi neprehodna, a vsebuje nepravilnosti, ki dovoljujejo prehajanje. Sam izraz perkolacija izhaja iz latinske besede *percolare*, ki v prevodu pomeni filtrirati in že to nakaže prvi preprosti pojav, s katerim si lahko poskušamo predstavljati perkolacijo. Vzemimo za vodo neprepustno skalo, v kateri se pojavljajo drobne prepustne razpoke. Skala z malo razpokami je seveda še vedno neprehodna ovira za vodo, vendar se to ob povečevanju števila razpok nenadoma spremeni. Pojavi se oster fazni prehod iz neprepustne v prepustno fazo in ravno ta prehod je predmet preučevanja za teorijo perkolacije. Poenostavljen model skale z razpokami v okolici faznega prehoda je prikazan na Sliki 1, kjer p predstavlja verjetnost, da posamezno mesto predstavlja razpoko.



Slika 1. Prikaz naključno porazdeljenih prehodnih (belih) in neprehodnih (črnih) mest za različne verjetnosti p , da je mesto prehodno. Z modro so obarvana prehodna mesta povezana z zgornjim robom.

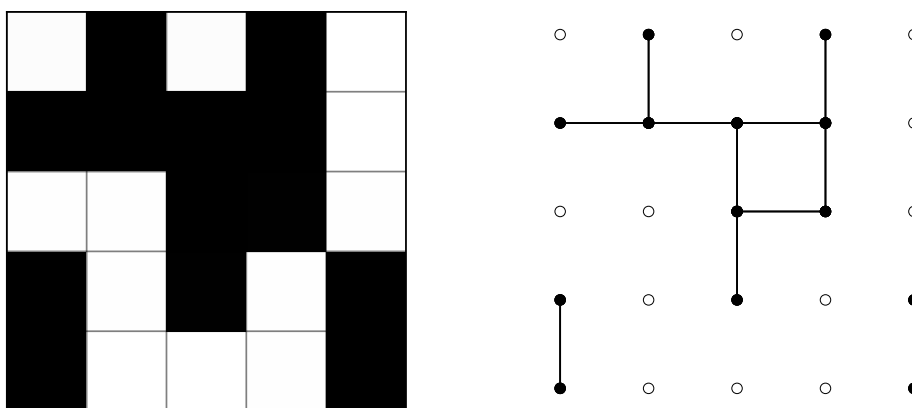
Za perkolacijo je torej ključna naključna porazdeljenost prehodnih motenj v sredstvu, kar pa se izkaže za relativno pogost pojav. Zamislimo si človeško populacijo, sicer cepljeno proti kužni bolezni, v kateri pa se pojavljajo skeptiki, ki v cepljenje ne verjamejo. Prenos bolezni bo onemogočen dokler ne bo delež skeptikov zadosten za vzpostavitev medsebojne povezave, po kateri se bo nato lahko prenesla bolezen. Znova je prisoten oster fazni prehod značilen za perkolacijo. Imenujemo ga perkolacijski prag, perkolacija pa se ukvarja s spreminjanjem povezanosti v okolici faznega prehoda, saj je le ta odvisna predvsem od dimenzije mreže. Aplikacij je mnogo, mednje sodi tudi preučevanje



Slika 2. Skica prevodnosti skozi tekočino z dodanimi prevodnimi vlakni na mikroskopskem nivoju [1].

stabilnosti računalniški omrežij, prevodnost tekočih kristalov ob dodajanju prevodnih vlaken (Slika 2) ter navsezadnje tudi razraščanje celic, ki ga bomo podrobneje opisali kasneje.

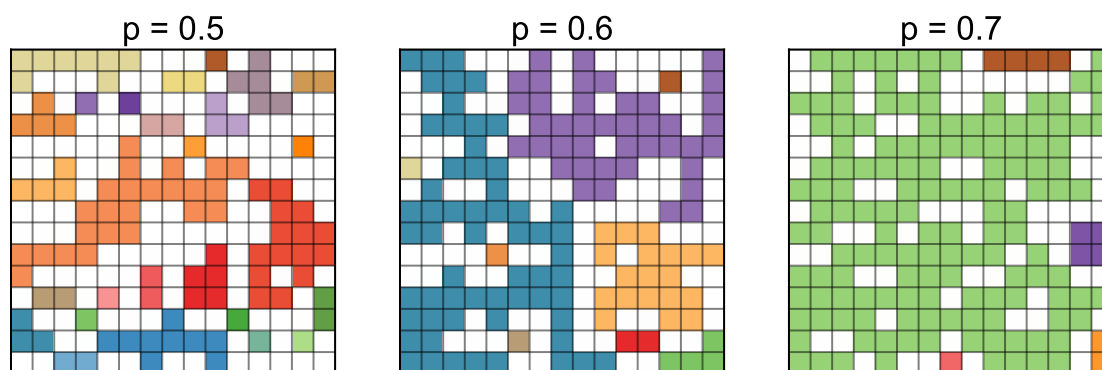
Poznamo dve vrsti perkolacije: perkolacijo mest in perkolacijo vezi. Pri prvi si vsako mesto v mreži predstavljamo kot prehodno ali neprehodno, dogodek pa lahko potuje le na sosednja prehodna mesta, pri drugi pa spremljamo meje med sosednjimi mesti, dogodek pa lahko potuje le, kjer so povezave prehodne. Vsak model vezi se da reformulirati v model mest na drugačni mreži, medtem ko obratno ne velja, zato je perkolacija mest splošnejša in bomo odslej obravnavali le to. Na Sliki 3 sta prikazani ekvivalentni perkolaciji mest in vezi.



Slika 3. Skica perkolacije mest in vezi.

Za lažjo predstavo in preprostost se pri izpeljavi omejimo na mrežo, na kateri so mesta lahko prehodna z verjetnostjo p , oziroma neprehodna z verjetnostjo $(1 - p)$. Na mreži se tvorijo gruče prehodnih mest, katerih povprečna velikost je odvisna od verjetnosti za prehodnost p . Na Sliki 4 so gruče prikazane z isto barvo, opazimo pa tudi, kako se njihova velikost in predvsem povezanost med stranicami drastično poveča okoli $p = 0.6$, kar je tudi smiselno, saj vemo, da je perkolacijski prag za perkolacijo mest na 2D kvadratni mreži ravno pri $p = 0.59$ [2].

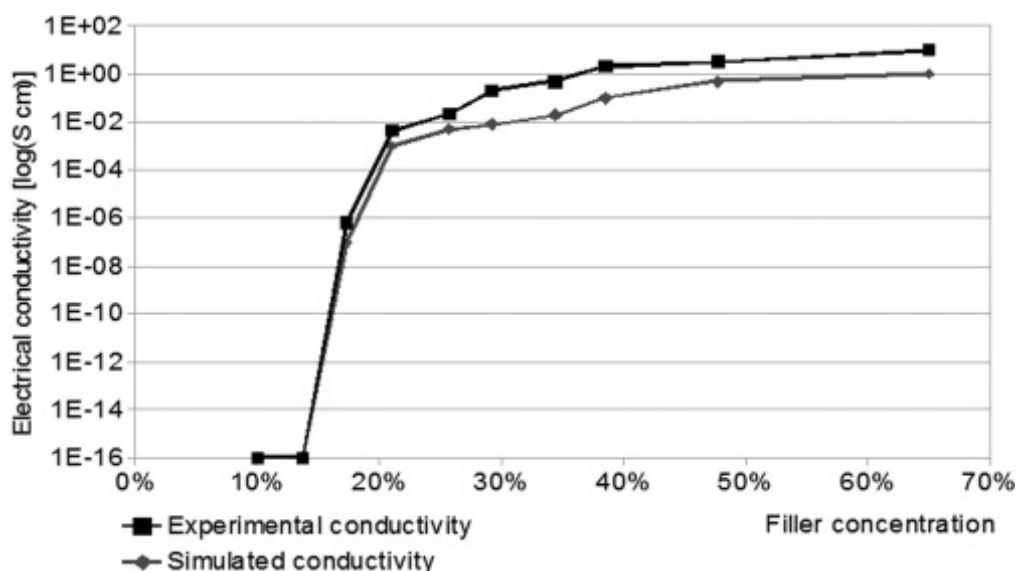
Perkolacija



Slika 4. Prikaz povezanih mest na mreži za različne vrednosti p .

Pri pojavih, ki jih opisujemo s teorijo perkolacije, je ključna povezanost, zato nas zanimajo predvsem gruče, ki povežejo stranice s prehodnimi mesti in posledično ustvarijo povezavo čez mrežo. Pri vrednosti $p = 0$ povezava očitno ne obstaja, medtem ko je pri $p = 1$ zagotovljena, a to sta le trivialni rešitvi problema. Zares zanimiva in pomembna je verjetnost p , pri kateri se nahaja perkolacijski prag, zato jo označujemo s p_c .

Prag predstavlja fazni prehod. V preprostem modelu je fazni prehod oster, saj spremljamo le povezavo na neskončni mreži, ki pod p_c ne obstaja, nad to mejo pa je zagotovljena. Pri opisu realnih sistemov pa se prehod zabriše, saj ima zaradi končne velikosti sistema naključnost večji vpliv. Velike gruče se lahko pojavljajo pri majhnih p ali pa sistem ostane popolnoma nepovezan pri $p = 0.99$. Obenem pa se pogoji za prenos merljivih količin, naprimer električnega toka, kot je prikazano na Sliki 5, s povečevanjem p in vse večjim številom prehodnih mest še dodatno izboljšujejo. Opis okolice prehoda omogoča teorija perkolacije s pomočjo kritičnih eksponentov, katerih izpeljavo bom orisal v nadaljevanju.



Slika 5. Izmerjena in simulirana električna prevodnost za neprevoden tekočokristalni polimer z dodanim prevodnim sintetičnim grafitom [3].

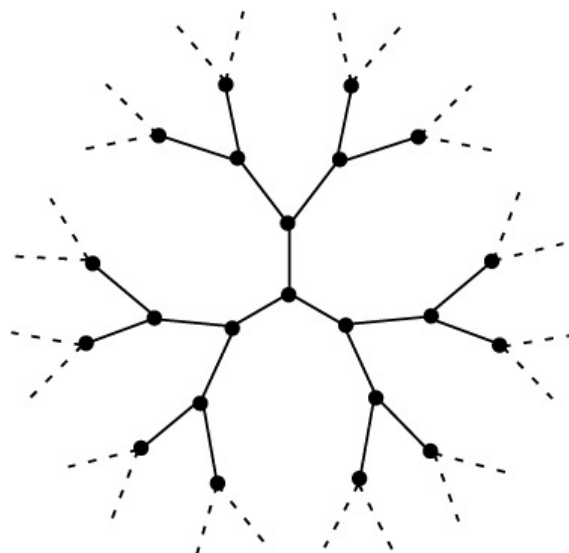
Perkolacija je slučajni proces, zato se povezave na končni mreži lahko pojavljajo tudi pod pragom, oziroma nad njim in moramo prehod definirati kot največji skok v verjetnosti za povezanost. Na Sliki 6 je prikazana slučajnost pri majhnih mrežah, saj se tudi pri manjših vrednostih p občasno pojavijo velike gruče, vseeno pa je opazen trend velikih gruč nad pragom in majhnih pod njim.



Slika 6. Prikaz perkolacijskega pragu in močnega vpliva naključnosti pri majhnih mrežah. Perkolacijski prag za 2D kvadratno mrežo se nahaja pri $p = 0.59$.

Perkolacija je problematična za analitične izpeljave, saj so izvedljive le v eni ali neskončno dimenzijah ter še tam le za neskončno mrežo, kjer se naključna narava perkolacije poenostavi. Za analitične izpeljave se pogosto uporablja Bethejeva mreža, prikazana na Sliki 7. Modeli za realne probleme se zanašajo na računalniške simulacije, kar je tudi razlog, da področje v zadnjih desetletjih ob večji dostopnosti računalniške moči doživlja razcvet.

Perkolacija



Slika 7. Bethejeva mreža je graf, ki se pogosto uporablja pri izpeljavah perkolacije. Bethejevo mrežo definira število povezav, ki jih ima vsaka točka. V splošnem primeru predstavlja neskončno dimenzionalno mrežo, če ima vsaka točka le dva soseda pa se poenostavi na enodimenzionalen problem [4].

2. Analitična izpeljava

2.1 Perkolacija v 1D

Primer perkolacije v eni dimenziji ima sicer trivialno rešitev, a lahko v njem vseeno prepoznamo nekatere splošne značilnosti. Za zgled vzamemo neskončno linijo mest, kakršna je prikazana na Sliki 8. Mesta so lahko zasedena z verjetnostjo p oziroma nezasedena z verjetnostjo $(1 - p)$.



Slika 8. Skica mreže v eni dimenziji.

Za ta primer je očitno $p_c = 1$, saj morajo biti vsa mesta v rešetki zasedena, da sta robova res povezana. To lahko tudi hitro pokažemo. Verjetnost za povezano vrsto zasedenih mest dolžine L je p^L . Če želimo, da gruča perkolira, mora veljati $L = \infty$, kjer pa lahko pokažemo

$$\lim_{L \rightarrow \infty} p^L = \begin{cases} 0, & p < 1, \\ 1, & p = 1, \end{cases}$$

torej gruča perkolira le pri $p = 1$ in velja $p_c = 1$.

2.1.1 Verjetnost, da je naključno mesto v gruči velikosti s

Če predpostavimo, da je zasedenost sosednjih mest neodvisna, lahko verjetnost, da je poljubno mesto na točno določenem mestu v gruči z velikostjo s , zapišemo kot

$$n_s(p) = (1 - p)p^s(1 - p). \quad (1)$$

Za določitev verjetnosti, da se mesto nahaja v gruči velikosti s , pa moramo upoštevati, da se lahko nahaja na s točno določenih mestih v gruči in dobimo $sn_s(p)$.

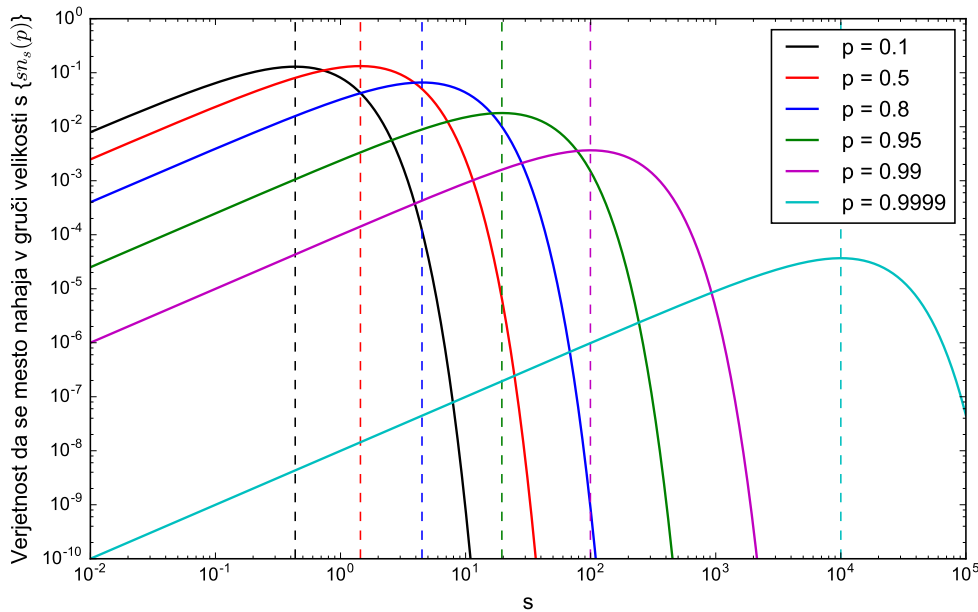
Dobljeni rezultat lahko zapišemo na drugačen način, kjer definiramo karakteristično velikost gruče s_ξ kot

$$\begin{aligned} n_s(p) &= (p_c - p)^2 p^s = (p_c - p)^2 \exp(s \ln(p)) \\ &= (p_c - p)^2 \exp\left(-\frac{s}{s_\xi}\right) \\ \implies s_\xi &= -\frac{1}{\ln(p)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Pomen karakteristične velikosti gruče je lepo razviden iz Slike 9. Mesto ima največjo verjetnost, da je del gruče s karakteristično velikostjo, verjetnost, da je posamezno mesto del gruče večje od karakteristične velikosti, pa strmo pada. Zaradi tega s_ξ in z njo povezana korelacijska dolžina pravzaprav podajata velikost problema, kar je še posebej koristno pri prehodu na končne mreže. Če s_ξ zapišemo kot $-\frac{1}{\ln(1-(1-p))}$, upoštevamo $p_c = 1$ in razvijemo pri $(p - p_c) \ll 1$, dobimo

$$s_\xi \propto |(p - p_c)|^{-1}.$$

Opazimo kritični eksponent, ki je v eni dimenziji enak -1, v drugih dimenzijah pa bo zavzel drugačno vrednost. Karakteristična velikost bo še vedno divergirala pri perkolacijskem pragu, le z drugačno, od dimenzije odvisno dinamiko.



Slika 9. Graf prikazuje verjetnost, da je mesto na enodimenzionalni mreži del gruče velikosti s , v odvisnosti od verjetnosti, da je posamezno mesto na mreži zasedeno. Črtna črta prikazuje karakteristično velikost gruče za posamezne vrednosti p .

Iz zgornje enačbe lahko z limitiranjem hitro ugotovimo verjetnost, da se poljubno mesto nahaja v neskončni gruči, oziroma moč neskončne gruče

$$P(p) = \lim_{s \rightarrow \infty} sn_s(p) = \lim_{s \rightarrow \infty} (1 - p)^2 sp^s = 0, \text{ za } |p| < 1. \tag{3}$$

Sam rezultat je za enodimenzionalen primer sicer očiten in nezanimiv, saj je mesto lahko del neskončne gruče le, ko so vsa mesta zasedena. $P(p)$ je pravzaprav zanimiv šele nad perkolacijskim

pragom in predstavlja ureditveni parameter za fazni prehod. Pri navadni perkolaciji na neskončni mreži je $P(p)$ pri perkolacijskem pragu zvezen, zato lahko fazni prehod klasificiramo kot prehod drugega reda. Obstajajo tudi kompleksnejše oblike perkolacije, ki upoštevajo dodatne pogoje in predstavljajo fazni prehod prvega reda.

Pri izpeljavi v višjih dimenzijah bi ugotovili, da se tudi $P(p)$ pri $(p - p_c) \ll 1$ obnaša v skladu z ustreznim kritičnim eksponentom.

2.1.2 Verjetnost, da je zasedeno mesto v gruči velikosti s

Verjetnost, da zasedeno mesto pripada gruči velikosti s označimo z w_s , izrazimo pa ga lahko iz izraza za verjetnost, da se mesto nahaja v gruči velikosti s , kot

$$w_s = \frac{sn_s(p)}{p}. \quad (4)$$

2.1.3 Povprečna velikost gruči

Zdaj imamo vse potrebno, da izrazimo povprečno velikost gruči $S(p)$, podano kot

$$\begin{aligned} S(p) &= \sum_{s=1}^{\infty} sw_s = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s^2 n_s(p)}{p} = \frac{1}{p} (1-p)^2 \sum_{s=1}^{\infty} s^2 p^s \\ &= \frac{1}{p} (1-p)^2 \left(p \frac{d}{dp} \right)^2 \left(\sum_{s=1}^{\infty} p^s \right) \\ &= \frac{p_c + p}{p - p_c}; \quad p_c = 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Opazimo, da povprečna velikost gruči divergira, ko se bližamo kritični vrednosti. Tudi $S(p)$ lahko razvijemo pri $(p - p_c) \ll 1$ in dobimo

$$S(p) \propto |(p - p_c)|^{-1}.$$

Opazimo kritični eksponent, ki je v eni dimenziji ponovno enak -1, posplošeno na višje dimenzije pa bo zavzel neko drugačno vrednost.

2.1.4 Povezanost

Definiramo lahko parovno povezanost $g(\mathbf{r})$, ki pove kolikšna je verjetnost, da sta zasedeno mesto in mesto na oddaljenosti \mathbf{r} v isti gruči. V eni dimenziji je ta izračun trivialen, saj je $r = |\mathbf{r}|$ in velja

$$g(\mathbf{r}) = p^r, \quad (6)$$

kar lahko zapišemo tudi kot

$$\begin{aligned} g(\mathbf{r}) &= \exp(r \ln(p)) = \exp\left(-\frac{r}{\xi}\right) \\ \implies \xi &= -\frac{1}{\ln(p)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Vpeljali smo korelacijsko dolžino ξ , ki jo lahko razvijemo pri $(p - p_c) \ll 1$ in dobimo

$$\xi \propto |(p - p_c)|^{-1}.$$

Opazimo, da v eni dimenziji velja $s_\xi = \xi$, kar pa v splošnem seveda ni res. V splošnem velja zveza $s_\xi = \xi^D$, kjer D predstavlja fraktalno dimenzijo. Fraktalna dimenzija pri perkolaciji pove, kako učinkovite so gruče pri zapolnjevanju prostora. Fraktalna dimenzija perkolacije je manjša od dimenzije prostora d , razen ko gre $p \rightarrow 1$ in so vsa mesta zapolnjena ter velja $D = d$:

2.2 Kritični eksponenti

Kritični eksponenti opisujejo obnašanje perkolacije v okolici p_c . Izkaže se, da so enaki za vse probleme enake dimenzije ter da so medsebojno povezani. Kritične eksponente lahko pri p_c določimo iz eksperimenta oz. simulacije in tako določimo obnašanje v okolici faznega prehoda, kar dovoljuje preučevanje sistema, čeprav ne poznamo vseh mikroskopskih podrobnosti. S kritičnimi eksponenti opisujemo območje pod in nad perkolacijskim pragom, velikost povezanih gruč pa pri pragu divergira. Smiselnost rezultatov ohranimo tako, da pri definiciji količin, ki jih napovedujemo s kritičnimi eksponenti, ne upoštevamo neskončnih gruč oziroma gruč, ki perkolirajo.

Ponovimo kritične eksponente, ki smo jih izpeljali v eni dimenziji, le da jih tokrat zapišemo posplošeno in s standardnimi oznakami za kritične eksponente:

- **Karakteristična velikost gruče**

$$s_\xi(p) \propto |(p - p_c)|^{-\frac{1}{\sigma}}, \quad (8)$$

podaja najverjetnejšo velikost gruč. S korelacijsko dolžino je povezana prek fraktalne dimenzije D in velja $s_\xi = \xi^D$.

- **Korelacijska dolžina**

$$\xi(p) \propto |(p - p_c)|^{-\nu}, \quad (9)$$

podaja največjo razdaljo med mesti v isti gruči, pravzaprav si lahko ξ predstavljamo kot relevantno dolžino problema, saj z bolj oddaljenimi točkami ni povezave.

- **Moč neskončne gruče**

$$P(p) \propto |(p - p_c)|^\beta, \quad (10)$$

podaja verjetnost, da je naključno mesto del neskončne oziroma perkolirajoče gruče, torej posledično podaja tudi povezanost celotne mreže. Vrednost postane smiselna šele, ko se pojavi neskončna gruča, zato lahko v primeru neskončne mreže p_c definiramo kar s prvim p za katerega je $P(p)$ neničeln.

- **Povprečna velikost gruč**

$$S(p) \propto |(p - p_c)|^{-\gamma}, \quad (11)$$

podaja velikost povprečne gruče.

EkspONENT	1d	2d	3d	4d	5d	6d	Bethe
σ	1	$\frac{36}{91}$	0.45	0.48	0.49	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
ν	1	$\frac{4}{3}$	0.88	0.68	0.57	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
β	0	$\frac{5}{36}$	0.41	0.64	0.84	1	1
γ	1	$\frac{43}{18}$	1.80	1.44	1.18	1	1
$D(p = p_c)$	1	$\frac{91}{48}$	2.53	3.06	3.54	4	4

Tabela 1. Kritični eksponenti in fraktalna dimenzija za nekaj osnovnih dimenzij in neskončno dimenzionalno Bethejevo rešetko. Vrednosti povzete po [2].

2.3 Skaliranje za končne dimenzije

Vse dosedaj povedano velja za neskončne mreže, meritve in simulacije pa lahko izvajamo le na končnih, zato potrebujemo povezavo. Glavna ideja pristopa je, da v okolici p_c korelacijska dolžina divergira. V neskončnem sistemu bi torej veljalo $\xi = \infty$, v končnem pa zasede dolžino sistema L in jo lahko izrazimo kot

$$\begin{aligned}\xi(p) &\propto |(p - p_c)|^{-\nu} \propto L \\ \implies |(p - p_c)| &\propto L^{-\frac{1}{\nu}}.\end{aligned}\quad (12)$$

Podobno lahko z dolžino sistema L zapišemo tudi povprečno velikost gruče

$$S(p) \propto |(p - p_c)|^{-\gamma} \propto L^{\frac{\gamma}{\nu}} \quad (13)$$

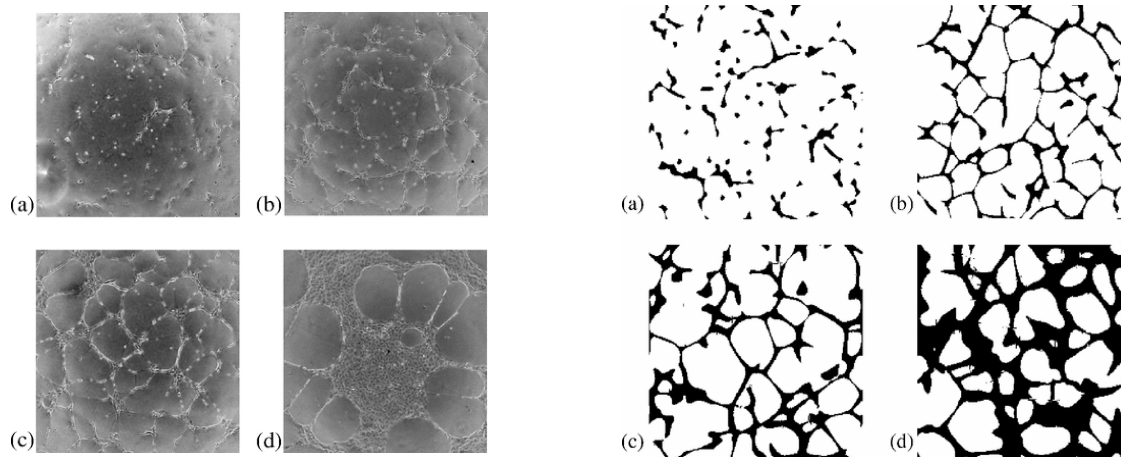
in moč neskončne gruče

$$P(p) \propto |(p - p_c)|^{\beta} \propto L^{-\frac{\beta}{\nu}}. \quad (14)$$

Preko zgornjih zvez lahko iz meritev oziroma simulacije pridobimo kritične eksponente ter s tem posplošimo sistem na neskončno velikost.

3. Samourejanje celic in formacija krvnih žil

Podobni procesi sestavljanja, samopodobnosti in fraktalnosti se pojavljajo tudi v živi naravi, zato se hitro porodi ideja, da se morda tudi v bioloških procesih pojavlja perkolacija. Razraščanje celic v gojišču se pojavi kot idealen kandidat, saj vsebuje naključno združevanje, obenem pa so na voljo eksperimentalni podatki za primerjavo, saj lahko z mikroskopi zelo natančno spremljamo napredek celic. Dodatno motivacijo predstavlja mobilnost celic, saj le te pri standardnem modelu perkolacije ni in morda dobimo nov, statistično zanimiv rezultat.



Slika 10. Slika eksperimenta in numerična simulacija porazdelitve celic za začetno gostoto 50, 100, 200 in 400 $\frac{\text{celic}}{\text{mm}^2}$ [5].

Celice se same od sebe premikajo proti območjem z večjo koncentracijo celic in tvorijo skupke z ostalimi. Prepotujejo lahko razdaljo za velikostni red večjo od celičnega premera [5]. Če spremljamo obliko kolonij, po zadostnem času v odvisnosti od gostote celic na kvadratni milimeter opazimo perkolacijski prag. Pri gostotah manjših od $n_c = 100 \frac{\text{celic}}{\text{mm}^2}$ se tvorijo le posamezne nepovezane gruče celic, nad pragom pa se izoblikuje mreža, v kateri so gruče med seboj povezane s tankimi nitmi. Pri še večjih koncentracijah celic pa se tvorijo gosta tkiva s posameznimi luknjami, ki spominjajo na švicarski sir. Slika 10 prikazuje obliko kolonije za različne začetne koncentracije.

3.1 Modeliranje celic v gojišču

Celice opisujemo z zveznim poljem gostote celic n in hitrostjo \vec{v} . Modeliramo jih kot pospešeno tekočino, ki jo poganja gradient v koncentraciji raztopine c , ki jo celice same sproščajo, nato pa se v končnem času razgradi. Zgornji opis lahko zapišemo kot sistem diferencialnih enačb

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\vec{v}) = 0, \quad (15a)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \mu \nabla c, \quad (15b)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \nabla^2 c + \alpha n - \tau^{-1} c. \quad (15c)$$

V enačbah D predstavlja koeficient difuzije, α opisuje hitrost s katero celice proizvajajo raztopino c , τ določa razpadni čas raztopine c , μ pa opisuje moč celičnega odziva. Za začetne pogoje uporabimo naključno porazdelitev zvonastih krivulj gostote n , ki predstavljajo posamezne celice, koncentracije raztopine in hitrosti pa na začetku ni. Konstate v enačbi določimo z opazovanjem pravih celic.

Enačbo rešimo numerično, s periodičnimi robnimi pogoji, za velikosti kvadratnega sistema $L = 1, 2, 4$ in 8 mm. Model ima karakteristično dolžino $r_0 = \sqrt{D\tau}$, katere dolžina pri znanih konstantah znaša približno $200 \mu\text{m}$, kar se dobro ujema z opaženo dolžino niti med gručami celic.

Rešitev modela je zelo podobna stanju resničnih bakterij v petrijevki, o čemer priča tudi Slika 10. Med gručami celic se zares pojavljajo niti dolžine $200 \mu\text{m}$, kot je napovedala karakteristična dolžina r_0 , kar se seveda ujema z razporeditvijo pravih bakterij, prav tako pa se pojavi perkolacijski prag pri pričakovani začetni gostoti. Za nadaljnje raziskovanje lastnosti perkolacije je potrebno zvezno gostoto, ki je rešitev diferencialnih enačb, pretvoriti v diskretne vrednosti zasedenosti oziroma nezasedenosti mest na mreži.

3.2 Določanje kritičnih eksponentov

Avtorji članka [5] so opravili in diskretizirali 100-200 simulacij za vsako velikost sistema in začetno gostoto celic ter pri vsakemu določili $\Pi(n, L)$ (verjetnost, da se je pojavila perkolirajoča gruča), $P(n, L)$ in $S(n, L)$. Za te količine v končnih sistemih in v okolici faznega prehoda veljajo zveze

$$\Pi(n, L) \sim \hat{\Pi}[(n - n_c)L^{\frac{1}{\nu}}], \quad (16a)$$

$$P(n, L) \sim L^{-\frac{\beta}{\nu}} \hat{P}[(n - n_c)L^{\frac{1}{\nu}}], \quad (16b)$$

$$S(n, L) \sim L^{\frac{\gamma}{\nu}} \hat{S}[(n - n_c)L^{\frac{1}{\nu}}]. \quad (16c)$$

Eksponent	model	eksperiment	naključna perkolacija
ν	1.33 ± 0.08	-	1.333
$\frac{\gamma}{\nu}$	1.83 ± 0.05	1.78 ± 0.12	1.792
$\frac{\beta}{\nu}$	0.11 ± 0.01	-	0.104
D	1.87 ± 0.03	1.85 ± 0.1	1.896

Tabela 2. Kritični eksponenti določeni iz modela, eksperimenta in standardne naključne perkolacije za to dimenzijo. Povzeto po [5].

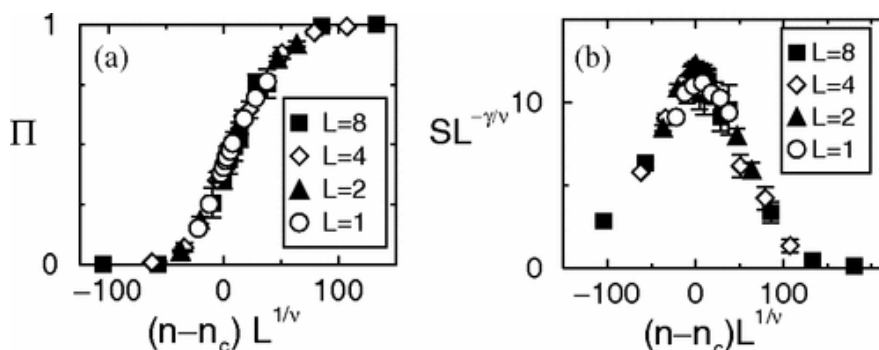
Količine označene s $\hat{}$ predstavljajo skalirne funkcije za posamezne količine, ki so sicer v splošnem neznane, a neodvisne od L . Ravno neodvisnost skalirnih funkcij od velikosti sistema omogoča, da iz

meritev za več L določimo ravno prave kritične eksponente, ki izpolnijo ta pogoj. Pri pravih kritičnih eksponentih vrednosti za različne velikosti sistema padejo na eno krivuljo, kot je tudi razvidno iz Slike 11.

Iz zvez (16) in meritev so določili kritične eksponente, ki so v okviru napake enaki kot tisti iz standardne perkolacije, kar se seveda zdi nenavadno, saj so sosednja mesta pri standardni perkolaciji nekorelirana, celice pa aktivno silijo skupaj. Podobno velja tudi za eksponente določene iz eksperimenta z rastjo celic, tako da tu ne gre za pomankljivost modela. Rezultat pove, da je ob dovolj oddaljenem pogledu, naključnost začetne porazdelitve gostote pomembnejša za končni izid kot mobilnosti celic in njihova težnja po združevanju.

A vendar se na majhni skali pojavi zelo specifična struktura gruč povezanih z nitmi, ki je pri standardni perkolaciji ne opazimo, zato si je vredno problem pogledati tudi na manjši skali. Povprečna zasedenost pri perkolacijskem pragu, torej p_c , za standardno perkolacijo na 2D mreži znaša 0.59, medtem ko pri celicah ta vrednost znaša le 0.2. Celice so mnogo učinkovitejše pri povezovanju kot naključno porazdeljena mesta, kar je seveda očitno, če upoštevamo, da se lahko premikajo.

Za opazovanje strukture na različnih skalah je uporabno definirati tudi gostoto kot funkcijo radija $\rho(r) \propto r^{D-d}$, kjer D predstavlja fraktalno, d pa navadno dimenzijo. $\rho(r)$ predstavlja povprečno gostoto s centralno povezanih gruč, v krogu s polmerom r za različne izbire centralne gruče. Rezultat pri gostoti n_c je zopet odvisen od skale na kateri spremljamo sistem. Meja se pojavi pri $r_c = 0.77 \pm 0.08$ mm, za radije večje od r_c se model obnaša kot standardna 2D perkolacija ($D_{2D} = 1.896$) in ima $D = 1.87 \pm 0.03$, za manjše pa ima $D = 1.50 \pm 0.02$, kar je posledica dinamike celic, s katero le te zelo učinkovito in enakomerno pokrijejo prostor. Model torej dobro opiše nastanek žilnega omrežja s karakteristično dolžino r_0 , na dosti večjih skalah pa celice niso več dovolj mobilne, da bi premagale naključnost.



Slika 11. Prilaganje funkcij na podatke numeričnih simulacij za določanje kritičnih eksponentov [5].

4. Napovedovanje El Niña s perkolacijo

El Niño je eden izmed največjih periodičnih pojavov na svetu, vendar se ne pojavlja popolnoma redno in ne vemo točno, kdaj se bo zgodil. Izkáže se, da se eno leto pred El Niňom ustvarita dva velika ločena vremenska sistema na vsaki strani ekvatorja, kar pa se da najenostavneje spremljati in odkriti z vremenskim omrežjem.

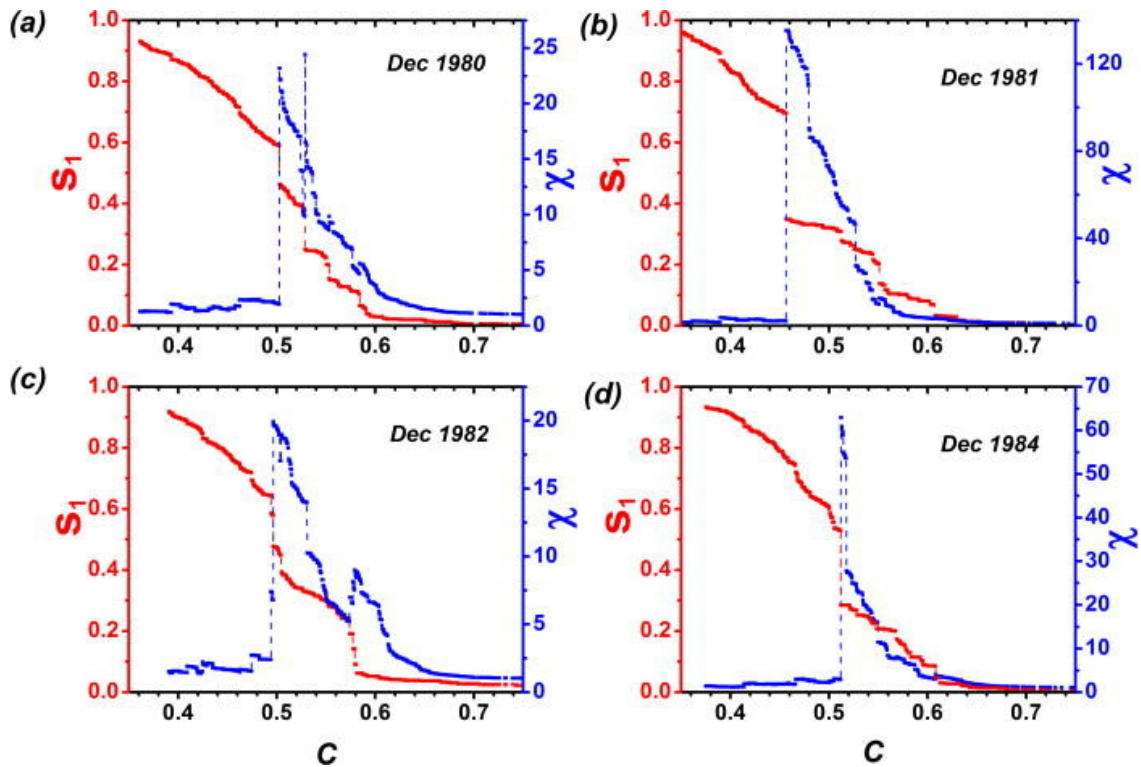
Zamislimo si svoje omrežje, kjer nam vsako izmed 726 [6] mest v omrežju predstavlja vremenska postaja, za katero imamo na voljo dolgoletno zgodovino. Vsakodnevni temperaturi odštejemo dolgoletno povprečje istih dni in delimo s standardnim odklonom le teh ter tako čimbolj izrazimo trenutno vremensko stanje. Nato za vsak par mest poiščemo časovno zakasnjeno korelacijo

temperatur, definirano kot

$$C_{i,j}(\tau) = \frac{\langle T_i(d)T_j(d-\tau) \rangle - \langle T_i(d) \rangle \langle T_j(d-\tau) \rangle}{\sqrt{(\langle T_i(d) \rangle - \langle T_i(d) \rangle)^2} \cdot \sqrt{(\langle T_j(d-\tau) \rangle - \langle T_j(d-\tau) \rangle)^2}}, \quad (17)$$

kjer nam d predstavlja dan, τ pa časovni zamik, ki lahko znaša med 0 in 200 dnevi. Težo posamezne povezave definiramo kot $\max(C_{i,j}(\tau))$.

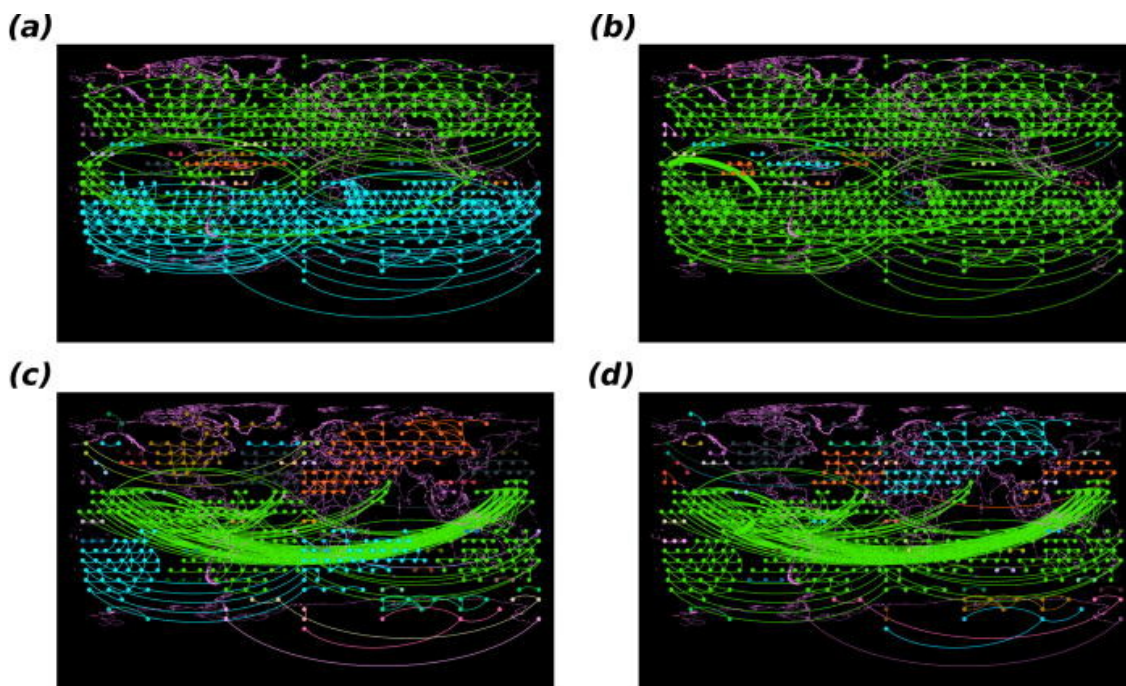
Povezave razporedimo po teži in začnemo z gradnjo omrežja od najtežje proti najlažji, medtem pa spremljamo velikost največje povezane gruče, ki jo imenujemo S_1 in povprečje ostalih, ki ga imenujemo χ . Zaradi načina, kako začnemo pri povezavah z večjo težo, se ustvarjajo gruče lokalnih vremenskih podobnosti, ki se nato združujejo in skokovito rastejo, dokler niso nazadnje vse del največje gruče. Glede na to da imamo diskretne skoke, lahko perkolacijski prag definiramo kar kot povezavo, ki je povzročila največji skok v velikosti S_1 . Pri korelacijskem skoku se močno spremeni tudi χ , saj je perkolacijski trenutek ravno trenutek, ko se povežeta največji gruči in povprečna velikost ostalih močno pade.



Slika 12. El Niño napovedujejo nadpovprečno visoki skoki v velikosti S_1 , kar je na tem grafu leto 1981 in res, leta 1982 se je pojavil [6].

Glede na to, da vemo, da se v letih pred El Niňom na obeh straneh ekvatorja vzpostavita ločena vremenska sistema, pričakujemo še posebej visoke perkolacijske skoke. In res, kot je razvidno iz Slike 12, se decembra 1981, 1 leto pred močnim El Niňom, pojavi nenavadno velik skok S_1 . Skok pomeni obstoj dveh enakovredno velikih in slabo povezanih gruč, meja med katerima pa, kot je razvidno iz Slike 13, leži na ekvatorju.

Tak način napovedovanja je presenetljivo zanesljiv, saj je pravilno napovedal 7 od 10 El Niňov med zgodovinskimi podatki za zadnjih 37 let, z le enim lažnim pozitivnim izidom. Skoki pri pravilnih napovedih, so se v povprečju pojavili 1.05 ± 0.18 leta pred začetkom El Niňa.



Slika 13. Slike prikazujejo merilna mesta na zemljevidu sveta, kjer vsaka barva označuje povezano gručo. Največja gruča je označena z zeleno, odebeljena povezava pa predstavlja perkolacijsko povezavo. Sliki a) in b) prikazujeta trenutek pred/po perkolacijski povezavi decembra 1981, ki je napovedala El Niño, medtem ko c) in d) kažeta trenutek preskoka med El Niňom decembra 1982. Preskok leta 1981 je opazno večji in res poveže polobli [6].

5. Zaključek

Perkolacija je eden izmed preprostejših opisov faznih prehodov, saj kritični eksponenti omogočajo vpogled v sisteme, o katerih ne vemo nujno prav veliko podrobnosti. Omogočajo opis kompleksnih sistemov, ki jih analitično ne znamo opisati, z vse močnejšimi računalniki pa se lahko lotevamo problemov, o katerih bi lahko pred desetletji le sanjali. Ravno tu leži čar teorije, saj se da ideje izpeljane v eni ali neskončno dimenzijah in neskončnem prostoru prenesti in posplošiti na realne sisteme ter s pomočjo simulacij dognati nekaj novega o sistemih, ki se prej niti niso nujno zdeli tako nenavadni, kot se je naprimer izkazalo za ožilja in odvisnost njihovih lastnosti od skale na kateri jih spremljamo.

Perkolacija ponuja še mnogo zanimivosti, tako pri raziskovanju fraktalnih dimenzij sistemov, odkrivanju samopodobnosti med velikostnimi redi, renormalizaciji ali pa raziskovanju specializiranih vrst perkolacije za opis zelo specifičnih problemov. Področje ponuja še ogromno potenciala in nedvomno bo ostalo zanimivo še v prihodnjih desetletjih, saj se bodo sproti odkrivala nova področja, kjer se zna pristop izkazati za koristnega.

6. Zahvala

Za nasvete in pomoč se zahvaljujem mentorju doc. dr. Simonu Čoparju.

LITERATURA

- [1] Rungsima Yeetsorn, Michael W. Fowler, and Costas Tzoganakis. A review of thermoplastic composites for bipolar plate materials in pem fuel cells. In John Cuppoletti, editor, *Nanocomposites with Unique Properties and Applications in Medicine and Industry*, chapter 16. InTech, Rijeka, 2011.
- [2] Kim Christensen. Percolation theory. *Na voljo na: http://www.mit.edu/~levitov/8.334/notes/percol_notes.pdf* [13.4.2017].
- [3] R.G. Arenhart, G.M.O. Barra, and C.P. Fernandes. Simulation of percolation threshold and electrical conductivity in composites filled with conductive particles: Effect of polydisperse particle size distribution. *Polymer Composites*, 37(1):61–69, 1 2016.
- [4] Daniel ben Avraham and M Lawrence Glasser. Diffusion-limited one-species reactions in the bethe lattice. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 19(6):065107, 2007.
- [5] A. Gamba, D. Ambrosi, A. Coniglio, A. de Candia, S. di Talia, E. Giraudo, G. Serini, L. Preziosi, and F. Bus-solino. Percolation, Morphogenesis, and Burgers Dynamics in Blood Vessels Formation. *Physical Review Letters*, 90(11):118101, March 2003.
- [6] Jun Meng, Jingfang Fan, Yosef Ashkenazy, and Shlomo Havlin. Percolation framework to describe el niño conditions. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 27(3):035807, 2017.