UNIMODALNA KATEGORIJA IN TOPOLOŠKA STATISTIKA

JAKOB PETERLIN

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

MSC 2010: 55M30, 55M99

V tem delu sta predstavljena pojem unimodalne dekompozicije in z njim povezano število, imenovano unimodalna kategorija. Predstavljen je tudi algoritem za izračun tega števila v primeru zvezne realne funkcije s kompaktnim nosilcem in sliko v $[0, \infty)$.

UNIMODAL CATEGORY AND TOPOLOGICAL STATISTICS

In this article the notion of unimodal decomposition and with it related number, called unimodal category, is presented. An algorithm for the calculation of this number for a continuous real function with compact support and image in $[0, \infty)$ is also presented.

1. Uvod

V tem članku je predstavljeno delo Yuliyja Baryshnikovega in Roberta Ghrista, objavljeno v članku [1] z naslovom Unimodal Category and Topological Statistics. To je osrednje delo, na katerem temelji ta članek.

Članek obravnava problem iskanja najmanjše unimodalne dekompozicije zvezne funkcije s kompaktnim nosilcem, ki slika v $[0, \infty)$, na topološkem prostoru. Unimodalna dekompozicija pri neki normi je razcep te funkcije na unimodalne funkcije, katerih vektor ima pri tej normi enako vrednost kot prvotna funkcija v vsaki točki prostora. Unimodalna funkcija je taka zvezna funkcija u s kompaktnim nosilcem in sliko v $[0, \infty)$, za katero obstaja neki $M \in [0, \infty)$, da je množica $u^{-1}([c, \infty))$ za $c \in (0, M]$ kontraktibilna, za $c > M$ pa je prazna.

V osrednjem članku je predstavljen algoritem za izračun unimodalne kategorije zvezne funkcije $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ s kompaktnim nosilcem in napotki za izračun unimodalne kategorije zvezne funkcije $g : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ s kompaktnim nosilcem. Na koncu članka avtorja predstavita še domnevo, ki naj bi veljala za vsako zvezno funkcijo $f : X \to [0, \infty)$ s kompaktnim nosilcem, kjer je X poljuben topološki prostor. Izkaže pa se, da je ta domneva napačna.

V tem članku je najprej predstavljenih nekaj osnovnih topoloških definicij, ki so potrebne za razumevanje definicije unimodalnosti. Nato so predstavljene definicije in trditve, ki zadevajo unimodalno kategorijo in njen izračun za zvezne funkcije s kompaktnim nosilcem na splošnem topološkem prostoru. Sledi obravnava unimodalne kategorije za dano zvezno funkcijo $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ s kompaktnim nosilcem in algoritma za izračun unimodalne kategorije za primere Hölderjevih p-norm.

Področje topološke analize podatkov, katerega del je topološka statistika, je zelo mlado področje matematike. Primera uporabe topološke analize podatkov sta rudarjenje podatkov in računalniški vid. Avtorja članka [1] uporabo unimodalne kategorije vidita predvsem pri obravnavi statističnih modelov. Zainteresiranemu bralcu je priporočen še ogled [3], kjer je delno rešen primer iskanja unimodalne kategorije zveznih funkcij s kompaktnim nosilcem na $\mathbb{R}^2$. Avtorja osrednjega članka sta predstavila uporabo unimodalne kategorije v [2].

2. Homotopija in kontraktibilnost

Za razumevanje nadaljnje razprave moramo najprej razumeti topološke pojme, ki so predstavljeni v tem razdelku.

Definicija 1. Naj bosta $f, g : X \to Y$ zvezni preslikavi med topološkima prostoroma. *Homotopija* $H : X \times [0,1] \to Y$ od f do g je zvezna preslikava, za katero velja

1. $H(x,0) = f(x)$, za vsak $x \in X$,
2. $H(x,1) = g(x)$, za vsak $x \in X$.

Preslikavi $f, g : X \to Y$ sta *homotopni*, če med njima obstaja homotopija. Pišemo $f \simeq g$.

Pri definiciji unimodalnosti bomo potrebovali definicijo kontraktibilnosti.

Definicija 2. Za topološki prostor X rečemo, da je *kontraktibilen*, če obstaja kakšna konstantna preslikava, ki je homotopna identiteti prostora X.

Za podprostor $A \subset X$, ki ima vložitev $i : A \to X$, rečemo, da je *kontraktibilen v* X, če je i homotopna konstantni preslikavi.

V nadaljevanju pa je treba vedeti še, da so intervali kontraktibilni.

Trditev 1. *Za poljubna $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ je interval $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ kontraktibilen.*

Dokaz: Vzamemo preslikavo $H : (a,b) \times I \to (a,b)$, definirano z enačbo

$$H(x,t) = x + \left(\frac{a+b}{2} - x\right) t.$$

Preslikava $H(x,t)$ je očitno zvezna, velja pa tudi $H(x,0) = x$ in $H(x,1) = (a+b)/2$. □

Podobno bi lahko dokazali, da so kontraktibilni tudi polodprti in zaprti intervali.

Da bomo hitreje opazili, kateri prostori niso kontraktibilni, si oglejmo naslednjo trditev.

Trditev 2. *Vsak kontraktibilen prostor X je s potmi povezan.*

Dokaz: Vzemimo poljubna $x, y \in X$. Najti moramo pot med njima. Iščemo torej zvezno preslikavo $\Gamma : [0,1] \to X$, za katero velja $\Gamma(0) = x, \Gamma(1) = y$, za dana $x, y \in X$. Ker je prostor X kontraktibilen, po definiciji obstaja neka preslikava $H : X \times [0,1] \to X$, da velja $H(z,0) = z, H(z,1) = c$, za vsak $z \in X$, kjer je $c \in X$ neka konstanta. Preslikava $t \mapsto H(x,t)$ je tako pot med x in c, podobno pa je tudi $t \to H(y,t)$ pot med y in c. Ti dve poti sklopimo, to je združimo na naslednji način

$$\Gamma(t) = \begin{cases} H(x, 2t) & , \text{če } t \leq \frac{1}{2} \\ H(y, 1 - 2(t - \frac{1}{2})) & , \text{če } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Dobili smo pot med x in y. □

V nadaljevanju nam bo prav prišla naslednja trditev.

Trditev 3. *Naj bosta X, Y homeomorfna topološka prostora. Če je X kontraktibilen, je kontraktibilen tudi Y.*

Dokaz: Ker je X kontraktibilen, imamo homotopijo $H : X \times [0,1] \to X$ od $\mathrm{id}_X : x \mapsto x$ do $f : x \mapsto c$, kjer je $c \in X$ neka konstanta. Imamo nek homeomorfizem $h : X \to Y$. Definirajmo sedaj preslikavo $G : Y \times [0,1] \to Y$ na naslednji način

$$G(y,t) = h \circ H(h^{-1}(y), t).$$

Zaradi zveznosti h, h^{-1} in H je tudi G zvezna preslikava, saj je definirana kot kompozitum zveznih preslikav. Velja tudi $G(y,0) = h \circ H(h^{-1}(y), 0) = h(h^{-1}(y)) = y$, in $G(y,1) = h \circ H(h^{-1}(y), 1) = h(c)$. Preslikava G je tako homotopija med id_Y in $h(c)$. □

3. Unimodalna kategorija

V tem poglavju bomo spoznali pojem unimodalne kategorije. To je število in ne kategorija v algebraičnem smislu. Začnimo najprej z omembo dveh, unimodalni kategoriji sorodnih, pojmov.

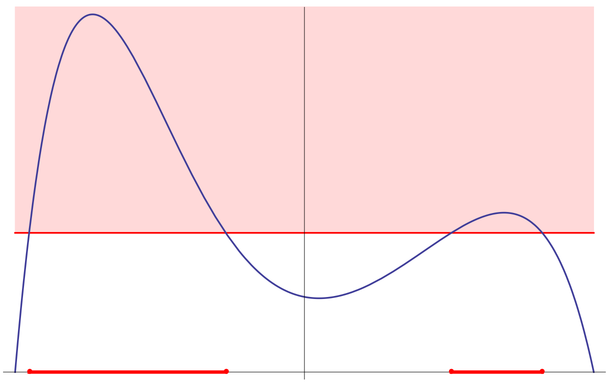
Definicija 3. Naj bo X topološki prostor.

- *Lyusternik-Schnirelmannova kategorija* prostora X je najmanjše število odprtih, v X kontraktibilnih množic, s katerimi lahko pokrijemo X. To število označimo $\mathrm{LScat}(X)$.
- *Geometrijska kategorija* X je najmanjše število odprtih, v sebi kontraktibilnih množic, ki pokrijejo X. Označimo ga z $\mathrm{gcat}(X)$.

Z oznako $\mathcal{D}(X)$ označimo množico zveznih funkcij s kompaktnim nosilcem v X, ki slikajo v $[0, \infty)$. S $\mathrm{supp}(f)$ označimo nosilec funkcije $f \in \mathcal{D}(X)$. Za funkcijo $u \in \mathcal{D}(X)$ pa z u^c označimo množico $u^c = u^{-1}([c, \infty))$.

Definicija 4. Za funkcijo $u \in \mathcal{D}(X)$ pravimo, da je *unimodalna*, če obstaja tak $M \in [0, \infty)$, da je množica u^c kontraktibilna za vsak $c \in (0, M]$, za $c > M$ pa je $u^c = \emptyset$.

Primer funkcije $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, ki ni unimodalna, je prikazan na spodnji sliki.



Slika 1. Graf funkcije, ki ni unimodalna.

Na zgornji sliki vidimo graf funkcije $f(x) = -(x-2)(x+2)(x^2+0.5)((x-1)^2+4.43)$, $X = [-2, 2]$, ki ni unimodalna. Če bi bila ta funkcija unimodalna, bi obstajal tak M, da bi veljalo, da je množica $f^c = \emptyset$ za vsak $c > M$ in f^c kontraktibilna za vsak $c \in (0, M]$. Iz prvega pogoja sledi, da mora biti M večji ali enak globalnemu maksimumu funkcije na intervalu $[-2, 2]$. Iz slike pa je razvidno, da drugi pogoj ne bi bil izpolnjen, saj obstaja nek tak c, da je f^c enak uniji dveh disjunktnih intervalov, torej množici, ki ni s potmi povezana, in zato ni kontraktibilna.

Trditev 4. *Naj bo dana funkcija $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, ki v x_M doseže globalni maksimum M. Funkcija u je unimodalna natanko tedaj, ko je u na $(-\infty, x_M)$ naraščajoča, na (x_M, ∞) pa padajoča.*

Dokaz: Implikacijo z leve proti desni dokažimo s kontrapozicijo. Naj bo $u(x_1) > u(x_2), x_1 < x_2 < x_M$. V primeru, da obstajata $x_4 > x_3 > x_M$, da velja $u(x_3) < u(x_4)$, dokazujemo podobno.

Dokazujemo torej, da ne obstaja tak $N \in [0, \infty)$, da velja $u^c = \emptyset$ za $c > N$, za $c \leq N$ pa je u^c kontraktibilna množica. Če N vzamemo z intervala $[u(x_1), \infty)$, potem izberemo $c = (u(x_1) + u(x_2))/2$, saj je $c < u(x_1) \leq N$. Velja tudi $x_2 \notin u^c$ in $x_1 < x_2 < x_M$, kar pomeni, da u^c ni povezana in zato ni kontraktibilna. Če N vzamemo z intervala $(0, u(x_1)]$, pa lahko izberemo $c = u(x_M)$ in množica u^c tako ni prazna, saj vsebuje x_M. Ustrezen N tako ne obstaja in u ni unimodalna.

Implikacijo z dense port levi pa dokažemo tako, da opazimo, da so množice u^c za $c > M$ prazne, za $c \in (0, M)$ pa intervali in tako kontraktibilne. □

Poglejmo si sedaj definiciji dveh poglavitnih pojmov.

Definicija 5. Za dano normo $\nu = ||\cdot||_\nu$ na $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ in funkcijo $f \in \mathcal{D}(X)$ je *unimodalna* $\nu-$*dekompozicija* funkcije f tak nabor unimodalnih funkcij $u_i \in \mathcal{D}(X), i = 1, \ldots, n$, da velja

$$f(x) = ||(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x))||_\nu, \forall x \in X.$$

Številu n pravimo velikost unimodalne dekompozicije $(u_1, \ldots, u_n)$.

Definicija 6. Za dano normo $\nu = ||\cdot||_\nu$ na $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ in funkcijo $f \in \mathcal{D}(X)$ je *unimodalna* ν *kategorija* najmanjše število (označimo ga z $\text{ucat}^\nu f$) unimodalnih funkcij $u_1, \ldots, u_{\text{ucat}^\nu}$, da velja

$$f(x) = ||(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_{\text{ucat}^\nu}(x))||_\nu, \forall x \in X.$$

Povedano drugače, unimodalna $\nu-$kategorija je najmanjše možno število n, da obstaja unimodalna $\nu-$dekompozicija za funkcijo f velikosti n.

Posebej si oglejmo še unimodalno $p-$kategorijo za $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, saj se bomo v nadaljevanju osredotočili na obravnavo te.

Definicija 7. Naj bo $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, μ Hölderjeva p-norma na $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ in $f \in \mathcal{D}(X)$.

- Če je $p \in \mathbb{N}$, je *unimodalna* $p-$*kategorija* najmanjše tako število, ki ga označimo z $\text{ucat}^p(f)$, da obstajajo unimodalne funkcije $u_1, \ldots, u_{\text{ucat}^p(f)}$, za katere velja

$$f(x) = \left(\sum_{k=1}^{\text{ucat}^p(f)} u_k^p \right)^{\frac{1}{p}}, \forall x \in X.$$

- *Unimodalna* $\infty-$*kategorija* je najmanjše tako število, ki ga označimo z $\text{ucat}^\infty(f)$, unimodalnih funkcij $u_1, \ldots, u_{\text{ucat}^\infty(f)}$, da velja

$$f(x) = \max_{i \in \{1, \ldots, \text{ucat}^\infty(f)\}} (u_i(x)), \forall x \in X.$$

Povedano drugače, unimodalna $p-$kategorija je unimodalna kategorija za Hölderjevo $p-$normo.

V nadaljevanju se bomo v glavnem ukvarjali z unimodalnimi $p-$kategorijami, kjer bo $p \in \mathbb{N}$. Kot pove spodnja trditev, pa je dovolj obravnavati zgolj unimodalno $1-$kategorijo. V tem primeru je vsota komponent unimodalne dekompozicije enaka prvotni funkciji.

Trditev 5. *Za vsak* $f \in \mathcal{D}(X)$ *in vsak* $p \in \mathbb{N}$ *velja*

$$\text{ucat}^p(f) = \text{ucat}^1(f^p).$$

Dokaz: Poglejmo si, kaj se zgodi, ko potenciramo unimodalno funkcijo $u \in \mathcal{D}(X)$ na $p \in \mathbb{N}$. Ker je u unimodalna, obstaja $M \in \mathbb{R}$, da je množica u^c kontraktibilna za vsak $c \in (0, M]$ in $u^c = \emptyset$, za vsak $c > M$.

Za dani $c \in \mathbb{R}$ je $(u^p)^c$ enak

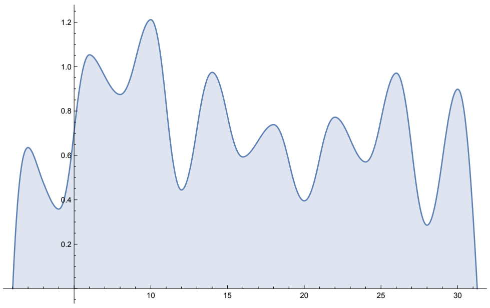
$$(u^p)^c = \{x | x \in (u^p)^{-1}([c, \infty))\} = \{x | x \in u^{-1}([c^{\frac{1}{p}}, \infty))\} = u^{\left(c^{\frac{1}{p}}\right)}.$$

Množica $(u^p)^c$ je tako kontraktibilna za vsak $c \leq M^p$, za $c > M^p$ pa je $(u^p)^c = \emptyset$. To pomeni, da je tudi u^p unimodalna, saj lahko izberemo tak $M' = M^p$, da bo definiciji zadoščeno. Za vsak $x \in X$ velja

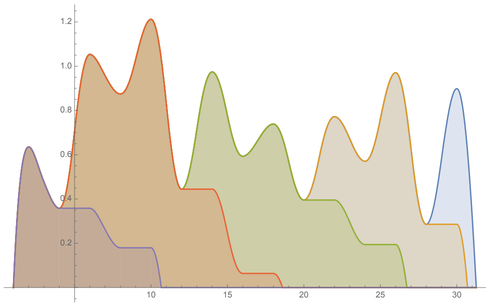
$$f(x) = \left(\sum_{\alpha} u_\alpha^p(x) \right)^{\frac{1}{p}} \iff f^p(x) = \sum_{\alpha} u_\alpha^p(x).$$

Ker pa so tudi u_α^p po zgornjem razmisleku unimodalne, je tako $u_1^p, \ldots, u_{\mathrm{ucat}^1(f)}^p$ unimodalna $1-$dekompozicija za f^p. Iz vsake unimodalne $p-$dekompozicije funkcije $f \in \mathcal{D}(X)$ tako lahko dobimo enako veliko unimodalno $1-$dekompozicijo funkcije $f^p \in \mathcal{D}(X)$, ker pa velja tudi obratno, je zgornja enakost tako dokazana. $\square$

Na spodnjih slikah je prikazan primer unimodalne $1-$dekompozicije.



(a) Prikaz originalnega grafa neke funkcije nad njenim nosilcem.



(b) Prikaz najmanjše možne unimodalne $1-$dekompozicije funkcije z zgornjega grafa.

Lema 6. *Za dan topološki prostor X definirajmo grupo*

$$G_X = (\{h : X \to X |\ h \text{ je homeomorfizem}\}, \circ) .$$

Definirajmo desno delovanje grupe G_X. G na prostor X na naslednji način

$$(x, g) \mapsto g(x).$$

Velja, da je unimodalna $\nu-$kategorija funkcije $f \in \mathcal{D}(X)$ invariantna za zgornje delovanje.

Dokaz: Ker lahko vsako komponento unimodalne dekompozicije funkcije u obravnavamo posebej, lahko brez izgube splošnosti predpostavimo, da je u unimodalna. Opazimo, da velja $(uh)^c = h^{-1}\left(u^{-1}([c, \infty))\right) = h^{-1}(u^c)$.

To, da je homeomorfna slika kontraktibilne množice kontraktibilna, pa je dokazano v trditvi 3. Če je denimo $K \subset X$ kontraktibilna, $h : X \to X$ pa homeomorfizem, velja $\mathrm{id}_K \simeq_H c$, kjer je $c : K \to \{k\}$ za nek $k \in K$, H pa homotopija med id_K in c. Potem je $\mathrm{id}_{h(K)} \simeq hch^{-1}$, saj med njima obstaja homotopija $H'(x, t) = h(H(h^{-1}(x), t))$. $\square$

Velja pa tudi naslednja lema.

Lema 7. *Za dano funkcijo $f \in \mathcal{D}(X)$ je $\mathrm{ucat}^\infty(f)$ invariantna za delovanje homeomorfizmov poltraka $[0, \infty)$ z leve.*

Dokaz: Vemo, da za vsak homeomorfizem $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ velja $h(0) = 0$ in $\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$. Če imamo dano unimodalno ∞-dekompozicijo za f velikosti $\mathrm{ucat}^\infty(f)$, potem za vsak $x \in X$ velja

$$f(x) = \max_{i \in \{1, \ldots, \mathrm{ucat}^\infty(f)\}} (u_i(x)) .$$

Funkcija $h(u_i(x))$ za $i \in \{1, \ldots \mathrm{ucat}^\infty(f)\}$ je unimodalna, saj je u_i unimodalna, homeomorfizem h pa očitno ohrani unimodalnost u_i. Nabor funkcij $\{h(u_i), i \in \{1, \ldots \mathrm{ucat}^\infty(f)\}\}$ je tako unimodalna ∞-dekompozicija za hf. Če bi za funkcijo hf obstajala manjša unimodalna ∞-dekompozicija, bi z uporabo homeomorfizma h^{-1} dobili manjšo unimodalno ∞-dekompozicijo za funkcijo f, kar pa je v protislovju s tem, da je unimodalna ∞-kategorija za funkcijo f velikost najmanjše možne unimodalne ∞-dekompozicije za funkcijo f. $\square$

4. Primer $X = \mathbb{R}$

V tem razdelku je predstavljen izračun unimodalne 1-kategorije za dano funkcijo $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, pri nekih dodatnih predpostavkah.

Predpostavimo, da je $X = \mathbb{R}$. Obravnavamo funkcije $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, za katere dodatno predpostavimo še, da ima f na $\mathrm{supp}(f)$ izolirane lokalne ekstreme. Predpostavimo tudi, da je lokalnih ekstremov funkcije f končno. Predpostavka o končnosti lokalnih ekstremov ne sledi iz ostalih predpostavk. Vzamemo lahko namreč funkcijo $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, definirano kot

$$g(x) = \begin{cases} 2 + x, & \text{če } x \in [-2, 0] \\ 2 + x\sin(\frac{1}{x}), & \text{če } x \in (0, \frac{1}{\pi}] \\ 2 - (x - \frac{1}{\pi}), & \text{če } x \in (\frac{1}{\pi}, 2 + \frac{1}{\pi}] \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}.$$

Opazimo, da je $\mathrm{supp}(g) = [-2, 2 + \frac{1}{\pi}]$. Opazimo še, da funkcija g lokalne ekstreme na $\mathrm{supp}(g)$ doseže v točkah iz $\{\frac{2}{n\pi}, n \in \mathbb{N}\}$. Funkcija g ima tako neskončno mnogo izoliranih lokalnih ekstremov.

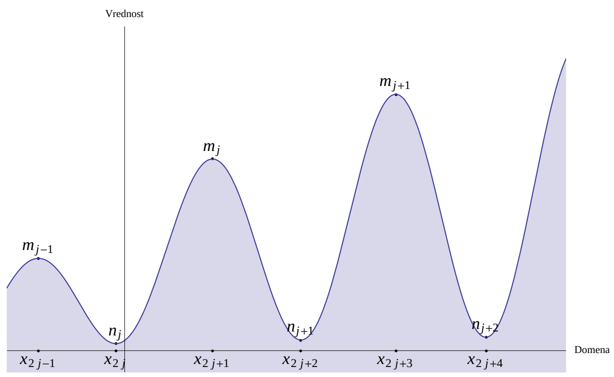
Predpostavimo še, da ima f povezan nosilec, v nasprotnem primeru bi lahko obravnavali f nad vsako komponento za povezanost množice $\mathrm{supp}(f)$ posebej.

Množico vseh takšnih funkcij bomo označili z $\mathcal{D}$.

V luči leme 5 bomo obravnavali zgolj unimodalne $1-$dekompozicije in unimodalno $1-$kategorijo. Proti koncu tega razdelka bomo obravnavali še unimodalno $\infty-$kategorijo ter unimodalne $\infty-$dekompozicije za $f \in \mathcal{D}$. Z unimodalno kategorijo bomo v tem razdelku tako mislili unimodalno $1-$kategorijo, z unimodalno dekompozicijo pa bomo mislili na unimodalno $1-$dekompozicijo.

Točke, v katerih $f \in \mathcal{D}$ doseže lokalne ekstreme, označimo z x_i na sledeč način. Z x_0 označimo najmanjšo točko $\mathrm{supp}(f)$. Vse naslednje točke x_i pa uredimo tako, da velja $x_i < x_j \iff i < j$.

Tako velja, da ima f v x_i lokalni minimum natanko tedaj, ko je i sodo število, in lokalni maksimum natanko tedaj, ko je i liho število. Z m_i označimo lokalne maksimume, ki jih f doseže v točkah $x_{2i+1}, i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Z n_i pa označimo lokalne minimume, ki jih f doseže v točkah $x_{2i}, i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Na sliki 3 je takšna označitev tudi prikazana.



Slika 3. Prikaz oznak

Ni težko opaziti, da če imamo točke $x_0, \ldots x_n$ za $f \in \mathcal{D}$, da je n sodo število. To sledi iz tega, da je $f(x_0) = f(x_n) = 0$, v točkah $x_1, \ldots x_{n-1}$ pa izmenično nastopajo lokalni maksimumi in minimumi f.

Naslednja trditev nam pove, da je iskanje algoritma za izračun unimodalne kategorije za funkcije $f \in \mathcal{D}$ smiselno.

Trditev 8. *Naj bo $f \in \mathcal{D}$. Če uporabimo zgoraj opisan sistem oznak in so $x_0, x_1, \ldots x_{2k}$ ustrezne točke za f, velja, da je $\mathrm{ucat}^1(f) \leq k$.*

Dokaz: Trditev dokažimo z indukcijo po k. Če je $k = 1$, je f unimodalna in $\mathrm{ucat}^1(f) = 1$, to velja po trditvi 4.

Denimo, da trditev velja za vsak $k < n$. Recimo, da za dano funkcijo $f \in \mathcal{D}$ velja, da je primeren k za f enak n. Definirajmo funkcijo $u : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ na naslednji način

$$u(x) := \begin{cases} f(x), & x_0 \leq x \leq x_2, \\ \frac{(-f(x_2))(x-x_2)}{(x_3-x_2)} + f(x_2), & x_2 \leq x \leq x_3, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Funkcija u je očitno unimodalna. Velja tudi, da ima $f-u$ dva lokalna ekstrema manj kot f. Funkcija $f - u$ namreč doseže lokalne ekstreme v točkah $x_2, x_3, \ldots, x_{2k}$. Po indukcijski predpostavki tako velja

$$\mathrm{ucat}^1(f) \leq 1 + \mathrm{ucat}^1(f-u) \leq 1 + (n-1) = n.$$

$\square$

Iz zgornje trditve sledi, da je $\mathrm{ucat}^1(f) < \infty$. Oglejmo si sedaj definicijo totalne variacije, pojma, ki nam bo pomagal pri kasnejši utemeljitvi izračuna unimodalne kategorije za $f \in \mathcal{D}$.

Definicija 8. *Totalna variacija* funkcije ene spremenljivke $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je

$$TV_a^b(f) = \sup_{P \in \mathcal{P}} \left(\sum_{i=1}^{n_P - 1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \right).$$

S $\mathcal{P}$ smo označili vse končne delitve intervala $[a, b]$, z n_P pa število točk delitve P.

V posebnem bomo pri izračunu unimodalne dekompozicije za $f \in \mathcal{D}$ potrebovali oceno iz naslednje trditve.

Trditev 9. *Če je f monotona na $[a, b]$, je $TV_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$.*

Dokaz: Označimo delilne točke, ki nastopajo v dani delitvi P intervala $[a, b]$, s $P = \{x_i\}_{i=1}^{n_P}, a = x_1 < x_2 < \ldots < x_{n_P} = b$.

Če je f na intervalu $[x_i, x_{i+1}]$ naraščajoča, je $|f(x_{i+1}) - f(x_i)| = f(x_{i+1}) - f(x_i)$. V primeru, da je f na intervalu $[a, b]$ naraščajoča, tako velja

$$\begin{aligned} TV_a^b(f) = \sup_{P \in \mathcal{P}} \left(\sum_{i=1}^{n_P - 1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \right) = \\ = \sup_{P \in \mathcal{P}} \left(f(x_2) - f(x_1) + f(x_3) - f(x_2) \ldots + f(x_{n_P}) - f(x_{n_P - 1}) \right) \\ = \sup_{P \in \mathcal{P}} \left(f(x_{n_P}) - f(x_1) \right) = f(b) - f(a). \end{aligned}$$

Če pa je f na $[x_i, x_{i+1}]$ padajoča, velja $|f(x_{i+1} - f(x_i)| = f(x_i) - f(x_{i+1})$. V primeru, da je f na $[a, b]$ padajoča, velja

$$TV_a^b(f) = f(a) - f(b) = |f(b) - f(a)|.$$

To dokažemo na podoben način kot v primeru, ko je f naraščajoča. □

Poglejmo si, kakšna je totalna variacija funkcije $f \in \mathcal{D}$ med dvema točkama, v katerih f doseže lokalna minimuma. Pri tem bomo zopet privzeli oznake z začetka tega poglavja.

Trditev 10. *Totalna variacija $f \in \mathcal{D}$ na intervalu $[x_{2i}, x_{2j}]$, kjer je $i < j$, je enaka*

$$TV_{x_{2i}}^{x_{2j}}(f) = -n_i + m_i + m_i - n_{i+1} \ldots - n_{j-1} + m_{j-1} + m_{j-1} - n_j.$$

Dokaz: Trditev dokažimo z indukcijo na $j - i$.

Oglejmo si najprej primer, ko je $j = i + 1$. V tem primeru je totalna variacija f na intervalu $[x_{2i}, x_{2j}]$ enaka

$$TV_{x_{2i}}^{x_{2j}}(f) = TV_{x_{2i}}^{x_{2i+2}}(f) =$$

$$\sup_{P \in \mathcal{P}} \left(\sum_{y_i < x_{2i+1}} |f(y_{i+1}) - f(y_i)| + \sum_{x_{2i+1} \leq y_i} |f(y_{i+1}) - f(y_i)| \right) = *.$$

Tu smo z y_i označili delilne točke P. Podobno kot v dokazu trditve 9 lahko obe vsoti nekoliko razpišemo, saj je funkcija f na intervalu $[x_{2i}, x_{2i+1}]$ naraščajoča, na intervalu $[x_{2i+1}, x_{2i+2}]$ pa padajoča.

$$* \leq \sup_{P \in \mathcal{P}} (-n_i + f(y_{k-1}) + |f(y_k) - f(y_{k-1})| + f(y_k) - n_{i+1}) = \sup_P (\star)$$

Tu smo z y_k označili najmanjši tak y_i, da velja $y_i \geq x_{2i+1}$. Tak y_k brez škode za splošnost obstaja.

Sedaj velja

$$\star \leq \begin{cases} -n_i + 2f(y_k) - n_{i+1}, & \text{če } f(y_k) \geq f(y_{k-1}) \\ -n_i + 2f(y_{k-1}) - n_{i+1}, & \text{sicer} \end{cases}.$$

V vsakem primeru je

$$\star \leq -n_i + 2m_i - n_{i+1}.$$

To velja, saj je m_i maksimum funkcije f na tem intervalu. Zgornja meja je dosežena, če delitev P vsebuje točko x_{2i+1}. Enakost za $j = i + 1$ je tako dokazana.

Napravimo sedaj indukcijski korak. Vsoto podobno kot v primeru $j = i + 1$ razbijemo na dva dela. Za prvi del vzamemo interval $[x_{2i}, y_k]$, kjer je y_k največji tak y_i, da velja $y_k \leq x_{2j-2}$, za drugi interval pa vzamemo $[y_k, x_{2j+2}]$. Po podobnem računu kot v primeru $j = i + 1$ dokažemo enakost iz trditve. □

Poglejmo si naslednjo definicijo.

Definicija 9. Denimo, da imamo za $f \in \mathcal{D}$ dano unimodalno dekompozicijo $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$. Potem je množica $U \subset \operatorname{supp}(X)$ *množica prosta maksimuma*, če ne vsebuje nobenega globalnega maksimuma funkcij u_i za $i = 1, 2, \ldots, n$.

Iz te definicije sledi, da so na vsaki komponenti za povezanost množice proste maksimuma U vsi sumandi unimodalne 1-dekompozicije za funkcijo f monotoni, saj je vsak sumand u_i unimodalen in je tako na vsakem intervalu $I \subset \operatorname{supp}(u_i)$, ki ne vsebuje globalnega maksimuma, monoton po trditvi 4. Iz te opazke sledi naslednja trditev.

Trditev 11. *Naj bo $f \in \mathcal{D}$ in naj bo interval (x_{2i}, x_{2j}) množica prosta maksimuma za dano unimodalno dekompozicijo $(u_1, \ldots, u_n)$, potem velja*

$$n_i - m_i + n_{i+1} - m_{i+1} \ldots - m_{j-2} + n_{j-1} - m_{j-1} + n_j \geq 0.$$

Dokaz: Ker je interval (x_{2i}, x_{2j}) množica prosta maksimuma in povezan, je vsak izmed sumandov unimodalne 1-dekompozicije na tem intervalu monoton. Iz trditve 10 tako za vsak $k = 1, \ldots, n$ sledi

$$TV_{x_{2i}}^{x_{2j}}(u_k) = |u_k(x_{2i}) - u_k(x_{2j})|.$$

Iz trditve 10 sledi, da je totalna variacija funkcije f na (x_{2i}, x_{2j}) enaka

$$TV_{x_{2i}}^{x_{2j}}(f) = -n_i + m_i + m_i - n_{i+1} \ldots - n_{j-1} + m_{j-1} + m_{j-1} - n_j.$$

Desno stran zgornje enačbe na krajše zapišemo kot

$$TV_{x_{2i}}^{x_{2j}} = 2\left(\sum_{k=i}^{j-1} m_k - n_k\right) + (n_i - n_j).$$

Po drugi strani pa vemo, da velja

$$\sum_{l=1}^{n} u_l(x) = f(x).$$

Sedaj dobimo

$$\begin{aligned} TV_{x_{2i}}^{x_{2j}}(f) &= \sup_{P\in\mathcal{P}}\left(\sum_{k=0}^{N_P-1} |f(y_{k+1}) - f(y_k)|\right) \\ &= \sup_{P\in\mathcal{P}}\left(\sum_{k=0}^{N_P-1}\left|\sum_{l=1}^{n} u_l(y_{k+1}) - \sum_{l=1}^{n} u_l(y_k)\right|\right) = \\ &= \sup_{P\in\mathcal{P}}\left(\sum_{k=0}^{N_P-1}\left|\sum_{l=1}^{n}(u_l(y_{k+1}) - u_l(y_k))\right|\right) = *. \end{aligned}$$

Opazimo, da so velikosti indeksnih množic po katerih seštevamo in seštevanci, končna števila. Na tem mestu uporabimo trikotniško neenakost in potem zamenjamo vrstni red seštevanja. Tako dobimo

$$\begin{aligned} * \leq \sup_{P\in\mathcal{P}} \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{N_P-1} |u_l(y_{k+1}) - u_l(y_k)|\right) = \\ \sup_{P}\left(\sum_{l=1}^{n} |u_l(x_{2i}) - u_l(x_{2j})|\right). \end{aligned}$$

Ponovno uporabimo trikotniško neenakost in dejstvo, da je $f(x_{2i}) = n_i$ in $f(x_{2j}) = n_j$. Dobimo

$$* \leq \sup_{P\in\mathcal{P}}\left(\sum_{l=1}^{n} |u_l(x_{2i})| + |u_l(x_{2j})|\right) = n_j + n_i.$$

Dokazali smo, da pri danih pogojih velja

$$TV_{x_{2i}}^{x_{2j}}(f) = 2\left(\sum_{k=i}^{j-1} m_k - n_k\right) + (n_i - n_j) \leq n_i + n_j,$$

oziroma ekvivalentno

$$\sum_{k=i}^{j-1}(n_k - m_k) + n_j \geq 0.$$

$\square$

Poglejmo si na osnovi rezultata prejšnje trditve motivirano definicijo.

Definicija 10. Denimo, da imamo dano funkcijo $f \in \mathcal{D}$. Uporabimo oznake z začetka razdelka. Če je za dan interval (x_{2i}, x_{2j}) kršena neenakost

$$\sum_{k=i}^{j} n_k - \sum_{k=i}^{j-1} m_i \geq 0,$$

tak interval imenujemo *interval vsiljenega maksimuma.*

Iz definicije sledi, da interval vsiljenega maksimuma I nikoli ne more biti množica prosta maksimuma. To po definiciji množice proste maksimuma pomeni, da na vsakem intervalu vsiljenega maksimuma vsaj en sumand iz poljubne unimodalne 1-dekompozicije za $f \in \mathcal{D}$ doseže globalni maksimum.

Trditev 12. *Naj bo dana funkcija $f \in \mathcal{D}$ in naj bo $I = (x_{2i}, x_{2j})$ interval vsiljenega maksimuma. Naj bo dan interval J, za katerega velja $I \subset J$, oblike $J = (x_{2k}, x_{2l})$. Potem je J interval vsiljenega maksimuma.*

Dokaz: Oglejmo si primer, ko je $x_{2i} = x_{2k}$ in $x_{2j} < x_{2l}$. Primera $x_{2k} < x_{2i}$ in $x_{2j} = x_{2l}$ ter $x_{2k} < x_{2i}$ in $x_{2j} < x_{2l}$ sta namreč zelo podobna. S S_I označimo izraz $S_I = \sum_{t=i}^{j-1}(n_t - m_t) + n_j$.

Poglejmo si izraz

$$\sum_{t=i}^{l-1}(n_t - m_t) + n_l = \sum_{t=i}^{j-1}(n_t - m_t) + (n_j - m_j) + \sum_{t=j+1}^{l-1}(n_t - m_t) + n_l =$$

$$= S_I - m_j + \sum_{t=j+1}^{l-1}(n_t - m_t) + n_l = S_I + \sum_{t=j+1}^{l-1}(-m_{t-1} + n_t).$$

Ker je I interval vsiljenega maksimuma, je S_I manjši od nič, vsak člen v preostalem delu vsote pa je negativen, saj je $m_{t-1} > n_t$ za $t \in \{j+1, j+2, \ldots, l\}$. Torej tudi J zadošča želeni neenakosti in je tako interval vsiljenega maksimuma. $\square$

V naslednji trditvi je podana ocena $\mathrm{ucat}^1(f)$ za dano $f \in \mathcal{D}$. Ta nam bo pomagala pri dokazu pravilnosti algoritma za izračun unimodalne 1-dekompozicije funkcije f.

Trditev 13. *Naj bo $f \in \mathcal{D}$. Denimo, da imamo družino M disjunktnih intervalov izsiljenega maksimuma. Potem velja, da je*

$$|M| \leq \mathrm{ucat}^1(f).$$

Dokaz: Vsak interval $J \in M$ zato, ker ne more biti množica prosta maksimuma, vsebuje globalni maksimum vsaj enega izmed sumandov unimodalne 1-dekompozicije funkcije f. Intervala $J, I \in M$, za katera velja $I \neq J$, pa sta disjunktna. Neenakost tako očitno velja. $\square$

Poglejmo si sedaj dokaj preprost in učinkovit algoritem za izračun najmanjše unimodalne $1-$dekompozicije ter posledično unimodalne kategorije funkcije $f \in \mathcal{D}$, po trditvi 5 pa s tem tudi vseh drugih unimodalnih $p-$kategorij, kjer $p > 0$.

Algoritem 1 Izračun $\mathrm{ucat}^1(f)$ za dano funkcijo $f \in \mathcal{D}$, ki maksimume doseže v točkah iz M, ekstreme pa v točkah iz E

$\alpha := 0$; $u_0 := 0$; $g_0 := f$; $y_0 := \min M$; $z_0 := y_0$
while $g_\alpha \neq 0$ **do**
  $\alpha := \alpha + 1$
  $y_\alpha := z_{\alpha-1}$
  $u_\alpha := g_{\alpha-1}$, če $x \leq y_\alpha$
  $u'_\alpha(x) := \min(f'(x), 0)$, če$x > y_\alpha$
  $u_\alpha(x) := \max(u_\alpha(x), 0)$
  $z_\alpha := \max(\mathrm{supp}(u_\alpha))$
  if $z_\alpha \in E$ **then**
    $z_\alpha = \min\{m \in M : m > z_\alpha\}$
  end if
  $g_\alpha := g_{\alpha-1} - u_\alpha$
end while
return α

Opomnimo, da je vrstica $u'_\alpha(x) = \min(f'(x), 0)$ mišljena le za primer, ko je odvod f mogoče izračunati. V splošnem pa to vrstico nadomestimo z nekaj pogojnimi stavki. Na intervalu $[x_{2k}, x_{2k+1}]$ je $u_\alpha(x) = u_\alpha(x_{2k})$. Na intervalu $[x_{2k+1}, x_{2k+2}]$ pa je $u_\alpha(x) = f(x) - (f(x_{2k+1}) - u_\alpha(x_{2k+1}))$. Popravljena verzija algoritma, v kateri je problem v omenjeni vrstici rešen z definicijo dodatne funkcije, je predstavljena spodaj.

Izračun $\mathrm{ucat}^1(f)$ za dano funkcijo $f \in \mathcal{D}$, ki maksimume doseže v točkah iz M, ekstreme pa v točkah iz E

$\alpha := 0$; $u_0 := 0$; $g_0 := f$; $y_0 := \min M$; $z_0 := y_0$
while $g_\alpha \neq 0$ **do**
  $\alpha := \alpha + 1$
  $y_\alpha := z_{\alpha-1}$
  $u_\alpha := \begin{cases} g_{\alpha-1}, & \text{če } x \leq y_\alpha \\ \mathrm{funk}(x, g_{\alpha-1}, y_\alpha, E), & \text{sicer} \end{cases}$
  $z_\alpha := \max(\mathrm{supp}(u_\alpha))$
  if $z_\alpha \in E$ **then**
    $z_\alpha = \min\{m \in M : m > z_\alpha\}$
  end if
  $g_\alpha := g_{\alpha-1} - u_\alpha$
end while
return α

$\mathrm{funk}(t, \phi, \alpha_0, E)$

$\alpha := \alpha_0$; $\nu := \phi$; $\beta = \phi(\alpha)$; $\delta = 0$; $n = 0$
while $\beta > 0$ **do**
  $\alpha' = \mathrm{naslednji}(\alpha, E)$
  if $\lceil n/2 \rceil == 0 \pmod 2$ **then**
    $\nu(x) := \begin{cases} \nu(x), & (x \leq \alpha) \vee (x \geq \alpha') \\ \phi(x) - \delta, & x \in (\alpha, \alpha') \end{cases}$
    $\beta := \phi(\alpha') - \delta$
  else
    $\nu(x) := \begin{cases} \nu(x), & (x \leq \alpha) \vee (x \geq \alpha') \\ \beta, & \text{sicer} \end{cases}$
    $\delta := \phi(\alpha') - \beta$
  end if
  $\alpha := \alpha'$
  $n := n + 1$
end while
return $\max(\nu(t), 0)$

Če si ogledamo psevdokodo, vidimo, da ta algoritem deluje tako, da naše sumande v unimodalni 1-dekompoziciji za začetno funkcijo $f \in \mathcal{D}$ konstruiramo enega po enega.

Konstrukcijo posamične funkcije v unimodalni dekompoziciji (tu ji recimo unimodalni sumand), ki jo vrne algoritem, dobimo na naslednji način Začnemo na skrajnem levem koncu nosilca in sledimo naši funkciji vse dokler le ta narašča. Ko pa funkcija začne padati, pričnemo postopati tako, da ko začetna funkcija pada, pada tudi naš unimodalni sumand (in to enako hitro), ko začetna funkcija narašča, pa naš unimodalni sumand ohranja konstantno vrednost. S tem postopkom prenehamo, ko naš postopek spreminjanja unimodalnega sumanda nad $\mathrm{supp}(f)$ doseže 0. Na tej točki od f odštejemo dobljeni unimodalni sumand, dobljeno vrednost prepišemo v f in postopek ponovimo.

Zgornji postopek za f pa ponavljamo vse dokler f ni identično enaka 0.

Na spodnjih slikah je tako prikazan potek algoritma za neko, našim pogojem ustrezno funkcijo.

Utemeljimo, da ta algoritem za dano funkcijo $f \in \mathcal{D}$ resnično vrne najmanjšo možno unimodalno 1-dekompozicijo za f.

Izrek 14. *Zgornji algoritem nam za funkcijo $f \in \mathcal{D}$ vrne najmanjšo možno unimodalno 1-dekompozicijo za f.*

Dokaz: Z U označimo množico vseh unimodalnih funkcij, ki jo vrne zgornji algoritem. Dokazati moramo $|U| = \mathrm{ucat}^1(f)$.

Najprej bomo za vsako unimodalno funkcijo u_α v unimodalni dekompoziciji funkcije f poiskali interval izsiljenega maksimuma, ki je z intervali izsiljenega maksimuma, ki pripadajo ostalim funkcijam v tej unimodalni dekompoziciji, disjunkten.

Za u_α vzamemo interval $I_\alpha = (a_\alpha, b_\alpha)$, kjer sta a_α, b_α točki oblike $x_{2i}, i \in \mathbb{N}$, za kateri pa velja še, da je $a_\alpha = \min(\mathrm{supp}(u_\alpha))$, b_α pa je najmanjši x_{2i}, večji od točke kjer u_α doseže svoj maksimum (ta je enaka x_{2j+1} za $j \in \mathbb{N}$). To je res interval vsiljenega maksimuma, saj velja

$$M = \max_{x \in I_\alpha} u_\alpha(x) = \sum_{i=k_a}^{k_b-1} m_i - n_i > n_{k_b} = f(b_\alpha),$$

kjersta k_a, k_b taki števili, da velja $a_\alpha = x_{2k_a}$ in $b_\alpha = x_{2k_b}$.

Intervala I_α za u_α, I_β za u_β sta disjunktna, če velja $\alpha \neq \beta$. To je res zato, ker se na $\alpha-$tem koraku algoritma funkcija g (posodobljena funkcija f) ujema z u_α na I_α, kar pa pomeni, da je g v naslednjem koraku nad I_α enaka 0.

Definirajmo sedaj $M = \{I_\alpha | u_\alpha \in U\}$. Po trditvi 13 tako velja

$$|M| \leq \mathrm{ucat}^1(f).$$

Vemo, da je U unimodalna dekompozicija, zato velja

$$\mathrm{ucat}^1(f) \leq |U| = |M|.$$

□

Mimogrede tako sledi še, da algoritem za $f \in \mathcal{D}$ svoje delo opravi v končnem času, saj je po trditvi 8 $\mathrm{ucat}^1(f) < \infty$.

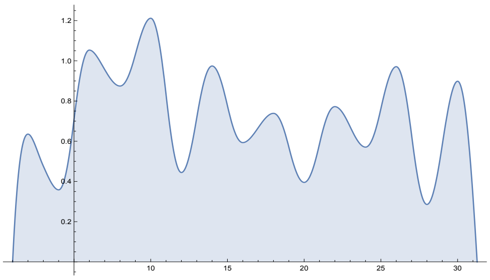
Sedaj lahko vse dosedanje ugotovitve iz tega razdelka strnemo v naslednji izrek.

Izrek 15. *Če za $f \in \mathcal{D}$ uporabimo takšne oznake kot v začetku tega razdelka, velja*

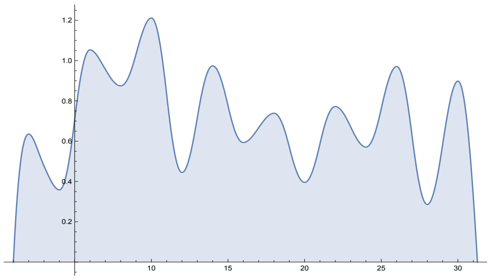
$$\mathrm{ucat}^1(f) = \max\{|M| \mid M \textit{ množica disjunktnih intervalov izsiljenega maksimuma}\}.$$

Dokaz: Očitna posledica 14. □

Poglejmo si, kako je z izračunom unimodalne $\infty-$kategorije. Izračun te je nekoliko preprostejši kot izračun unimodalne 1-kategorije.



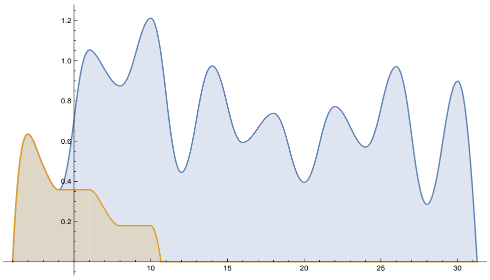
Graf funkcije $f \in \mathcal{D}$



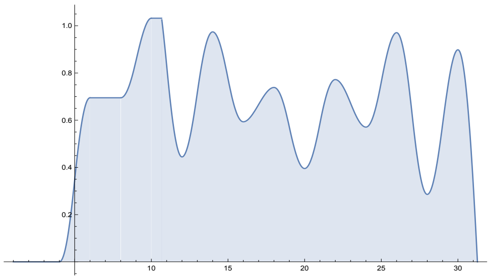
Graf f

$f \in \mathcal{D}$; $M = \{2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30\}$

$\alpha := 0$; $u_0 := 0$; $g_0 := f$; $y_0 := 3$; $z_0 := 3$



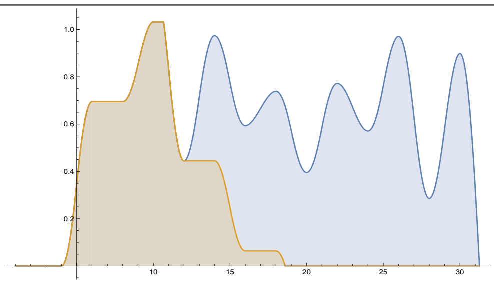
Graf f in u_1



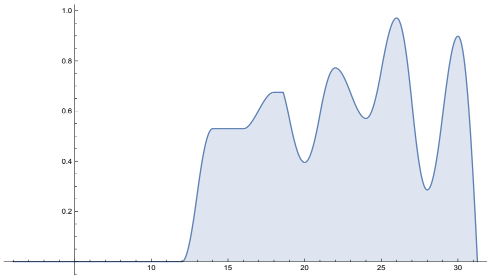
Graf g_1

$\alpha := 1$; $y_1 := 2$; $u_1 := \ldots$; $z_1 \approx 10.6714136196$

$g_1 := f - u_1$;



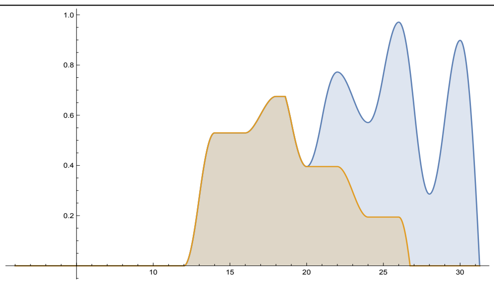
Graf g_1 in u_2



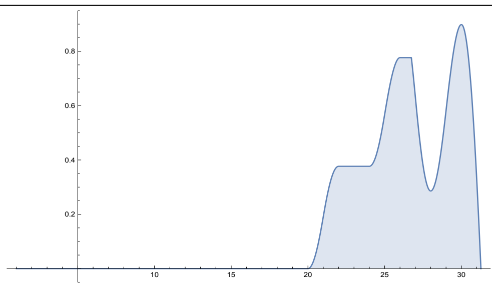
Graf g_2

$\alpha := 2$; $y_2 := 10$; $u_2 := \ldots$; $z_2 := \ldots$

$g_2 := g_1 - u_2$



Graf g_2 in u_3

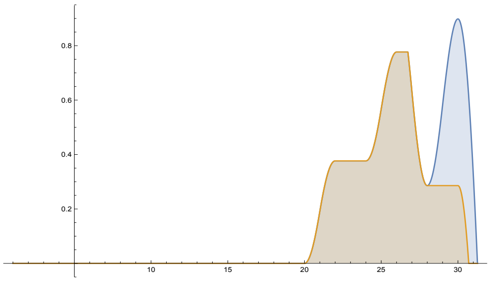


Graf g_3

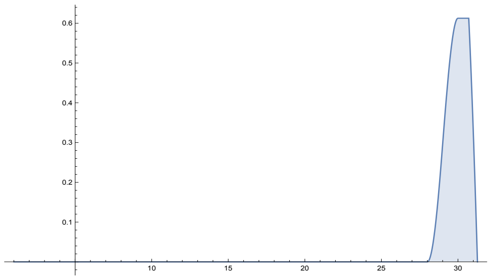
$\alpha := 3$; $y_2 := 10$; $u_3 := \ldots$; $z_3 := \ldots$

$g_3 := g_2 - u_3$

H



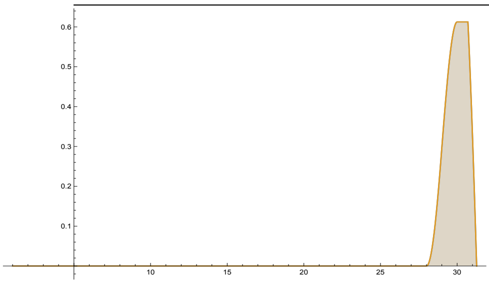
Graf g_3 in u_4



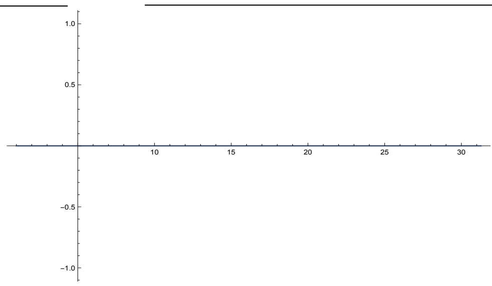
Graf g_4

$\alpha := 4;\ y_4 := 10;\ u_4 := \ldots;\ z_4 := \ldots$

$g_4 := g_3 - u_4$



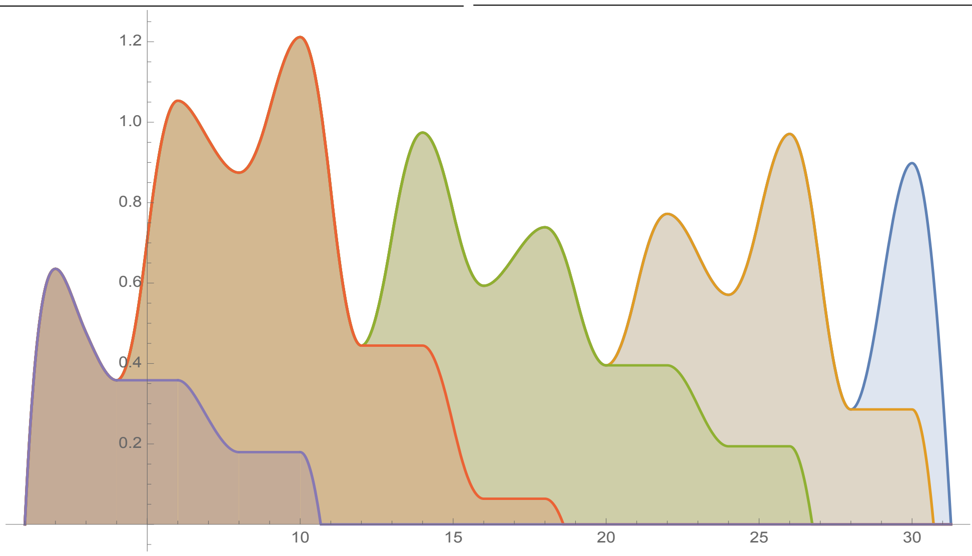
Graf g_4 in u_5



Graf g_5

$\alpha := 5;\ y_5 := 10;\ u_5 := \ldots;\ z_5 := \ldots$

$g_5 := g_4 - u_5$



Graf dobljene dekompozicije

Izrek 16. *Za vsak $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, ki ima izolirane lokalne ekstreme, je* $\mathrm{ucat}^\infty(f)$ *enaka številu lokalnih maksimumov.*

Dokaz: Unimodalna $\infty-$kategorija je po definiciji najmanjše tako število, da obstaja unimodalna $\infty-$dekompozicija s toliko sumandi za funkcijo f, to je tak nabor funkcij $\{u_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$, da velja

$$f(x) = \max_{\alpha \in \Lambda} (u_\alpha(x)), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tako lahko vidimo, da bi popravljen algoritem, ki nam vrne unimodalno $\infty-$ dekompozicijo funkcije $f \in \mathcal{D}$ z izoliranimi lokalnimi ekstremi izgledal podobno kot algoritem 1. Tak algoritem je tako

Algoritem 2 Izračun $\mathrm{ucat}^\infty(f)$ in unimodalne $\infty-$ dekompozicije za dano funkcijo $f \in \mathcal{D}$, ki lokalne minimume na $\mathrm{supp}(f)$ doseže v točkah iz M

$\alpha := 0$; $u_0 := 0$; $y_0 := \min \mathrm{supp}(f)$; $z_0 := y_0$;
$M := M \cup \{\max(\mathrm{supp}(f)), \max(\mathrm{supp}(f)) + 1\}$
while $z_\alpha < \max M$ **do**
  $\beta = \alpha + 1$
  $y_\beta := \min\{m \in M | m \geq z_\alpha\}$
  $z_\beta := \min\{\{m \in M | m > y_\beta\} \cup \{maxM + 1\}\}$

$$u_\beta(x) := \begin{cases} f(z_\alpha)\frac{x - y_\alpha}{z_\alpha - y_\alpha}, & \text{če } x \in [y_\alpha, z_\alpha] \\ f(x), & \text{če } x \in (z_\alpha, y_\beta) \\ f(y_\beta)\frac{z_\beta - x}{z_\beta - y_\beta}, & \text{če } x \in [y_\beta, z_\beta] \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$$

  $\alpha := \beta$
end while
return α

Algoritem vsakemu paru sosednjih lokalnih minimumov priredi unimodalni sumand, ki se na intervalu med tema dvema minimuma ujema s funkcijo f, izven tega intervala pa linearno pada v skladu z zahtevo po unimodalnosti. Tako sledi, da ker se mora v vsakem lokalnem maksimumu f ujemati z nekim unimodalnim sumandom iz unimodalne dekompozicije, noben unimodalni sumand pa se ne more ujemati z f v več kot eni izmed točk, kjer f doseže lokalni maksimum, da je $\mathrm{ucat}^\infty(f)$ enaka številu lokalnih maksimumov funkcije f. □

V primeru, ko gledamo unimodalne $p-$dekompozicije funkcij iz $\mathcal{D}$, velja še naslednja trditev.

Trditev 17. *Naj bo $f \in \mathcal{D}$. Za poljubni števili $p, q \in (0, \infty], p < q$ velja*

$$\mathrm{ucat}^p(f) \leq \mathrm{ucat}^q(f).$$

Dokaz: V primeru, da je $q = \infty$ po trditvi 7 velja

$$\mathrm{ucat}^\infty(f) = \mathrm{ucat}^\infty((x \mapsto x^p) \circ f) = \mathrm{ucat}^\infty(f^p).$$

Funkcija $x \mapsto x^p$ je homeomorfizem poltraka $[0, \infty)$. Po lemi 5 pa velja

$$\mathrm{ucat}^p(f) = \mathrm{ucat}^1(f^p).$$

Po prejšnjem izreku velja, da je $\mathrm{ucat}^\infty(f^p)$ enaka številu lokalnih maksimumov funkcije f^p. Trditev 8 pa nam pove, da je $\mathrm{ucat}^p(f) = \mathrm{ucat}^1(f^p)$ manjša ali enaka številu lokalnih maksimumov funkcije f^p. Tako velja

$$\mathrm{ucat}^p(f) \leq \mathrm{ucat}^q(f).$$

V primeru, kjer je $q < \infty$, pa trditev dokažemo tako, da opazimo, da velja $\mathrm{ucat}^1(f^p) \leq \mathrm{ucat}^1(f^q)$. Pomagamo si s trditvijo 5. Za funkcijo $f \in \mathcal{D}$ uporabimo iste oznake kot na začetku tega razdelka in vzemimo poljuben interval izsiljenega maksimuma $I_p = (x_{2i}, x_{2j})$ za funkcijo f^p. Ker tako f^p kot tudi f^q dosežeta lokalne maksimume in minimume v istih točkah kot funkcija f, velja

$$\sum_{k=i}^{j} n_k^p - \sum_{k=i}^{j-1} m_k^p < 0.$$

V primeru, da je kakšen od n_k enak nič, denimo $n_l = 0$ (BŠS $l < j$) velja tudi $\sum_{k=i}^{l-1} n_k^q - m_k^q < 0$ in $\sum_{k=l}^{j-1} n_{k+1}^q - m_k^q < 0$. Če ti dve neenakosti seštejemo, dobimo

$$\sum_{k=i}^{j} n_k^q - \sum_{k=i}^{j-1} m_k^q < 0.$$

To pomeni, da je I_P interval vsiljenega maksimuma tudi za funkcijo f^q.

V primeru, da je število n_k različno od nič za vsak $k \in \{i, i+1, \ldots, j\}$, definirajmo funkcijo $\phi : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ na naslednji način

$$\phi(t) = \sum_{k=i}^{j} \left(\frac{n_k^p}{n_m^p}\right)^t - \sum_{k=i}^{j-1} \left(\frac{m_k^p}{n_m^p}\right)^t.$$

Z m smo tu označili indeks najmanjšega n_k za $k \in \{i, i+1, \ldots, j\}$. Število n_m je po predpostavki različno od nič. Poglejmo si odvod funkcije ϕ

$$\begin{aligned}
\phi'(t) &= p\left(\sum_{k=i}^{j} \log\left(\frac{n_k}{n_m}\right)\left(\frac{n_k^p}{n_m^p}\right)^t - \sum_{k=i}^{j-1} \log\left(\frac{m_k}{n_m}\right)\left(\frac{m_k^p}{n_m^p}\right)^t\right) \\
&= p\left(\sum_{k=i}^{m-1} \log\left(\frac{n_k}{n_m}\right)\left(\frac{n_k^p}{n_m^p}\right)^t - \sum_{k=i}^{m-1} \log\left(\frac{m_k}{n_m}\right)\left(\frac{m_k^p}{n_m^p}\right)^t\right) + \\
& p\left(\sum_{k=m+1}^{j} \log\left(\frac{n_k}{n_m}\right)\left(\frac{n_k^p}{n_m^p}\right)^t - \sum_{k=m}^{j-1} \log\left(\frac{m_k}{n_m}\right)\left(\frac{m_k^p}{n_m^p}\right)^t\right).
\end{aligned}$$

V zadnji vrstici smo upoštevali, da velja $\log(1) = 0$. Opazimo, da za vsak $k = i, \ldots, j-1$ za $t > 0$ velja

$$\log\left(\frac{n_k}{n_m}\right)\left(\frac{n_k^p}{n_m^p}\right)^t < \log\left(\frac{m_k}{n_m}\right)\left(\frac{m_k^p}{n_m^p}\right)^t,$$

$$\log\left(\frac{n_{k+1}}{n_m}\right)\left(\frac{n_{k+1}^p}{n_m^p}\right)^t < \log\left(\frac{m_k}{n_m}\right)\left(\frac{m_k^p}{n_m^p}\right)^t.$$

Sledi, da je za $t \geq 1$ velja $\phi'(t) < 0$. To pomeni, da funkcija ϕ pada. Če za t vzamemo $t = \frac{q}{p}$ (očitno velja $t > 1$) in pomnožimo z n_m^q, dobimo

$$\phi(t) = \sum_{k=i}^{j} n_k^q - \sum_{k=i}^{j-1} m_k^q < 0.$$

To pomeni, da je I_p tudi interval izsiljenega maksimuma za funkcijo f^q. Vsak nabor disjunktnih intervalov izsiljenega maksimuma za funkcijo f^p je tako tudi nabor disjunktnih intervalov izsiljenega maksimuma za funkcijo f^q. To pomeni, da velja

$$\mathrm{ucat}^p(f) = \mathrm{ucat}^1(f^p) \leq \mathrm{ucat}^1(f^q) = \mathrm{ucat}^q(f).$$

□

S pomočjo zgornje trditve lahko tako za dano $p-$normo že s pomočjo algoritma 1 in algoritma 2, uporabljenih na f, ocenimo unimodalno $p-$kategorijo za f.

LITERATURA

[1] Y. Baryshnikov in R. Ghrist, *Unimodal Category and Topological Statistics*, dostopno na `http://www.math.upenn.edu/~ghrist/preprints/unimodalsnote.pdf` [ogled 10. februarja 2014].

[2] Y. Baryshnikov in R. Ghrist, *Topological Unimodal Decompositions*, *Prosojnice s predavanj na MASS*, dostopno na `http://www.math.uiuc.edu/~ymb/ps/unimass_ho.pdf` [ogled 10. februarja 2014].

[3] Y. L. Hickok, J. Villatoro, X. Wang, *Unimodal Category of 2-Dimensional Distributions (Full)*, dostopno na `http://www.math.uiuc.edu/~xwang105/unimodal.pdf` [ogled 10. februarja 2014].

[4] J. Mrčun, *Topologija*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **44**, DMFA – založništvo 2008.

[5] D. Govc, *Counterexample to Monotonicity of the Unimodal Category*, *Zapiski pri seminarju iz geometrijske topologije* [ogled 23. oktobra 2014].