ODVISNOST PERIODE IN GIBANJA NIHALA OD AMPLITUDE ZA PRIMER FIZIČNEGA NIHALA

MATEJ LOGAR

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Članek obravnava nihanje fizičnega nihala za poljubno amplitudo. Najprej so predstavljeni eliptični integrali. V nadaljevanju je obravnavan problem fizičnega nihala pri velikih amplitudah. Sprva je pokazano, da je v prvem redu nihajni čas neodvisen od amplitude in je gibanje nihala harmonično nihanje. Nato sta, ob upoštevanju višjih popravkov, izračunama tako odvisnost nihajnega časa od amplitude, kot tudi časovni potek rešitve. Na koncu je rešen še problem, v katerem ni uporabljena nobena aproksimacija.

PERIOD AND PENDULUM'S MOTION DEPENDANCY ON AMPLITUDE FOR PHYSICAL PENDULUM

Period dependancy on amplitude is discussed. First, elliptic integrals are presented. Further on, the problem of physical pendulum with large amplitudes is solved. It is shown that period is not a function of amplitude and that the motion corresponds to harmonic oscilation in harmonic approximation for potential. Later on, higher order terms for period and pendulum's motion as a function of time are derived. Finally, exact physical pendulum problem is solved.

1. Uvod

Z nihali imamo v fiziki veliko opravka. Posebej pogosto obravnavamo problem harmoničnega oscilatorja. Ta model je v fiziki zelo pomemben, saj opisuje gibanje mase v kateremkoli potencialu z neničelnim drugim odvodom v ravnovesni legi, ki jo malo zmaknemo iz te točke. Na problem harmonskega oscilatorja se prevedejo številni problemi v mehaniki, fiziki trdne snovi, fiziki polja idr. Na tak način ponavadi obravnavamo tudi najbolj osnovna nihala, npr. fizično nihalo. Privzamemo, da so odmiki dovolj majhni in upoštevamo Taylorjev razvoj $\sin(x) \approx x$ do prvega reda (oz. v potencialu do drugega). Seveda je zanimivo tudi vprašanje, kako se obnaša fizično nihalo, ko odmiki iz ravnovesne lege niso majhni. V tem primeru, bomo najprej poskusili s Taylorjevim razvojem do tretjega reda, torej $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!}$, kasneje pa bomo izračunali še točno rešitev. Da bodo bralci računu lažje sledili, bomo na začetku predstavili eliptične integrale, ki jih bomo potrebovali za reševanja problema.

2. Eliptični integrali

Eliptični integrali so se izvirno pojavili pri reševanju problemov, povezanih z ločno dolžino elipse. Prva sta jih preučevala Giulio Fagnano in Leonhard Euler okrog leta 1750[**?**]. V moderni matematiki eliptični integral definiramo kot funkcijo, ki jo lahko zapišemo v obliki

$$f(x) = \int_c^x R(t, \sqrt{P(t)})\,\mathrm{d}\,t\,, \tag{1}$$

kjer je R racionalna funkcija, ki vsebuje vsaj eno liho potenco drugega argumenta, P polinom 3. ali 4. stopnje z različnimi ničlami in c konstanta. Ob upoštevanju zgornjih omejitev je integral nemogoče zapisati z elementarnimi funkcijami[**?**, **?**].
Poznamo tri vrste eliptičnih integralov. Vse funkcije oblike (**??**) lahko zapišemo s kombinacijo teh treh in elementarnih funkcij.

2.1 Eliptični integral prve vrste

Nepopolni eliptični integral prve vrste definiramo kot

$$F(\phi, k) = \int_0^{\phi} \frac{\mathrm{d}\,\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)}}\,, \tag{2}$$

kjer mora veljati $0 < k^2 < 1$ in je F funkcija dveh spremenljivk. Tako zapisanemu integralu pravimo trigonometrična ali Legendrova oblika. S pomočjo substitucij $u = \sin(\theta)$ in $x = \sin\phi$ dobimo Jacobijevo različico

$$F(x; k) = \int_0^{x} \frac{\mathrm{d}\,u}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}}\,. \tag{3}$$

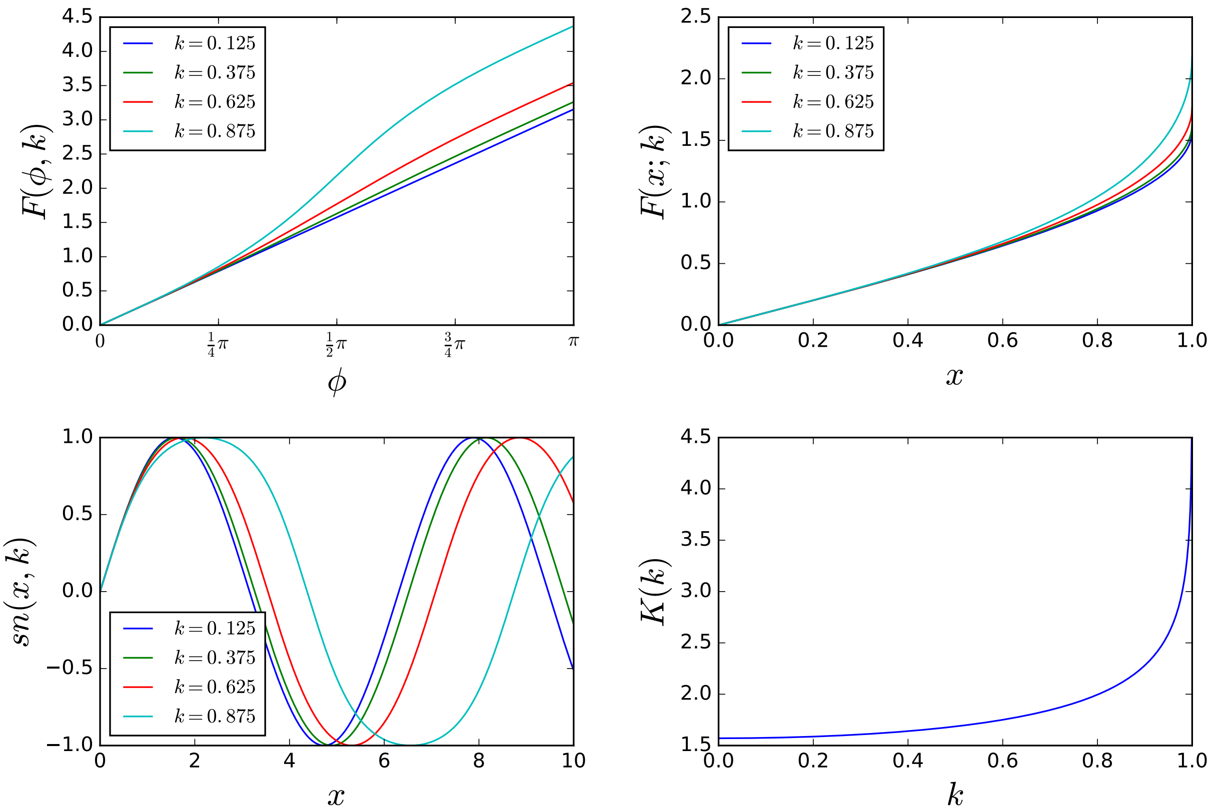
Inverzno funkcijo *sinus amplitudinis*[**?**] glede na enačbo (**??**) definiramo kot

$$F(\mathrm{sn}(u, k); k) = u\,. \tag{4}$$

Popolni eliptični integral prve vrste dobimo, če v enačbi (**??**) postavimo zgornjo mejo na $\frac{1}{2}\pi$ ali v enačbi (**??**) na 1

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\,\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}} = \int_0^{1} \frac{\mathrm{d}\,u}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}}\,. \tag{5}$$

To je torej funkcija ene same spremenljivke in je, kot bomo videli, tesno povezana s periodo nihala. Potrebno je opozoriti, da se v literaturi namesto parametra k včasih pojavlja $m = k^2$.



Slika 1. Zgornji sliki prikazujeta Legendrov in Jacobijev eliptični integral $F(\phi, k)$ in $F(x; k) = F(\arcsin(x), k)$ za nekaj različnih parametrov k. Spodaj levo je inverzna funkcija Jacobijevega eliptičnega integrala $\mathrm{sn}(x, k)$ in spodaj desno popoln eliptični integral prve vrste.

3. Fizično nihalo

V tem delu bomo izračunali periodo in časovno odvisno rešitev za gibanje fizičnega nihala z veliko amplitudo. Na začetku bomo problem rešili s harmonično aproksimacijo potenciala, ki za velike amplitude seveda ni upravičena. Skozi to enostavno vajo bomo predstavili postopek, ki ga bomo kasneje uporabili tudi pri izračunu višjih popravkov in točne rešitve.

3.1 Izbira sistema in notacija

ϕ - kot, ki meri odmik nihala od ravnovesne lege,
l - razdalja od osišča do težišča,
J - vztrajnostni moment nihala okrog osišča,
g - gravitacijski pospešek,
m - masa nihala,
α - amplituda,
τ_0 - nihajni čas v harmoničnem približku,
τ - nihajni čas,
t - čas,
T - kinetična energija,
V - potencialna energija,
W - celotna energija.

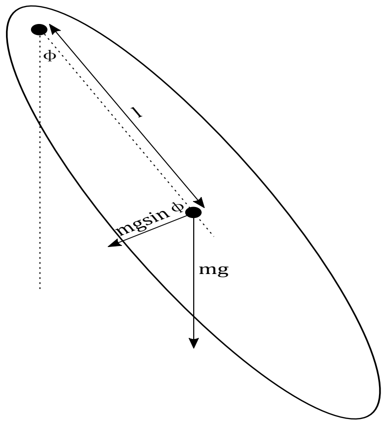


Tabela 1. Predstavitev izbranega sistema in notacije.

3.2 Harmonični približek

Najprej zapišimo izraza za kinetično in potencialno energijo fizičnega nihala v harmoničnem približku

$$T = \frac{1}{2}J\dot{\phi}^2 \tag{6}$$

$$V = \frac{1}{2}mgl\phi^2\,. \tag{7}$$

Od tod sledi za celotno energijo

$$W = \frac{1}{2}J\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}mgl\phi^2\,. \tag{8}$$

Gibanje nihala začnemo tako, da ga zmaknemo iz ravnovesne lege za kot α in nato spustimo. Zakon o ohranitvi energije se glasi

$$J\dot{\phi}^2 + mgl\phi^2 = mgl\alpha^2\,. \tag{9}$$

Od tod izrazimo $\dot{\phi}$

$$\dot{\phi} = \sqrt{\frac{mgl}{J}(\alpha^2 - \phi^2)}\,. \tag{10}$$

Ločimo spremenljivke in integriramo

$$\int_0^{\phi} \frac{\mathrm{d}\,\phi'}{\sqrt{\alpha^2 - \phi'^2}} = \sqrt{\frac{mgl}{J}} \int_0^t \mathrm{d}\,t' + C \tag{11}$$

$$\arcsin\frac{\phi}{\alpha} = \sqrt{\frac{mgl}{J}}t + C\,. \tag{12}$$

Upoštevamo robni pogoj $\phi(0) = \alpha$ in zapišemo rešitev

$$\phi(t) = \alpha \cos\left(\sqrt{\frac{mgl}{J}} t\right) . \tag{13}$$

Od tod lahko razberemo znan izraz za nihajni čas

$$\tau_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} . \tag{14}$$

3.3 Razvoj potenciala do 4. reda

Uporabili bomo popolnoma enak postopek, le izraz za potencial bo oblike

$$V = \frac{1}{2} mgl(\phi^2 - \frac{1}{12}\phi^4) . \tag{15}$$

Zapišemo energijski zakon

$$\frac{1}{2}J\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}mgl(\phi^2 - \frac{1}{12}\phi^4) = \frac{1}{2}mgl(\alpha^2 - \frac{1}{12}\alpha^4) . \tag{16}$$

S tako obliko potenciala pridemo do integrala

$$\int_0^\phi \frac{\mathrm{d}\,\phi'}{\sqrt{\frac{1}{2}(\alpha^2 - \phi'^2) - \frac{1}{24}(\alpha^4 - \phi'^4)}} = \sqrt{\frac{2mgl}{J}} \int_0^t \mathrm{d}\,t' . \tag{17}$$

Integral s pomočjo substitucij $u' = \frac{\phi'}{\alpha}$, $k = \sqrt{\frac{\alpha^2}{12-\alpha^2}}$ in $z = \sqrt{\frac{mgl}{J}}\sqrt{\frac{12-\alpha^2}{12}}t'$ prevedemo na Jacobijevo obliko eliptičnega integrala prve vrste[**?**]

$$\int_0^u \frac{\mathrm{d}\,u'}{\sqrt{(1-u'^2)(1-k^2u'^2)}} = F(u,k) = z + C . \tag{18}$$

Tako smo dobili funkcijsko odvisnost $t(\phi)$. Zanima nas inverzna funkcija

$$u = \mathrm{sn}(z + C, k) \tag{19}$$

$$\phi = \alpha\,\mathrm{sn}\left(\sqrt{\frac{mgl}{J}}\sqrt{\frac{12-\alpha^2}{12}}t + C, \sqrt{\frac{\alpha^2}{12-\alpha^2}}\right) . \tag{20}$$

Upoštevamo še začetni pogoj $\phi(0) = \alpha$

$$1 = \mathrm{sn}\left(C, \sqrt{\frac{\alpha^2}{12-\alpha^2}}\right)$$

$$\Longrightarrow$$

$$C = K\left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{12-\alpha^2}}\right) . \tag{21}$$

Za račun nihajnega časa se vrnimo na enačbo (**??**) in jo integrirajmo čez četrt nihaja

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,u'}{\sqrt{(1-u'^2)(1-k^2u'^2)}} = K(k) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{mgl}{J}}\sqrt{\frac{12-\alpha^2}{12}}\tau . \tag{22}$$

Sedaj lahko s pomočjo popolnega eliptičnega integrala prve vrste zapišemo nihajni čas kot [1]

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{12}{12-\alpha^2}} K\left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{12-\alpha^2}}\right) . \tag{23}$$

[1]Ker je popolni eliptični integral prve vrste definiran samo za $k \in (-1, 1)$, ta izraz obstaja samo za $\alpha < \sqrt{6}$ oz. v stopinjah $\alpha_{max} \approx 140^\circ$.

3.4 Točna rešitev

Tokrat bomo računali s točnim potencialom

$$V = mgl(1-\cos\phi)\,. \tag{24}$$

Zapišemo energijski zakon

$$\frac{1}{2}J\dot{\phi}^2 + mgl(1-\cos\phi) = mgl(1-\cos\alpha)\,. \tag{25}$$

Od tod lahko izrazimo $\dot{\phi}$

$$\dot{\phi} = \sqrt{\frac{2mgl}{J}(\cos\phi - \cos\alpha)}\,. \tag{26}$$

Z uporabo trigonometrične zveze za dvojne kote pridemo do integrala

$$\int_0^{\phi} \frac{\mathrm{d}\,\phi'}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\phi'}{2}}} = 2\sqrt{\frac{mgl}{J}}\int_0^t \mathrm{d}\,t' + \tilde{C}\,. \tag{27}$$

Zopet bi radi integral prevedli na standardno Jacobijevo obliko. Tokrat to napravimo s substitucijami $u = \frac{\sin\frac{\phi'}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, $k = \sin\frac{\alpha}{2}$ in $z = \sqrt{\frac{mgl}{J}}t'$

$$\int_0^u \frac{\mathrm{d}\,u'}{\sqrt{(1-u'^2)(1-k^2u'^2)}} = z + C\,. \tag{28}$$

Od tod lahko z inverzno funkcijo spet izrazimo časovni potek

$$\begin{aligned} u &= \mathrm{sn}(z+C,k) \\ \phi &= 2\arcsin\left[\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{sn}\left(\sqrt{\frac{mgl}{J}}t + C, \sin\frac{\alpha}{2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{29}$$

Ponovno upoštevamo robni pogoj $\phi(0) = \alpha$

$$\alpha = 2\arcsin(\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{sn}(C,\sin\frac{\alpha}{2})) \tag{30}$$

$$1 = \mathrm{sn}(C,\sin\frac{\alpha}{2}) \tag{31}$$

$$\Longrightarrow \tag{32}$$

$$C = K(\sin\frac{\alpha}{2})\,. \tag{33}$$

Za nihajni čas moramo enačbo (**??**) integrirati čez četrtino nihaja

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,u'}{\sqrt{(1-u'^2)(1-k^2u'^2)}} = K(k) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{mgl}{J}}\tau\,. \tag{34}$$

Od tu lahko izrazimo nihajni čas kot

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{2}{\pi}K(\sin\frac{\alpha}{2})\,. \tag{35}$$

3.5 Komentar

Če popolnega eliptičnega integrala ne bi poznali, to ne bi bil velik problem, saj račun za nihajni čas ni preveč zahteven. Ko imamo Legendrovo obliko eliptičnega integrala (do katere pridemo iz enačbe (??) s substitucijami $\sin u = \frac{\sin\frac{\phi'}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, $k = \sin^2\frac{\alpha}{2}$ in $z = \sqrt{\frac{mgl}{J}}t'$), enačbo integriramo po četrtini nihaja

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2 u)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\,u\,. \tag{36}$$

Ta integral znamo izvrednotiti, saj lahko izraz pod integralom razvijemo v potenčno vrsto in ga členoma integriramo. Tako dobimo [2]

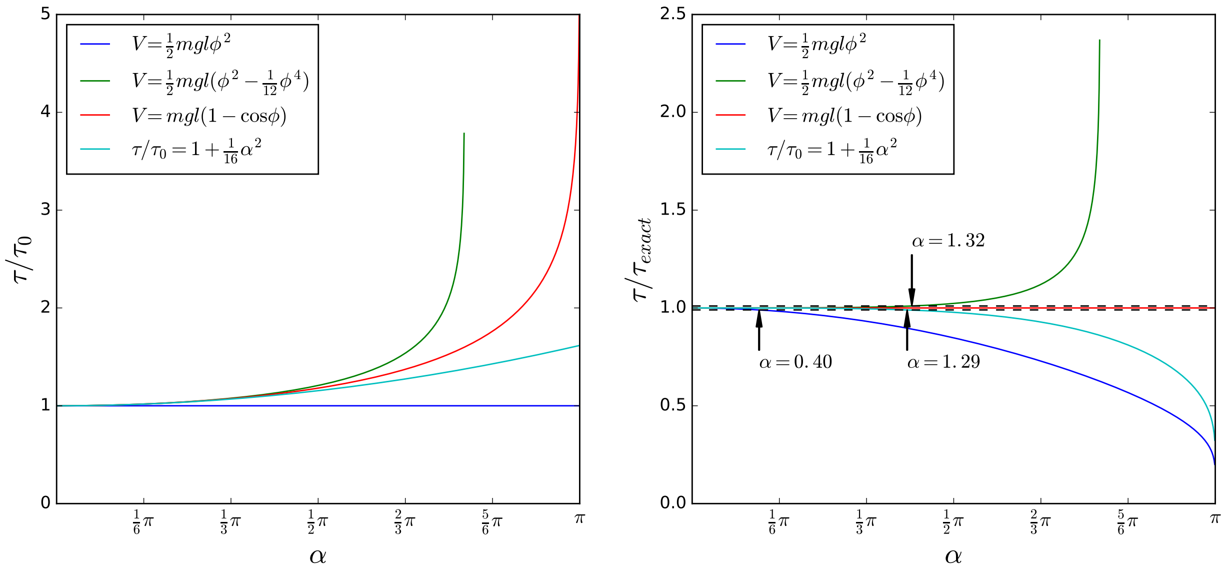
$$\begin{aligned}\frac{\tau}{\tau_0} &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\sin^{2n}\frac{\alpha}{2}\sin^{2n}u\,\mathrm{d}\,u\\ \frac{\tau}{\tau_0} &= 1+(\frac{1\times 3}{2\times 4})^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+(\frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6})^2\sin^4\frac{\alpha}{2}\ldots\end{aligned} \tag{37}$$

Če razvijemo še sinus, ki nastopa v rezultatu, dobimo precej enostaven prvi popravek za izračun nihajnega časa pri velikih amplitudah

$$\frac{\tau}{\tau_0} = 1+\frac{1}{16}\alpha^2+\ldots \tag{38}$$

4. Primerjava rezultatov

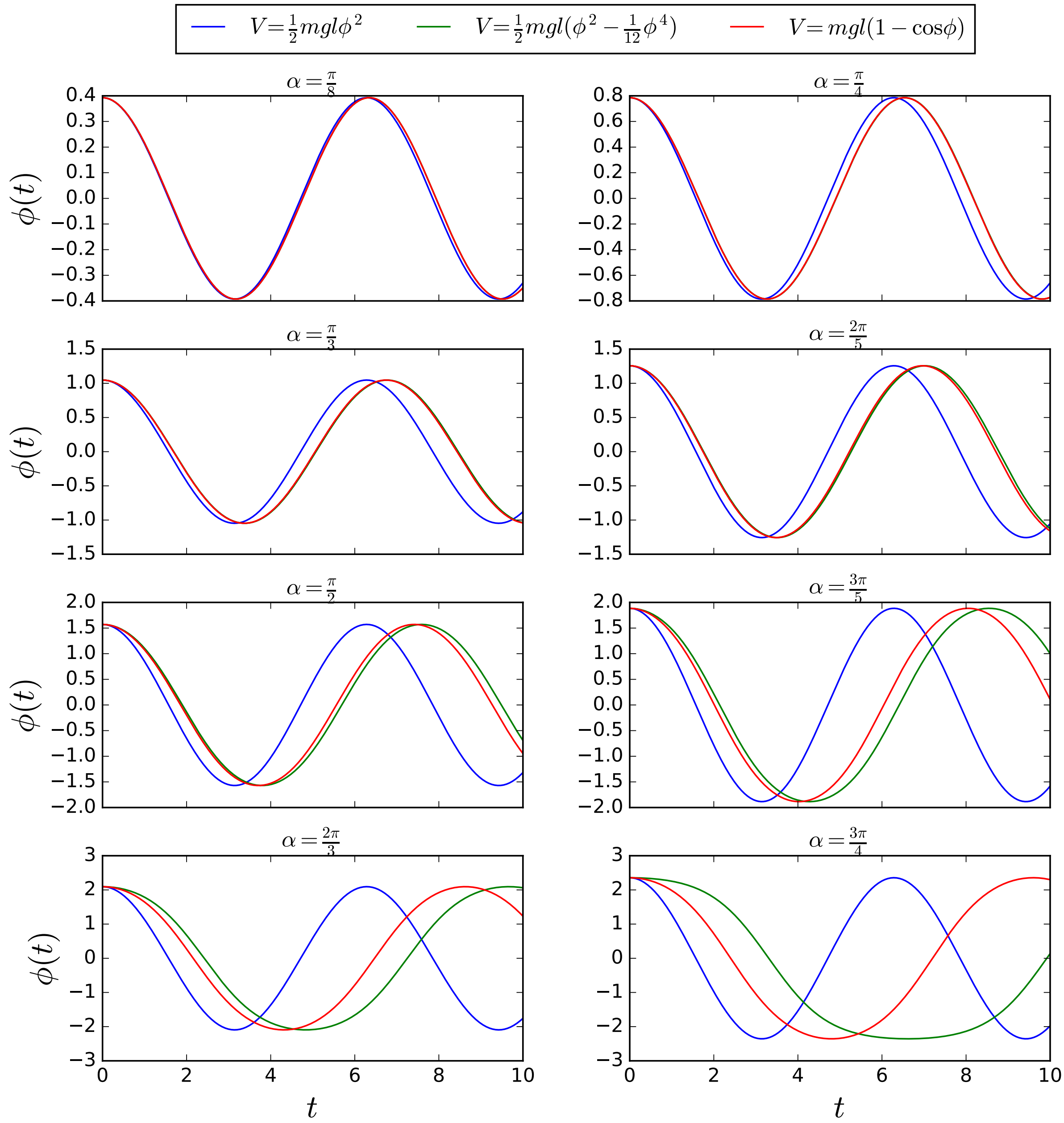
Najprej si poglejmo različne približke za nihajni čas v odvisnosti od amplitude.



Slika 2. Levi graf prikazuje nihajne čase, kot smo jih izračunali, torej v enotah harmoničnega nihajnega časa. Desni graf prikazuje periode, normirane glede na točen nihajni čas. Črtkani črti sta od točne rešitve oddaljeni 0.01. Dokler ležijo grafi narisanih funkcij znotraj tega pasu, se rezultat razlikuje od točnega za največ 1%. Označene so tudi mejne vrednosti, do katerih to velja.

Oglejmo si še, kako različni modeli opišejo gibanje nihala pri nekaj amplitudah.

[2] Po razvoju dobimo koeficiente brez kvadrata, po integraciji $\sin^{2n} u$ dobimo enak člen še enkrat, pomnožen s $\frac{\pi}{2}$ (integral sinusa izvrednotimo s pomočjo Eulerjeve beta funkcije in zato ni problematičen).



Slika 3. Grafi prikazujejo gibanje nihala pri različnih začetnih amplitudah.

Opazimo, da harmonični približek zelo hitro odpove. Že na prvem grafu namreč opazimo razliko med tem modelom in točno rešitvijo. Model, v katerem smo potencial razvili do 4. reda, se seveda obnese veliko bolje. Da gre za dve črti in ne za eno samo, začnemo iz grafa razpoznavati pri $\alpha \approx \frac{2\pi}{5}$. Iz grafov lahko razberemo, da tudi ta model pri velikih amplitudah ni ustrezen.

5. Zaključek

Gibanje idealnega nihala znamo dobro opisati neodvisno od amplitude. Izračunali smo časovno odvisno rešitev in periodo za dve aproksimaciji: harmonični potencial in potencial razvit do 4. reda. Prav tako smo izračunali točno rešitev za fizično nihalo s poljubno amplitudo. Ugotovili smo, da je model za periodo s harmoničnim potencialom pri natančnosti 1% ustrezen do začetnega odmika $\alpha = 0.4$, model, v katerem smo potencial razvili do 4. reda, pa do $\alpha \approx 1.3$.

LITERATURA

[1] Weisstein, Eric W., *Elliptic Integral*, from MathWorld–A Wolfram Web Resource, [ogled 6.2.2016], dostopno na: http://mathworld.wolfram.com/EllipticIntegral.html.

[2] I. Kuščer, A. Kodre, *Matematika v fiziki in tehniki*, DMFA (1994).

[3] *Wikipedia - Elliptic integral* , [ogled 6.2.2016], dostopno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic_integral.