

MODELI CESTNEGA PROMETA

LUKA ŠEPEC

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

V članku so predstavljeni različni pristopi k modeliranju cestnega prometa. Najprej so predstavljene empirične ugotovitve glede prometa, nato pa so opisani kontinuitetni model, kinetični model ter model, ki temelji na celičnih avtomatih. Pri vsakem od njih je predstavljeno, do katere mere se ujemajo z realno prometno dinamiko.

MODELS OF VEHICULAR TRAFFIC

Different models of vehicular traffic are discussed. First, empirical data about vehicular traffic are presented, followed by a presentation of the continuum model, kinetic model and the cellular automata model. Along with the presentation of the models, comparison with the real-life vehicular traffic dynamics is made.

1. Uvod

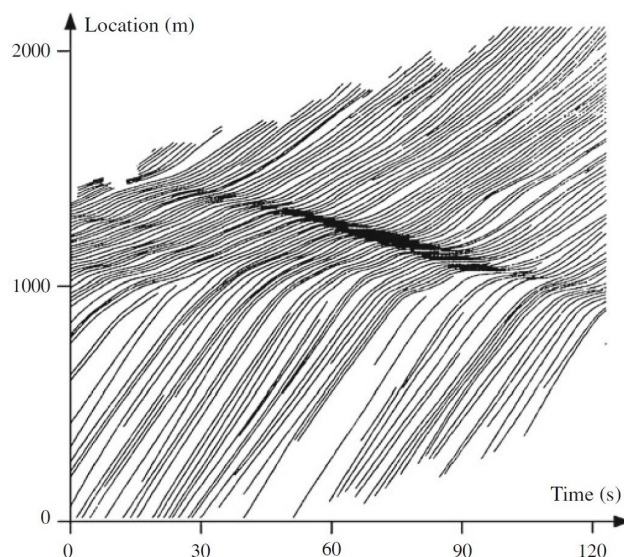
Vse od začetka široke uporabe osebnih vozil je znanstvenike in inženirje zanimalo, kako načrtovati cestne povezave, da bodo karseda pretočne. Modeliranje cestnega prometa je izjemno kompleksen problem, saj moramo poleg tehničnih omejitev upoštevati tudi vedenje voznikov. Že v petdesetih letih prejšnjega stoletja so začeli razvijati prve modele cestnega prometa, do danes pa so se razvili do te mere, da so skoraj v popolnem ujemanju z meritvami. Predlagani so bili zelo različni pristopi, nekateri manj, drugi bolj uspešni. V članku je predstavljenih nekaj pomembnejših modelov, ki predstavljajo mejnike v prometnem modeliranju.

2. Empirični podatki

Preden pričnemo z obravnavo modelov cestnega prometnega toka, je smiselno posvetiti nekaj časa interpretaciji empirično pridobljenih podatkov, saj bomo le tako lahko vrednotili uspešnost modelov.

Podatke o prometnem toku lahko zbiramo na veliko različnih načinov. Oglejmo si dva izmed njih, in sicer snemanje odseka ceste s kamero (*videodetekcija*) ter meritve s senzorji, nameščenimi v posameznih vozilih (npr. z GPS) [1]. Osredotočimo se predvsem na prvi način, saj omogoča natančnejši in bolj nazoren popis stanja prometa v odvisnosti od časa, ker omogoča sledenje vsem vozilom, ki v nekem časovnem oknu prečkajo naše merilno območje. Poleg tehničnih omejitev, torej kako prepoznati posamezno vozilo in mu natančno slediti, veliko omejitev predstavlja le območje, na katerem lahko meritve izvajamo. Pri fiksni ločljivosti kamere za nadzor prometa lahko le v določeni razdalji od le-te še ločimo med dvema voziloma. Tipične razdalje, ki jih lahko opazujemo so reda velikosti 100 m [1]. Ta problem bi lahko rešili s kombinacijo več zaporednih kamer, ki bi usklajeno zbirale podatke. Metoda omogoča tudi določitev pasu, po katerem vozilo vozi na cesti, kar s sledenjem posameznim vozilom seveda ni mogoče, saj satelitski podatki o legi niso dovolj natančni.

Za nazoren prikaz stanja prometa v nekem časovnem intervalu pogosto uporabljamo prostorsko-časovne diagrame, na katere rišemo trajektorije posameznih vozil, ki jih pridobimo s spremljanjem prometnega toka po prvi zgoraj opisani metodi. Primer takega diagrama prikazuje slika 1. Gre za podatke, pridobljene za en pas avtoceste brez uvozov in izvozov. Iz diagrama lahko razberemo številne lastnosti prometne dinamike, na primer hitrost posameznih vozil, ki je razvidna iz naklona krivulj. Iz tega lahko sklepamo, da vodoravna krivulja predstavlja stoječe vozilo. Opazimo lahko, da se na sliki pri času 40 s začne oblikovati zastoj, kar je razvidno v lokalno vodoravnih krivuljah. Razberemo lahko, da se zastoj s časom širi v nasprotni smeri gibanja prometa.



Slika 1. Trajektorije vozil na odseku avtoceste [2]. V prvem kilometru je promet tekoč in hitrosti so približno konstantne, pozneje pa opazimo zastoje. Zastoj se s časom premika v protitočni smeri.

Definirajmo nekaj pojmov, ki nam bodo koristili pri opisovanju cestnega prometnega toka in jih lahko pojasnimo z uporabo prostorsko-časovnega diagrama. Vodoravna razdalja med dvema krivuljama je *časovna razdalja* med sosednjima voziloma (čas med prečkanjem istega kraja), medtem ko navpično razdaljo definiramo kot *krajevno razdaljo* (razdalja med prednjima deloma zaporednih vozil). Definirajmo *prometni pretok* $j(x)$ kot:

$$j(x) = \frac{\Delta N}{\Delta t}, \quad (1)$$

torej število vozil ΔN , ki v časovnem intervalu Δt prečkajo neko merilno mesto. Na diagramu je to število trajektorij, ki sekajo vodoravnico dolžine Δt pri nekem kraju x . Pomembna količina je tudi *gostota prometnega toka* $\rho(t)$, ki je definirana kot:

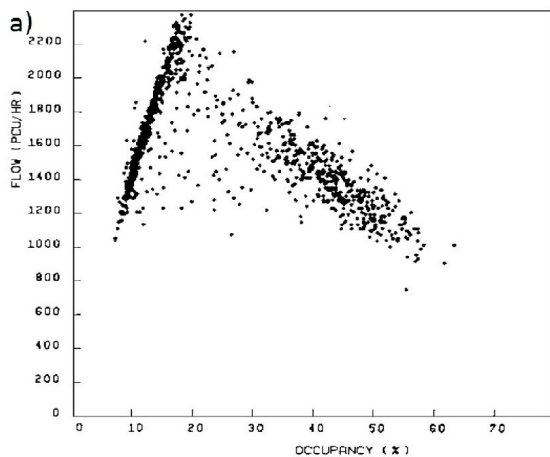
$$\rho(t) = \frac{\Delta N}{\Delta x}, \quad (2)$$

kjer je ΔN število vozil, Δx pa krajevni interval, ki ga vozila zavzemajo ob nekem času t . Na diagramu je to število trajektorij, ki sekajo navpičnico dolžine Δx pri nekem času t .

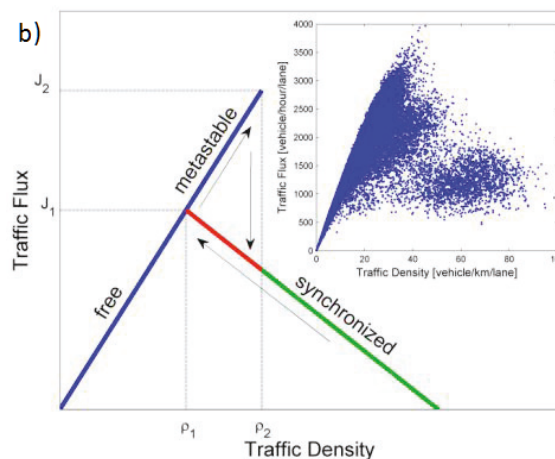
V prometnem inženirstvu je ključnega pomena tudi takoimenovani *fundamentalni diagram*. Gre za graf, ki prikazuje povezavo med prometnim pretokom $j(x)$ ter gostoto prometnega toka $\rho(t)$ [3]. Primer takega empirično pridobljenega diagrama je prikazan na sliki 2 (a).

Razvidno je, da pri majhnih gostotah prometa pretok z zasedenostjo linearno narašča, kar je seveda pričakovano. Temu režimu pravimo *faza prostega prometnega toka* (ang. *free flow phase*) [3]. Pri večjih gostotah avtomobili že vplivajo drug na drugega, saj si med seboj onemogočajo vožnjo z optimalno hitrostjo, zato prometni pretok nenadoma začne padati. Očitno gre za zelo negotove in kompleksne interakcije, saj so meritve nad območjem prostega prometnega toka precej raztresene. Temu režimu pravimo *zgoščena faza* (ang. *congested phase*) [3]. Obstaja neka zasedenost, pri kateri pride do nezveznosti pretoka. Ta je posledica obstoja metastabilnega stanja z visokim pretokom, ko bi promet že moral preiti v zgoščeni režim, a še vedno ostane v prostem. Opazimo tudi histerezo, saj stanja z visokim pretokom lahko dosežemo le, ko iz nizke gostote prometa prehajamo na višjo. Iz zgoraj navedenih razlogov je modeliranje fundamentalnih diagramov še posebej zapleteno, saj ne ustrezajo nobeni analitični funkciji.

Oglejmo si še eno pomembno vrsto diagramov, in sicer porazdelitev časovne razdalje med vozili glede na gostoto prometnega toka. Kot vidimo na sliki 3, se časovna razdalja med vozili drastično



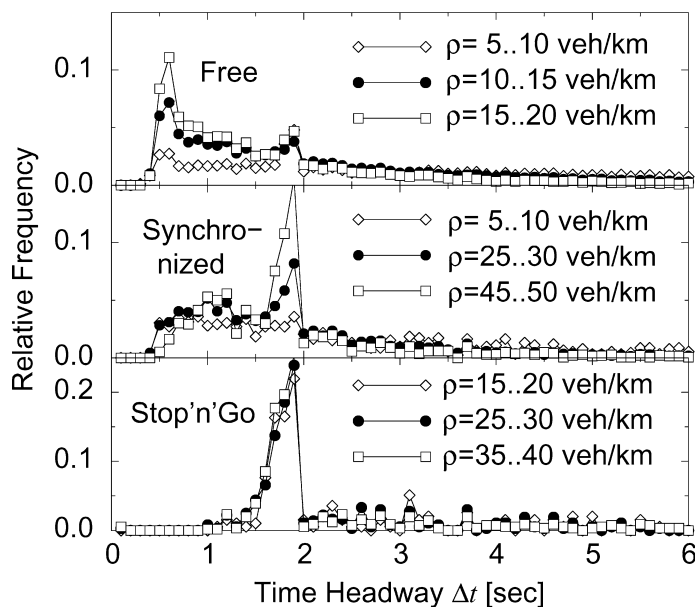
(a) Empirično pridobljena relacija med prometnim pretokom j in zasedenostjo ceste [4]



(b) Fundamentalni diagram z označenimi režimi prometa [5]

Slika 2. Fundamentalna diagrama.

spremeni s spremembo režima ter gostote prometnega toka. Na zgornjem grafu vidimo, da se v primeru prostega prometnega toka, to je nizke gostote, pojavita vrhova pri dveh različnih časovnih razdaljah. Prvega, ki je pri manj kot sekundi časovne razdalje, predstavljajo vozniki, ki ne upoštevajo pravil o varnostni razdalji in vozijo tik za vozili pred seboj, drugega pa vozniki, ki varnostno razdaljo upoštevajo. Srednji graf prikazuje sinhronizirano vožnjo, kjer gre za zgoščen, a enakomerno premikajoč se promet. Opazimo lahko le en izrazit vrh pri predpisani varnostni razdalji. Spodnji diagram pa kaže na režim, kjer se vsako vozilo zaradi zastoja ustavlja ter le postopoma nadaljuje pot. Vidimo le en izrazit vrh, njegova višina pa je neodvisna od gostote prometnega toka, kar je pričakovano.



Slika 3. Porazdelitev časovne razdalje med vozili za različne gostote prometnega toka. Predstavljeni so režim prostega prometnega toka (zgoraj), režim sinhroniziranega prometnega toka (sredina) ter režim, v katerem se morajo vozila ustavljati in ponovno speljevati (spodaj) [3].

Splošna opazka je, da pri večji gostoti prometnega toka manj voznikov vozi zelo blizu predhodnemu vozilu. To je razumljivo, saj voznik le v prostem režimu (ter v manjši meri v sinhroniziranem

režimu) lahko predvidi, da vozilo pred njimi ne bo nenadoma začelo zavirati, saj za to nima pravega razloga (na primer zgostitve prometnega toka).

3. Modeli cestnega prometa

Iz različnih razlogov se znanstveniki in inženirji že dolgo časa trudijo čim boljše modelirati cestni promet, kljub temu pa modela, ki bi podrobno opisal vse vidike prometa, do danes še niso iznašli. To tudi ni presenetljivo, saj gre za izjemno kompleksne sisteme z velikim številom spremenljivk (na primer vreme, letni čas, razpoloženje voznikov) in parametrov. Čeprav kompletnega modela še nimamo, pa so do sedaj predlagani modeli uporabni, saj vsak po svoje dobro opišejo nekatere vidike prometa.

Modele v grobem delimo v 3 skupine, in sicer na *makroskopske*, *mezoskopske* ter *mikroskopske* [6]. Makroskopski modeli zanemarijo individualno obnašanje voznikov in se ukvarjajo s prometom kot celoto, ki se odziva na zunanje dejavnike. Izhajajo večinoma iz analogije med prometnim tokom ter tokom tekočine. Kot bomo videli v razdelku 3.1 za opis uporabljamo makroskopske spremenljivke, recimo gostoto ter pretok.

Mezoskopski modeli v račun vzamejo več podrobnosti, a še vedno posameznih vozil ne opisujejo ločeno. Namesto makroskopskih količin, za opis uporabimo porazdelitve, kot je to v navadi pri teoriji plinov in kot bomo videli v razdelku 3.2

Mikroskopski modeli pa se osredotočajo na opis sistema, sestavljenega iz majhnih gradnikov, ki jih obravnavamo ločeno. Opisujemo torej interakcije med posameznimi vozili, šele nato pa sklepamo na makroskopske lastnosti sistema, ki jih s seboj prinesejo te interakcije. Ta pristop bomo ubrali v razdelku 3.3

3.1 Kontinuitetni opis

Najprej se posvetimo modeliranju cestnega prometnega toka z uporabo analogije s tekočino. Ukvarjali se bomo le z enodimenzionalno sliko, torej s cesto, po kateri se lahko promet giblje le v pozitivni (desno) ali protitočni (levo) smeri.

Vpeljimo količine, ki jih bomo uporabljali za opis prometnega toka v modelih [6]. Uporabili bomo definicijo prometnega pretoka $j(x)$ [enačba (1)], ki pove pričakovano število vozil, ki prečkajo merilno mesto v izbranem časovnem intervalu. Gostota prometnega toka $\rho(x)$ je, tako kot prej [enačba (2)], pričakovano število vozil na krajevnem intervalu ob izbranem času t . Definirajmo še *hitrost prometnega toka*, ki je direkten analog hitrosti toka tekočine, ki bi jo opisali z zgoraj definiranimi $j(x)$ in $\rho(x)$. Tako velja:

$$v(x, t) = \frac{j(x, t)}{\rho(x, t)}. \quad (3)$$

Prva enačba, ki jo lahko zapišemo, je kontinuitetna enačba [3]:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial j(x, t)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{j_{in}} \alpha_i(x - x_i, t) - \sum_{j=1}^{j_{out}} \beta_j(x - x_j, t), \quad (4)$$

kjer člena na desni strani opisujeta izvore oziroma ponore. Le-te predstavljajo uvozi na cesto ter izvozi iz nje, ki se nahajajo pri x_i oziroma x_j , kjer indeksa tečeta kot je zapisano v enačbi (4). Faktorja $\alpha_i(x - x_i, t)$ in $\beta_j(x - x_j, t)$ lahko zapišemo kot produkt časovnega in krajevnega dela:

$$\alpha_i(x - x_i, t) = \alpha_i^0(t) \phi_i(x - x_i) \quad \text{oz.} \quad \beta_j(x - x_j, t) = \beta_j^0(t) \phi_j(x - x_j), \quad (5)$$

kjer krajevni del opisuje krajevno porazdelitev uvozov (izvozov), časovni pa spreminjanje prometnega toka po posameznem uvozu (izvozu) s časom. Ta kontinuitetna enačba je določena s cestno

ureditvijo (lokacije uvozov in izvozov), zato velja za vse makroskopske modele cestnega prometa. Ločijo se le v modeliranju hitrosti in prometnega pretoka [1].

Osnovni primer je cesta brez uvozov oziroma izvozov, pri kateri je desna stran kontinuitetne enačbe (4) enaka 0. Torej velja:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial j(x, t)}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

Kot vidimo, sistema enačb (6) in (3) ne moremo rešiti brez dodatne enačbe, saj imamo 3 neznanke in le 2 enačbi. Ena možna predpostavka, ki se izkaže za razmeroma upravičeno, je sledeča:

$$j = j(\rho(x, t)). \quad (7)$$

Predpostavljamo torej, da je prometni pretok j funkcija le gostote prometnega toka $\rho(x, t)$, kar po enačbi (3) implicira, da je tudi hitrost le funkcija ρ . Iz te zveze lahko razberemo, da sta tako hitrost $v = v_e$ kot tudi pretok $j = j_e$ vedno v lokalnem ravnovesju z gostoto. To pomeni, da popolnoma in v trenutku sledita spremembam gostote. To predpostavko sta prva napravila Lighthill in Whitham [7] ter neodvisno tudi Richards [8], zato jo imenujemo kar *LWR predpostavka*. Te relacije s pomočjo kontinuitetnega opisa ne moremo izpeljati in jo moramo pridobiti bodisi empirično iz fundamentalnega diagrama bodisi iz kakšnega mikroskopskega modela. Ob upoštevanju te predpostavke dobimo model, ki je opisan z le eno dinamično enačbo, to je s kontinuitetno enačbo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dj(\rho)}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

kjer smo pri odvajanju upoštevali verižno pravilo. Enačbo lahko zapišemo tudi kot:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(v_e + \rho \frac{dv_e}{d\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

kjer smo upoštevali, da je $j_e(\rho) = \rho v_e(\rho)$. Enačba (9) je nelinearna parcialna diferencialna enačba, kar pripelje do zanimivih rešitev. Pravimo ji tudi *nelinearna valovna enačba* ter opisuje širjenje takoimenovanih *kinetičnih valov* [1].

Želimo dobiti funkcijo $\rho(x, t)$, ki opisuje porazdelitev gostote ob vsakem času. Uporabimo nastavek za potujoči val:

$$\rho(x, t) = \rho_0(x - \tilde{c}t), \quad (10)$$

kjer funkcija $\rho_0(x) = \rho(x, 0)$ predstavlja začetno porazdelitev gostote prometnega toka. Glede na nastavek se le-ta nespremenjena giblje s hitrostjo \tilde{c} . Vstavimo naš nastavek v enačbo (8) in dobimo

$$-\tilde{c}\rho'_0(x - \tilde{c}t) + \frac{dj_e}{d\rho}\rho'_0(x - \tilde{c}t) = 0, \quad (11)$$

kjer z $\rho'_0(x - \tilde{c}t)$ označimo odvod gostote po njenem argumentu. Dobljeni izraz mora veljati ob vsakem času t in na vsakem kraju x . Po primerjavi faktorjev pred odvodom gostote $\rho'_0(x - \tilde{c}t)$ v enačbi (11) vidimo, da mora veljati:

$$\tilde{c}(\rho) = \frac{dj_e}{d\rho} = \frac{d[\rho v_e(\rho)]}{d\rho}. \quad (12)$$

Uporabimo pravilo za odvajanje produkta in končno dobimo:

$$\tilde{c}(\rho) = j'_e(\rho) = v_e(\rho) + \rho v'_e(\rho). \quad (13)$$

Iz enačbe (13) razberemo, da je hitrost potovanja gostotne motnje odvisna od naklona krivulje $j(\rho)$, ki jo dobimo s prilagajanjem empirično pridobljenim podatkov v fundamentalnem diagramu (slika

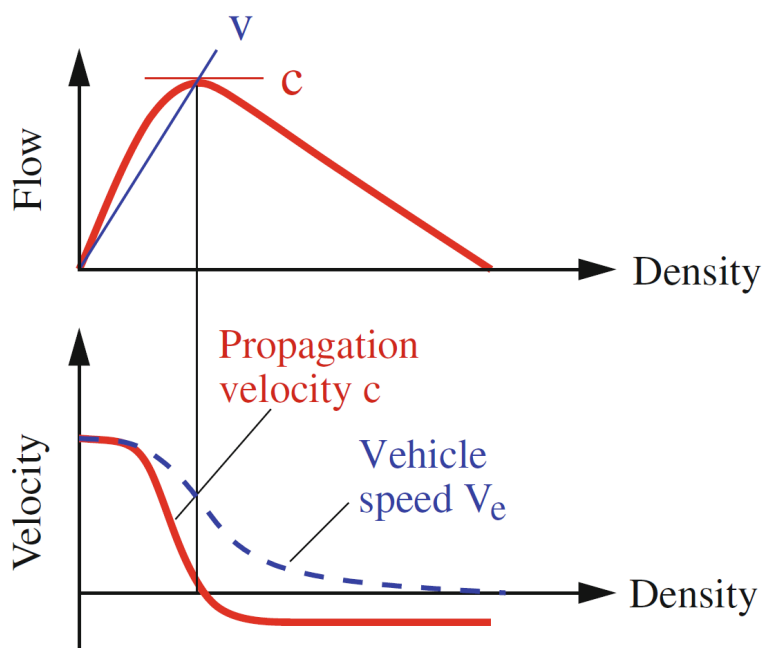
2). Motnja se lahko torej širi v pozitivni smeri, ko je promet redek (faza prostega prometnega toka), oziroma nazaj, ko je promet zgoščen (zgoščena faza).

Zanimivo je, da se relativno glede na vozila motnje vedno širijo v protitočni smeri. To hitro izpeljemo, če zapišemo relativno hitrost motnje glede na vozila kot

$$\tilde{c}_r(\rho) = \tilde{c}(\rho) - v_e = \rho v'_e(\rho). \quad (14)$$

Ker hitrost prometnega toka z večanjem gostote pada, vedno velja $v'_e(\rho) < 0$, kar pomeni gibanje motnje v protitočni smeri glede na vozila.

Enačba (13) podaja hitrost motnje v odvisnosti od gostote prometnega toka. Višja gostota pomeni manjšo hitrost propagacije, velja pa tudi obratno, kot je razvidno iz slike 4.

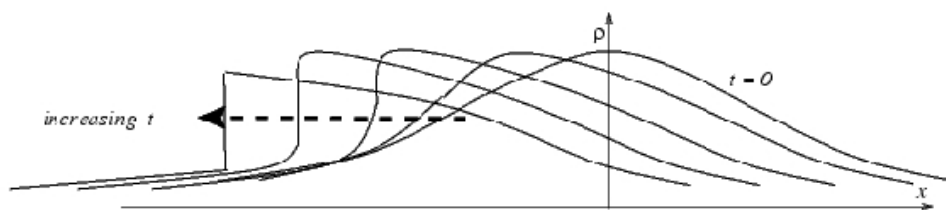


Slika 4. Fundamentalni diagram (zgoraj), iz katerega lahko preberemo hitrost širjenja motnje $c = \tilde{c}$, ki je naklon tangente na diagram v izbrani točki, ter hitrost gibanja prometnega toka v , ki je naklon sekante skozi izhodišče. Prikaz hitrosti propagacije motnje v odvisnosti od gostote prometnega (spodaj). Pri majhnih gostotah je pozitivna, pri večjih pa negativna, vedno pa je manjša od hitrosti vozil v_e [1].

Če si torej predstavljamo neko začetno porazdelitev gostote po kraju, bodo zaradi odvisnosti hitrosti propagacije od gostote višji deli gostotnega vala začeli zaostajati za nižjimi. Čez nekaj časa naletimo na situacijo, v kateri je gradient gostote pred zgoščino neskončen. V tem trenutku se ustvari *udarni val*, saj zgornje plasti že toliko zaostanejo za spodnjimi, da dobimo več vrednosti za gostoto na istem kraju, kar seveda ni fizikalno. Udarni val (oz. *udarno fronto*) predstavlja navpična črta na grafu odvisnosti gostote od kraja (slika 5). Za voznike povečevanje gradienta gostote pomeni vedno hitrejše zgoščevanje prometa, torej močnejše zaviranje pred zgoščino. Za prometno zgoščino pa vozila pospešujejo vedno počasneje, saj se tam gradient zmanjšuje s časom. Na mestu udarnega vala pride do nezveznega prehoda med fazo prostega prometnega toka in fazo zgoščenega prometnega toka, kar je ekvivalent neskončno hitremu zaviranju.

Tu LWR model odpove, saj ne opisuje realnega dogajanja v prometu. Vseeno pa odlično popiše propagacijo zgoščin kot celote ter s tem pravilno napove, kje se bosta ob nekem času nahajala začetek ter konec zgoščine. Začetek le-te je na mestu udarnega vala, zato se posvetimo študiju hitrosti propagacije tega fenomena.

Obravnavajmo nezvezen prehod med obema fazama prometnega toka [1]. Ta naj se pojavi pri $x = x_{12}$, ki se nahaja med mestoma $x = 0$ in $x = L$. Če vzamemo dovolj kratek odsek ceste, torej



Slika 5. Prikaz tvorbe udarnih valov [9].

če je L dovolj majhen, lahko upravičeno trdimo, da sta gostoti na obeh straneh prehoda (ρ_1 ter ρ_2) konstantni, prav tako pa sta konstantna tudi prometna tokova j_1 in j_2 , ki tečeta v oziroma iz odseka ceste. Da se število vozil na odseku ohranja, mora veljati:

$$\frac{dN}{dt} = j_1 - j_2, \quad (15)$$

kjer je N število vozil. Hkrati pa velja tudi:

$$N = \rho_1 x_{12} + \rho(L - x_{12}). \quad (16)$$

Izračunajmo časovni odvod enačbe (16) in dobimo

$$\frac{dN}{dt} = (\rho_1 - \rho_2)c_{12}, \quad (17)$$

kjer smo s $c_{12} = dx_{12}/dt$ označili hitrost premikanja udarne fronte. Izenačimo oba izraza in dobimo

$$c_{12} = \frac{j_2 - j_1}{\rho_2 - \rho_1}, \quad (18)$$

kjer velja $j_2 = j_e(\rho(2))$ ter $j_1 = j_e(\rho(1))$, torej sta tokova enaka ravnovesnima tokovoma pri ustreznih gostotah. Tako smo izpeljali hitrost propagacije prehoda med fazama prometnega toka, ki velja v vseh makroskopskih modelih, saj nismo uporabili nobene predpostavke o zvezi med gostoto in tokom.

Podobno kot smo to lahko storili za hitrosti širjenja motnje \tilde{c} ter hitrost prometnega toka v , lahko na fundamentalnem diagramu (slika 4) preberemo tudi hitrost širjenja udarnega vala. Izberemo dve točki na krivulji, ki se nahajata v različnih fazah (ena levo, druga pa desno od prehoda) ter ju povežemo. Naklon te daljice nam pove hitrost propagacije udarnega vala, kar je očitno iz enačbe (18).

3.2 Kinetična teorija

Promet si lahko predstavljamo tudi kot plin, pri čemer je vsako vozilo ekvivalent ene molekule plina. To sta najprej predlagala Prigogine ter Herman [10]. Gre za mezoskopsko teorijo, saj vsebuje tako elemente mikroskopskih kot tudi makroskopskih modelov. Obstaja precej poskusov opisa prometnega toka kot ekvivalenta plinu, mi pa se posvetimo le nekaj najbolj osnovnim.

Da bomo lažje vlekli vzporednice s plinom, si oglejmo Boltzmannovo transportno enačbo [3]:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \right] f(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll}, \quad (19)$$

kjer $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t)$ predstavlja verjetnostno porazdelitev molekul plina po kraju ter gibalnih količinah, gradienta $\nabla_{\mathbf{r}}$ in $\nabla_{\mathbf{p}}$ pomenita gradient po \mathbf{r} oziroma \mathbf{p} , \mathbf{F} predstavlja zunanjo silo na molekule, desna stran enačbe pa opisuje trke med molekulami. Integral porazdelitve f po krajevnem območju

ter območju gibalnih količin nam pove število molekul, ki se nahajajo na tem krajevnem intervalu in imajo gibalno količino v območju integracije.

Podobno lahko storimo tudi za promet in vpeljemo porazdelitev $f(x, v; t)$, ki po integraciji od x_1 do x_2 ter od v_1 do v_2 opisuje število vozil, ki imajo hitrost v mejah integracije in se nahajajo na krajevnem območju med x_1 in x_2 . Sledimo izpeljavi, ki jo je napravil Prigogine [10] in vpeljimo *želena porazdelitev* $f_0(x, v)$, k kateri naj bi vozniki kolektivno stremeli. Kljub morebitnemu začasemu odstopanju od porazdelitve f_0 zaradi zunanjih vplivov, na primer zaradi vremenskih razmer, naj bi se s časom promet približeval k zeleni porazdelitvi. To se seveda zgodi le v primeru, ko vozila s svojo vožnjo na druga vozila ne vplivajo. Enačba, ki je ekvivalent Boltzmannovi, se v tem modelu glasi:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{rel} + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{int}, \quad (20)$$

kjer prvi člen na desni obravnava relaksacijo porazdelitve od trenutne k $f_0(x, v)$ v odsotnosti interakcij, drugi pa interakcije med vozili. Pri primerjavi z enačbo (19) lahko opazimo, da člen $(\partial f / \partial t)_{coll}$ ustreza drugemu členu na desni strani enačbe (20). Člen $(\partial f / \partial t)_{rel}$ v enačbi (20) pa ustreza členu $\mathbf{F} \cdot \nabla_p f(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t)$ iz enačbe (19), ki opisuje vpliv zunanjih sil na molekule.

V članku [10] je predpostavljena preprosta eksplicitno obliko člena $(\partial f / \partial t)_{int}$, in sicer:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{f - f_0}{\tau} \quad (21)$$

To obliko člena so izbrali, ker gre za enostavno relaksacijo, ki se pogosto pojavlja v statistični fiziki. Eden od razlogov za to predpostavko je tudi ta, da vsebuje le en relaksacijski čas τ , ki je enak za vsa vozila, torej je neodvisen od njihove hitrosti, kar napravi rešitev še posebej enostavno. To v realnosti ni res, saj je intuitivno jasno, da se bodo bodo vozila z različnimi hitrostmi različno hitro približevala zeleni hitrosti. Nadalje so predpostavili tudi, da je *želena porazdelitev hitrosti* $F_0(v)$ neodvisna od lokalne gostote $\rho(x, t)$. Torej velja:

$$f_0(x, v; t) = \rho(x, t) F_0(v), \quad (22)$$

kjer z $F_0(v)$ označimo verjetnostno porazdelitev hitrosti, ki jo vozniki kolektivno želijo doseči. S tema predpostavkama lahko torej prepišemo enačbo (20) kot:

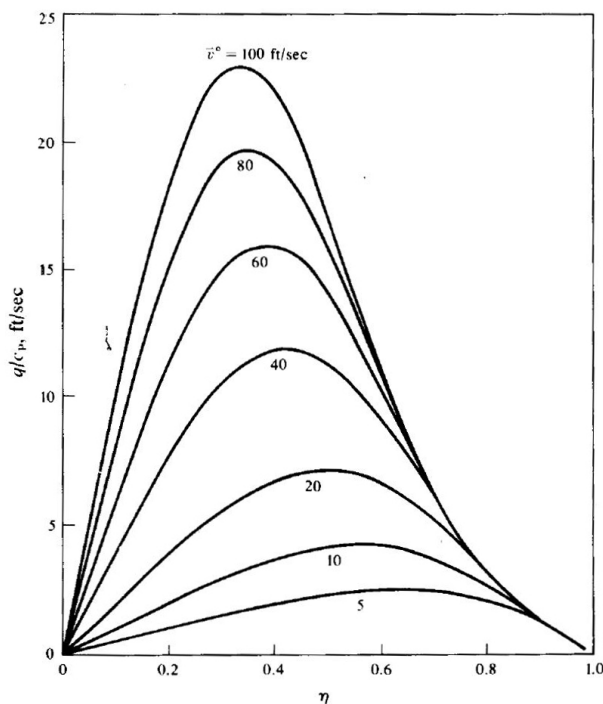
$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = - \frac{f - \rho(x, t) F_0(v)}{\tau} + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{int}. \quad (23)$$

Če zanemarimo drugi člen na desni, ki opisuje interakcije med vozili, dobimo eksponentno relaksacijo porazdelitve k zeleni porazdelitvi $f_0(v, t)$.

Rešitve, ki jih dobimo s tem modelom, v veliki meri slonijo na izbiri ustrezne zelene porazdelitve, ki pa je seveda ne znamo uganiti, saj ne znamo opisati človeškega vedenja. Avtorji članka [10] so numerično izračunali rešitve za nekaj zelenih porazdelitev hitrosti, iz katerih lahko nato dobimo količine, s katerimi opisujemo prometni tok. Eden od rezultatov so na primer fundamentalni diagrami, torej grafi odvisnosti prometnega pretoka od gostote prometnega toka. Oglejmo si eno od zelenih porazdelitev, za katero so pridobili rezultat:

$$f_0 = \frac{\rho_p \eta}{v_0} \exp\left(-\frac{v}{v_0}\right). \quad (24)$$

V enačbi (24) ρ_p predstavlja mejno gostoto prometnega toka, pri kateri se avtomobili ne morejo več prehitevati, v_0 pa je kar povprečna hitrost, ki jo želijo doseči vozniki. η je normalizirana gostota prometnega toka $\eta = \rho / \rho_p$. Rezultat, ki je bil pridobljen numerično, je prikazan na sliki 6.



Slika 6. Fundamentalni diagram, pridobljen numerično s kinetično teorijo in nastavkom (24) za f_0 za različne zelene povprečne hitrosti v_0 pri parametru $c_p\tau = 0,1$ s/ft. Na osi y je nanešen normaliziran tok j/ρ_p , na os x pa normalizirana gostota prometnega toka $\eta = \rho/\rho_p$ [10].

Primerjava diagrama na sliki 6 z empirično pridobljenim fundamentalnim diagramom 2 nam pokaže, da se osnovna oblika diagrama ujema z meritvami. Vseeno pa je bil ta pristop k modeliranju prometa deležen kritik na račun neupoštevanja možnosti, da se vsako vozilo drugače približuje zeleni hitrosti [3]. Pristop je nadgradil Paveri-Fontana [11], ki je predpostavil, da ima vsako vozilo svojo hitrost, h kateri s časom relaksira, če vmes ne pride do interakcij z drugimi vozili. To sloni na seriji idealnih eksperimentov (izračunov), ki so pokazali, da model, ki ga je predlagal Prigogine s sodelavci [10] ne opiše nekaterih vidikov realnega prometa.

Paveri-Fontana je uvedel novo porazdelitev $g(x, v, t; v_0)$, za katero velja, da je $g(x, v, t; v_0) dx dv_0$ pričakovano število vozil ob času t v okolici med x in $x+dx$, ki imajo hitrost med v in $v + dv$ in zeleno hitrost med v_0 in $v_0 + dv_0$. Tako lahko z integracijo po pričakovanih hitrostih dobimo:

$$f(x, v, t) = \int_0^\infty dv_0 g(x, v, t; v_0), \tag{25}$$

kar je ravno porazdelitev f , s katero smo imeli opravka v prejšnjem poglavju. Podobno z integracijo po hitrosti vozil v dobimo porazdelitev zelenih hitrosti $f_0(x, v_0, t)$.

Izpeljimo sedaj izboljšano različico ekvivalenta Boltzmannovi enačbi, kot je to storjeno v [11]. Boltzmannova enačba je:

$$\frac{\partial}{\partial t}g + v \frac{\partial}{\partial x}g + \frac{\partial}{\partial v}[a(v, v_0)g] = \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{int}, \tag{26}$$

kjer je $a(v, v_0)$ pospešek vozila, ki ima hitrost v in zeleno hitrost v_0 . Pospešek vozila lahko zapišemo kot

$$\frac{dv}{t} = \frac{v_0 - v}{\tau}, \tag{27}$$

kjer smo s τ označili relaksacijski čas. Pri tem napravimo predpostavko, da se vsako vozilo k svoji zeleni hitrosti približuje eksponentno s časom. Izrazimo še desno stran enačbe (26), torej člen, ki opisuje interakcijo med vozili. Da bomo to lahko storili, moramo napraviti nekaj predpostavk, ki so

enake kot pri modelu, ki ga je razvil Prigonine 20. Obravnavajmo situacijo, v kateri hitrejši avto, ki se približa počasnejšemu, lahko bodisi upočasni bodisi ga prehit. Predpostavke so naslednje [11]:

1. Verjetnost, da pride do prehitevanja med voziloma, je P in pri tem se hitrost vozilu ne spremeni.
2. Hitrost počasnejšega vozila ostaja nespremenjena ne glede na interakcijo s hitrejšim vozilom.
3. Dolžini vozil sta zanemarljivi.
4. Hitrejšo vozilo upočasni tako hitro, da lahko privzamemo, da je trajanje zaviranja zanemarljivo.
5. Upoštevamo le interakcijo med dvema voziloma; vse ostale zanemarimo.
6. Dogajanje v prometu je *kaotično*, torej lahko dvodelčno porazdelitev hitrosti zapišemo približno kot produkt dveh enodelčnih. Velja $g_2(x, v, v_0, x', v', v'_0; t) \approx g(x, v, v_0; t)g(x', v', v'_0)$.

Z zgornjimi predpostavkami lahko zapišemo *izboljšano* Boltzmannovo enačbo (26) kot:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) g(x, v, t; v_0) + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{v_0 - v}{\tau} g(x, v, t; v_0) \right] \\ = f(x, v, t) \int_v^\infty dv' (1 - P)(v' - v) g(x, v', t; v_0) \\ - g(x, v, t; v_0) \int_0^v dv' (1 - P)(v - v') f(x, v', t), \quad (28) \end{aligned}$$

kjer je $f(x, v, t)$ porazdelitev, dobljena kot v enačbi (25). Prvi člen na desni opisuje povečanje verjetnosti $g(x, v, v_0; t)$ zaradi interakcije vozila s hitrostjo v' s počasnejšim vozilom s hitrostjo v , ki je pred njim. Drugi člen pa opisuje izgubo verjetnosti $g(x, v, v_0; t)$ zaradi interakcije vozil s hitrostjo v s še počasnejšimi vozili, ki imajo hitrost v' [3]. Desna stran enačbe (28) je enaka kot bi bil člen, ki opisuje interakcije med vozili v enačbi (20).

Očitne izboljšave modela bi lahko bile mogoče tako, da bi upoštevali dimenzijo vozil, njihovo raznovrstnost ter končen čas zaviranja. Prav tako bi morali v realni situaciji obravnavati vsaj dvopasovno cesto, da bi bilo prehitevanje sploh fizično mogoče. V tem primeru dobimo sklopljen sistem Boltzmannovih enačb za vsakega izmed pasov, kar reševanje močno zaplete.

Oglejmo si še, kako bi iz tega mezoskopskega modela izpeljali makroskopske enačbe. Zanimivo bi bilo dobiti recimo kontinuitetno enačbo, a se moramo zavedati, da bo rezultat veljal le za nizke gostote prometnega toka, saj smo predpostavili kaotično obnašanje vozil, torej zanemarljivo medsebojno interakcijo.

Definirajmo momente [3]:

$$m_{k,l}(x; t) = \int dv \int dv_0 v^k v_0^l g(x, v, v_0; t), \quad (29)$$

kjer sta k in l indeksa, ki povesta za katero količino gre. Tako na primer velja $\rho = m_{0,0}$ ter $\langle v \rangle = m_{1,0}$. Da dobimo kontinuitetno enačbo, integriramo izraz (28) po hitrostih v in dobimo

$$\frac{\partial}{\partial t} f_0(x, v_0; t) + \frac{\partial}{\partial x} [\bar{v}(x, v_0; t) f_0(x, v_0; t)], \quad (30)$$

kjer je \bar{v} definiran kot

$$\bar{v}(x, v_0; t) = \frac{\int v g(x, v, v_0; t) dv}{f_0(x, v_0; t)}, \quad (31)$$

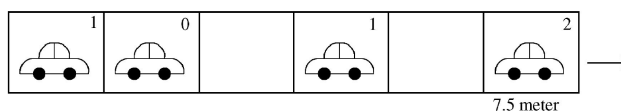
kar ni nič presenetljivega. Enačba (30) je kontinuitetna enačba za vsako želeno hitrost v_0 posebej.

Enačbi (28) ter (29) tvorita sistem enačb za različne momente v in v_0 (ko uporabimo različne koeficiente k in l). Tako bi lahko izračunali gostoto prometnega toka, povprečno hitrost in podobne zanimive količine. Vseeno pa sistem enačb ni zadosten, saj pripelje do hierarhije enačb za moment, pri čemer vsaka vsebuje še moment višjega reda. Zato moramo določene reči predpostaviti, da lahko pridemo do zelene rešitve [3].

3.3 Metoda celičnih avtomatov (CA)

Posvetimo se še eni od najbolj razširjenih, hkrati pa tudi najenostavnejših, metod, to je metodi *celičnih avtomatov* (ang. *cellular automata*). Gre za mikroskopski model, pri katerem sta krajevna in časovna koordinata po definiciji diskretna, kar daje modelu prednost pri numeričnem računanju, ki to vedno zahteva. Pri tem ni potrebno povečevati krajevne in časovne diskretizacije, kar je bistveno pri optimizaciji časovne zahtevnosti [12].

Eden od modelov, ki uporabljajo ta pristop, je *Nagel-Schreckenbergov* model (*NaSch* model) [13]. Cesto razdelimo na enako velike celice, ki so lahko bodisi prazne bodisi polne in so reda velikosti dolžine vozil (slika 7); v tem modelu so dolge 7.5 m.



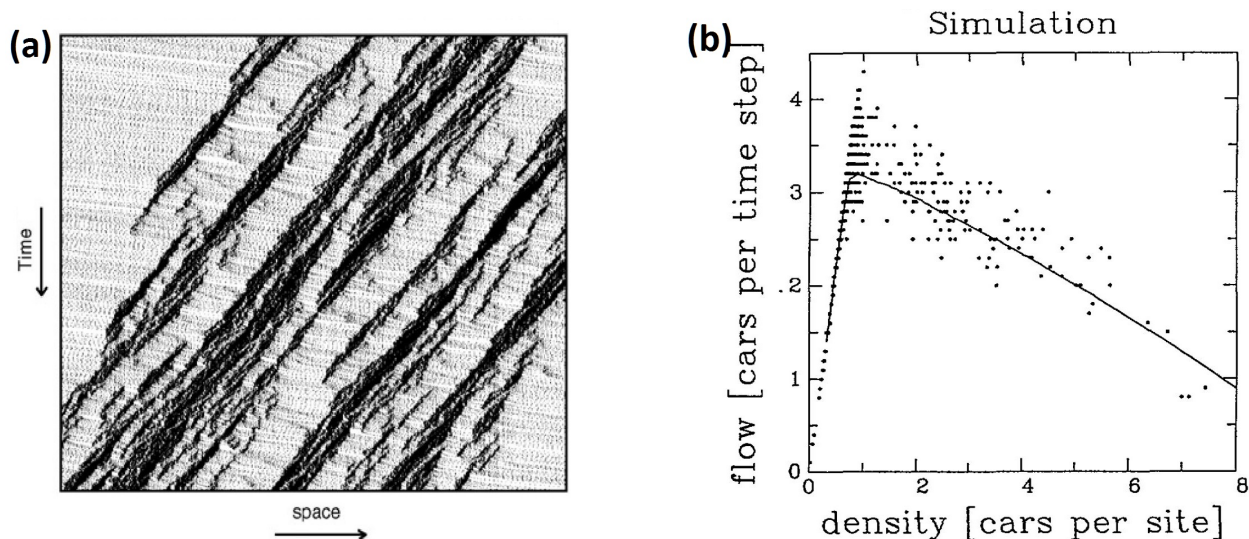
Slika 7. Shema Nagel-Schreckenbergovega modela. Števila v celicah prikazujejo hitrosti vozil v njih. Povzeto po [12].

V tem modelu vsako vozilo, ki mu priredimo zaporedno naravno število n ($n \in [1, N]$), opišemo z njegovo hitrostjo v_n , ki lahko zavzame le diskretne cele vrednosti ($v \in [0, v_{max}]$), kjer je v_{max} omejitev hitrosti. Krajevno koordinato n -tega vozila označimo z x_n (zaporedna številka celice), $d_n = x_{n+1} - x_n + 1$ pa je krajevna razdalja med voziloma n ter $n + 1$ (število praznih celic). Čas prav tako teče po korakih in v vsakem od njih se posamezno vozilo vede v skladu s sledečimi koraki [13]:

1. *Pospeševanje.* Če je $v_n < v_{max}$, se hitrost v_n poveča za 1 enoto.
2. *Zaviranje.* Če vozilo na mestu x_n vidi naslednje vozilo na mestu x_{n+m} in je $v_n \geq m$, zmanjša svojo hitrost na $m - 1$. Tako se izogibe trčenju.
3. *Naključno zaviranje.* Z verjetnostjo p se hitrost vsakega vozila zmanjša za 1 enoto, če hitrost ni enaka 0.
4. *Premik vozil.* Vsako vozilo se premakne z novo določeno hitrostjo v_n , izračunano po zgornjih korakih. Tako se vozilo iz mesta x_n premakne na mesto $x_n + v_n$.

Zgornja pravila so potrebna, da simulacije dajo smiselne rezultate. Kot je izpostavljeno v članku [12], se ob odstranitvi 3. koraka nikoli ne ustvarijo spontane zgostitve prometnega toka, kar ni v skladu z empiričnimi rezultati. To je pričakovano, saj s tem odstranimo vso naključnost iz modela. Tudi vrstni red izvajanja korakov je ključen, saj lahko v primeru menjave le-tega pride recimo do trkov med vozili (menjava 2. in 1. koraka).

Za pridobitev uporabnih rezultatov se simulacije dela računalniško. S tem lahko dosežemo, da so obvladljivi tudi veliki sistemi, na katerih napravimo veliko število časovnih korakov. Tipični rezultati simulacije (slika 8) so zelo podobni realni situaciji (sliki 1 ter 2). Zgostitve prometnega toka se tudi v tem primeru s časom premikajo v protitočni smeri. Pri primerjavi fundamentalnega diagrama, ki ga da NaSch model (slika 8), z izmerjenim diagramom (slika 2 (b)), lahko opazimo, da se v modelu nikoli ne pojavijo metastabilna stanja z visokim pretokom, ki obstajajo v realnosti.



(a) Tipični diagram, pridobljen s pomočjo NaSch modela [12].

(b) Fundamentalni diagram, pridobljen z Monte Carlo simulacijo [13]. Točke prikazujejo povprečje po 100 časovnih korakih, črta pa povprečje po 10^6 korakih.

Slika 8. Prostorsko - časovni diagram ter fundamentalni diagram pri NaSch modelu.

To je motivacija za nadaljnje izboljšave modela. Eno izboljšavo, ki v račun vzame tudi *razvejevanje* stanj, je predlagal Barlovic s sodelavci [14]. Gre za takoimenovan *VDR* model (ang. *velocity-dependent-randomization*), kjer je verjetnost za prekomerno zaviranje p iz koraka 3. v (3.3) odvisna od hitrosti, torej $p = p(v_n(t))$. Ključno je, da to verjetnost določimo, še preden se lotimo korakov. Mislimo si lahko, da smo dodali nov, ničti korak.

Metastabilna stanja, ki jih opazimo v realnem prometu, se pojavijo pri uporabi takoimenovanih *slow-to-start* (*s2s*) pravil, kjer je odvisnost verjetnosti od hitrosti:

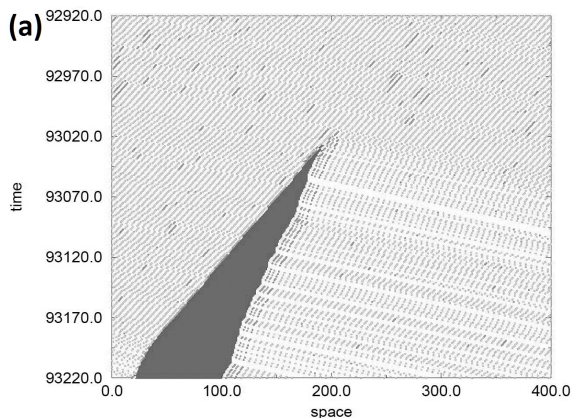
$$p(v) = \begin{cases} p_0, & v = 0, \\ p, & v > 0, \end{cases} \quad (32)$$

kjer je $p_0 > p$. To pomeni, da vozila, ki so v prejšnjem koraku mirovala, z večjo verjetnostjo zavirajo v 3. koraku. Torej se stoječa vozila začnejo premikati počasi - odtod izvira ime tega pravila.

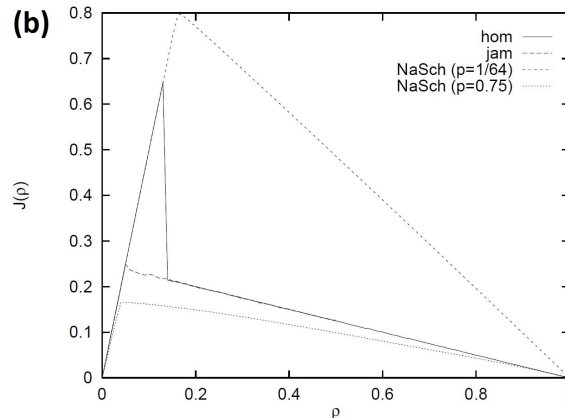
Z uporabo novega koraka dobimo nekoliko drugačna fundamentalni diagram ter prostorsko-časovni diagram (slika 9).

Kot vidimo na sliki 9 (a), pride do popolne ločitve na dve fazi, na fazo zgoščenega (stoječega) ter na fazo prostega toka. Za razliko od NaSch modela (slika 8 (a)), se ustvari veliko območje z zgostitvijo namesto več gostotnih valov. Fundamentalni diagram (slika 9 (b)) pa lepo pokaže razliko med obema modeloma, saj v okolici relativne gostote $\rho \approx 0.1$ dobimo dve mogoči vrednosti za pretok, kar pomeni obstoj realnih metastabilnih stanj z visokim pretokom. Katero stanje dobimo, je odvisno od začetnih pogojev oziroma od tega, iz katere strani gostote s približujemo gostoti $\rho \approx 0.1$. Opazimo histerezo, saj se v primeru hitrega (adiabatnega) zgoščevanja pojavijo stanja z visokim pretokom (zgornja krivulja), medtem ko v primeru zmanjševanja gostote tega pojava ne opazimo (spodnja krivulja).

Čeprav simulacije, v katerih uporabljamo do sedaj predstavljena pravila, dajo dobre rezultate, še vedno niso v popolnem ujemanju z empirično pridobljenimi podatki. Nobeden od zgoraj opisanih modelov ne upošteva dejstva, da zmorejo vozniki predvideti hitrost vozil pred seboj in se s tem izogniti nenadnemu zaviranju, ki lahko ustvari gnečo. Poleg tega vozila v realnosti ne pospešijo nujno, če se pred njimi pojavi prazen prostor, saj je lahko za tem zgoščen promet, ki se giblje z



(a) Tipični diagram, pridobljen s pomočjo VDR popravka. Parametri: $p_0 = 0.75$, $p = 1/64$, dolžina mreže $L = 10000$, $v_{max} = 5$, začetni pogoji pa so enkrat homogen prometni tok (hom), drugač pa popolnoma zgoščen promet (jam). [14]



(b) Primerjava fundamentalnih diagramov za VDR in NaSch model. Parametri so $p = 1/64$ ter $p = 0.75$ [14]

Slika 9. Prostorsko - časovni diagram ter fundamentalni diagrami (VDR model).

manjšo hitrostjo. Prav tako ni upoštevano, da ponavadi vozniki ne čakajo do zadnjega trenutka, preden začnejo zavirati. Zaviranje tik pred trkom je eden od vzrokov za tvorbo gneč, ki pa v realnosti ni pogost. Zgornje opazke so upoštewane v nekaterih izboljšavah modelov, ki so sposobne opisati tako popolne gneče in prost prometni tok kot tudi sinhroniziran prometni tok, ki ga opazimo pri meritvah [12]. Podrobneje se s temi modeli ne bomo ukvarjali.

Z dodatnimi pogoji, ki opisujejo obnašanje posameznih vozil v odvisnosti od okolice, modeli na osnovi celičnih avtomatov pridejo izjemno blizu realnemu dogajanju v prometu. Zaradi tega se v kombinaciji z merilniki uporabljajo za napovedovanje zastojev v realnem času [16]. Napovedovanje deluje tako, da je s pomočjo modela napravljena interpolacija meritev, ki seveda niso narejene na celotnem odseku, ki nas zanima. To je posebej uporabno, saj tako ni potrebno ceste posejati z mnogo merilniki, da dobimo dobro napoved prometnih razmer.

4. Zaključek

V članku smo predstavili nekaj različnih pristopov k modeliranju cestnega prometnega toka. Če želimo dinamiko opisati natančno, hitro naletimo na kompleksne probleme, ki zahtevajo reševanje sistemov diferencialnih enačb, ali pa veliko računsko zmogljivost. V prihodnosti bo modeliranje cestnega prometnega toka gotovo ostalo zelo pomembno, saj nič ne kaže, da bi se obseg uporabe cestnih vozil zmanjšal. Poleg tega mesta hitro rastejo in potrebujejo premišljeno prometno ureditev, za doseg katere je modeliranje cestnega prometnega toka ključno. Četudi bodo vozila kmalu avtonomna in povezana med sabo, to ne bo zmanjšalo potrebe po novih raziskavah na področju prometnega načrtovanja.

LITERATURA

- [1] M. Treiber in A. Kesting, *Traffic Flow Dynamics* (Springer, Berlin, 2013).
- [2] J. Treiterer, D. Clear, D. Howarth, J. Lee in J. Myers, *Investigation of traffic dynamics by aerial photogrammetry techniques. Interim report EES 278-3*, (Ohio State University, Columbus, Ohio, 1970).
- [3] D. Chowdhury, L. Santen, A. Schadschneider, *Phys. Rep.* **329**, 199 (2000).
- [4] F. L. Hall, B. L. Allen in M. A. Gunter, *Transp. Res. A* **20**, 197 (1986).
- [5] P. Hrabák in M. Krbálek, *Proc. Soc. Behav. Sci.* **20**, 406 (2011).
- [6] S. P. Hoogendoorn in P. H. L. Bovy, *Proc. Inst. Mech. Eng. I J. Syst. Control Eng.* **215**, 283 (2001).

- [7] M. J. Lighthill in G. B. Whitham, Proc. Roy. Soc. Lond. A **229**, 281 (1955).
- [8] P. I. Richards, Oper. Res. **4**, 42 (1956).
- [9] A. Barnett, Math 46: Introduction to Applied Mathematics (2007). [online] Dostopno na: https://math.dartmouth.edu/archive/m46s08/public_html/Keyfitz_shock.jpg(Datum dostopa: 6.4.2017).
- [10] I. Prigogine in R. Herman, *Kinetic theory of vehicular traffic*, (American Elsevier Publishing Company, New York, 1971).
- [11] S. L. Paveri-Fontana, Transport. Res. **9**, 225 (1975).
- [12] A. Schadschneider, Phys. A **372**, 142 (2006).
- [13] K. Nagel in M. Schreckenberg, J. Phys. I **2**, 2221 (1992).
- [14] R. Barlovic, L. Santen, A. Schadschneider in M. Schreckenberg, Eur. Phys. J. B **5**, 793 (1998).
- [15] W. Knospe, L. Santen, A. Schadschneider in M. Schreckenberg, Phys. Rev. E. **65**, 056133 (2002).
- [16] J. Wahle, L. Neubert, J. Esser in M. Schreckenberg, Parallel Comput. **27**, 719 (2001).