

# TURBULENCA

URBAN MUR

Fakulteta za matematiko in fiziko  
Univerza v Ljubljani

V članku je predstavljen fizikalni pojav v toku tekočin – turbulenca. Po uvodu je v prvem poglavju opisanih nekaj fizikalnih osnov turbulence. Sledi obravnava teorije Kolmogorova, ki je osnovna teorija za opis tega pojava. Teorijo nato nadgradimo z multifraktalnim pristopom, ki je danes uveljavljen, moderen pristop za opis in razumevanje turbulence. Drugi del članka je posvečen merjenju turbulence, in sicer uporabi Dopplerjevega efekta za merjenje Lagrangeve turbulence in premisleku o uporabi helija v eksperimentih.

## TURBULENCE

The article presents a physical phenomenon in the flow of fluids – the turbulence. After general introduction an elementary introduction of turbulence is presented. Theory of Kolmogorov, which is the basic theory to describe this phenomenon, is addressed. Next the multifractal approach, which is well established, modern approach for a description and understanding of turbulence, is introduced. The second part of the article is dedicated to selected measurements of turbulence, where the use of Doppler effect for measuring the Lagrangian turbulence and use of helium in turbulence experiments is presented.

### 1. Uvod

Beseda turbulenca pomeni zmedo in nemir, v fiziki pa je pojav, ki opisuje nekatere kompleksne in nepredvidljive fluktuacije v gibanju tekočin in je prisoten povsod okoli nas. Besedo turbulenca je v današnjem pomenu verjetno prvi uporabil Leonardo da Vinci, ki je opazoval vrtince v reki [1]. Turbulenco zaznamo kot hitro spreminjanje hitrosti delcev in tlaka tekočine v prostoru in času. V industriji je pomembna predvsem pri aerodinamiki avtomobilov, saj ravno vrtinci v turbulenci povečujejo ali zmanjšujejo upor [2]. Pri oblikovanju letalskih kril je potrebno upoštevati turbulentne efekte, ki vplivajo na vzgon [3]. Prav tako je pomembna v gradbeništvu in urbanistiki. Vplivi turbulence so namreč odločilni pri razširjanju onesnaženja v zraku [4]. V naravi turbulenca igra odločilno vlogo pri formiranju vremenskih pojavov [5], pri urejanju tokov v oceanih in celo pri gibanju živih organizmov [6]. Zemljina tekoča sredica je turbulentna in ravno turbulenca ohranja zemeljsko magnetno polje [7]. Pomembna je v astronomiji [8], omenjajo pa jo celo pri analizi borznih trgov [9]. Turbulenco lahko opazimo vsak dan pri zlivanju mleka v kavo ali pri opazovanju cigaretne dima. Omeniti velja še, da obstaja tudi termalna turbulenca, ki ima nekoliko drugačne lastnosti kot turbulenca v toku tekočin. Ta je pomembna predvsem pri konvektivnem prenosu toplote, mešanju in difuziji, ko termični efekti niso več zanemarljivi. Za opis te vrste turbulence uporabljamo drugačna brezdimenzijska števila, kot za opis turbulence v toku tekočin [8].

Čeprav je turbulenca prisotna povsod okoli nas in je pomembna na tako različnih področjih, ostaja precej nerazumljen pojav. Temu botrujejo predvsem zapletene enačbe gibanja, ki onemogočajo globlje analitično reševanje. Turbulenca je eden izmed fizikalnih pojavov, za katerega točno poznamo enačbe gibanja, vendar jih ne znamo rešiti. Rešitve Navier-Stokesove enačbe z večanjem Reynoldsovega števila postajajo vse bolj kaotične [10]. Nosilci napredka so tako eksperimenti in numerične simulacije, ki pa v preteklosti niso bili mogoči, vsaj ne v takšnem obsegu in natančnosti kot v zadnjih desetletjih. Zaradi kaotičnega, spreminjajočega in neponavljajočega se vedenja turbulence večina teorije temelji na statistiki. Izračunane količine pogosto povprečujemo v prostoru in času, opazujemo pa različne verjetnostne porazdelitve [11].

Razsikave na področju turbulence lahko v grobem razdelimo v 2 kategoriji. Tiste v prvi se sprašujejo o nastanku in o napovedovanju turbulence. Ena glavnih nalog te kategorije je tudi

iskanje univerzalne teorije, ki bi opisala turbulenco. Druga kategorija se ukvarja z modeliranjem in z bolj praktičnimi lastnostmi turbulence, kot so njen vpliv na upor, mešanje, prenos toplote in izgorevanje [7]. Fizikalno ozadje turbulence, o katerem govori ta članek, spada v prvo kategorijo, z drugo pa se ukvarjajo znanosti bolj inženirske narave in se jim tokrat nisem posvečal.

V članku sem najprej predstavil nekaj fizikalnih osnov, ki so pomembne za razumevanje nadaljnjih obravnav turbulence. Nato sem se posvetil teoriji Kolmogorova, ki opiše sestavo turbulence, prenašanje energije in prisotnost vrtincev različnih dimenzij v toku. Eksperimenti in simulacije so pokazali, da teorija Kolmogorova ne drži popolnoma, zato se je v zadnjih časih uveljavil bolj moderen opis turbulence z multifraktali, ki sem ga predstavil v četrtem poglavju. V drugem delu sem predstavil še 2 sodobni tehniki merjenja turbulence, in sicer merjenje Lagrangeve turbulence z Dopplerjevim efektom in uporabo helija v eksperimentih.

## 2. Fizikalne osnove turbulence

Homogena in izotropna turbulenca pomeni, da je hitrostno polje statistično invariantno na rotacije in translacije. Osnovni zakon, ki se mu podrejajo tekočine, je Newtonov zakon za kontinuum. Za Newtonske tekočine, pri katerih je tenzor viskoznosti neodvisen od zunanjih napetosti in hitrosti, je to Navier-Stokesova enačba:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2 v, \quad (1)$$

kjer  $v$  predstavlja hitrost,  $p$  tlak,  $\nu$  pa kinematično viskoznost tekočine. Za nestisljive tekočine velja še  $\nabla \cdot v = 0$ , kar sledi iz ohranitve mase.

Vpeljati je potrebno tudi Reynoldsovo število, ki določa režim toka, torej, ali je tok laminaren ali turbulenten. Definiram:

$$Re = \frac{v_0 L}{\nu}, \quad (2)$$

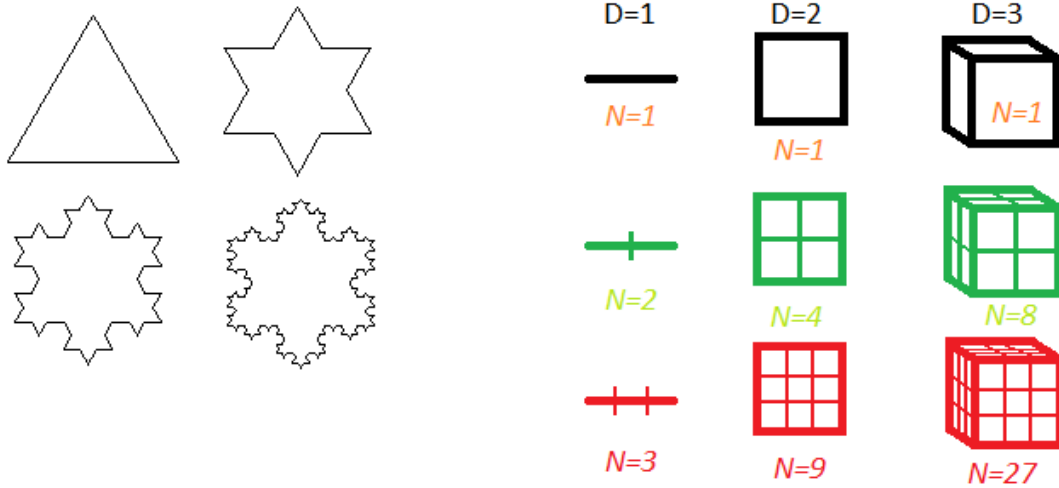
kjer sta  $v_0$  in  $L$  karakteristična hitrost in dimenzija za obravnavani tok. Z večanjem  $Re$  turbulentnost toka narašča. Reynoldsovo število je tudi merilo za podobnost. Različna tokova enake geometrije sta v dinamičnem smislu identična, če imata enako  $Re$ , ne glede na dimenzije ali viskoznost. Ravno ta lastnost omogoča preučevanje naravnih pojavov z eksperimenti na manjših velikostnih skalah, pri čemer ne smemo pozabiti na usklajevanje drugih brezdimenzijskih števil (Eulerjevo, Machovo, Freudejevo, ...).

V fizikalnem smislu  $Re$  predstavlja razmerje med inercialnimi in viskozni silami. Z drugimi besedami, predstavlja razmerje med kinetično energijo in disipacijo energije zaradi viskoznosti. Turbulenca se pojavi, ko zunanje sile presežejo zmožnost disipacije fluktuacij v tekočini, torej pri visokem  $Re$ , konkretno pri vrednostih  $Re \sim 2000$  za tok v cevi [7]. Kritična vrednost  $Re$ , kjer se pojavi turbulenca, je v splošnem odvisna od geometrije. V toku se začnejo pojavljati fluktuacije v obliki vrtincev različnih velikostnih redov.

Turbulenca je sestavljena iz vrtincev različnih dimenzij, število vrtincev posameznih dimenzij pa ni povsem naključno. V toku se pojavi veliko več vrtincev manjših dimenzij. Tako obnašanje v grobem razložimo s pomočjo fraktalov, na katerih temelji teorija Kolmogorova. Fraktali so matematični objekti, ki so statistično ali natančno samopodobni in vsebujejo poljubne podrobnosti na vsaki dimenziji [12]. Fraktalu priredimo fraktalno dimenzijo  $D$ :

$$N = \epsilon^{-D}, \quad (3)$$

kjer  $N$  pomeni število novonastalih manjših elementov fraktala v vsakem deležu  $\epsilon$  prvotnega elementa, v vsaki dimenziji. Pri tem morajo biti novonastali elementi podobni prvotnemu elementu. Teorijo si najlažje razložimo kar na konkretnem primeru daljic in Kochove snežinke na sliki 1.



**Slika 1.** Ko razdelimo daljico na 3 enake dele v vsaki dimenziji ( $\epsilon = \frac{1}{3}$ ), dobimo 3 daljice, ki so podobne prvotni daljici ( $N = 3$ ). Od tod sledi  $D = 1$ . Ko enako storimo v treh dimenzijah dobimo  $N = 27$  za  $\epsilon = \frac{1}{3}$ . Sledi  $D = 3$ . Za kochovo snežinko ob enaki delitvi 1 daljice, dobimo 4 nove daljice, torej  $\epsilon = \frac{1}{3}$ ,  $N = 4$ . Fraktalna dimenzija za Kochovo snežinko znaša  $D = 1.2619$  [13].

### 3. Teorija Kolmogorova, Eulerjev in Lagrangev opis

Zaradi kaotične in spremenljive narave pojava zahteva opis turbulence statističen pristop. Andrej Kolmogorov je leta 1941 postavil koncept opisa homogene, izotropne turbulence, ki temelji na kaskadnem pretakanju energije iz večjih k manjšim vrtincem. Princip je sicer pred njim osnoval že Richardson [14]. Teorijo na kratko imenujemo kar K41.

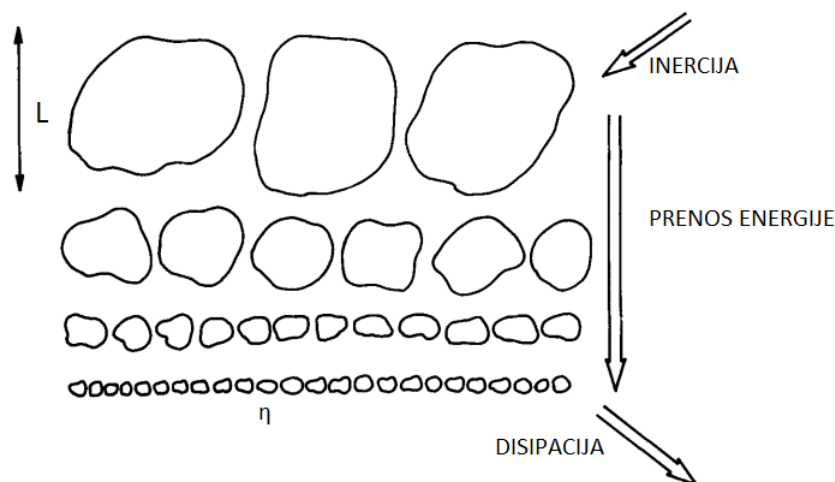
#### 3.1 Energijske kaskade

Turbulenca sestoji iz fluktuacij (vrtincev) različnih velikostnih redov. Največji so primerljivi z inercialno dimenzijo, to je zunanjo dimenzijo sistema, najmanjši pa so dovolj majhni, da jih ustavi viskoznost. Vsakemu velikostnemu redu vrtincev pripišemo lastno karakteristično hitrost in s tem lastno Reynoldsovo število. Veliki vrtinci imajo veliko  $Re$ , primerljivo z  $Re$  toka, z manjšanjem dimenzije vrtinca pa se  $Re$  manjša. Vsakemu vrtincu pripišemo tudi lastno časovno skalo, ki je sorazmerna njegovi dimenziji. Kinetično energijo posameznega vrtinca izračunamo iz njegove karakteristične hitrosti.

Veliki vrtinci v tridimenzionalnem toku so nestabilni, zato razpadejo. Ker je njihovo  $Re$  veliko, to po definiciji ustreza majhni viskoznosti. Disipacija energije, ki je direktna posledica viskoznih efektov, pri velikih dimenzijah nima vpliva, zato se energija prenese na manjše vrtince (slika 2). Proces se ponovi na manjših vrtincih in se ponavlja, dokler  $Re$  ne doseže velikostnega reda  $\sim 1$ . Na tem mestu postane viskoznost pomembna in pride do disipacije energije. Kinetična energija toka se pretvori v notranjo energijo. Dimenzijo, pri kateri se to zgodi, imenujemo dimenzija Kolmogorova in jo označimo z  $\eta$  [14]. Tako smo konstruirali energijsko kaskado ali stopničasto sestopanje energije. Pogled na vrtince v kaskadi spominja na obliko fraktala s konstantno fraktalno dimenzijo.

#### 3.2 Matematični zapis v Eulerjevi obliki

Turbulenco lahko opišemo na 2 načina, v 2 različnih koordinatnih sistemih. Lažje predstavljen in nekoliko bolj naraven je Eulerjev opis, kjer enačbe zapišemo v laboratorijskem sistemu. Drugo možnost opisa predstavlja Lagrangev formalizem, kjer opazujemo en sam delec tekočine, na



**Slika 2.** Shema kaskadnega sestopanja energije in manjšanja dimenzije vrtincev. Pri dimenziji, sorazmerni z zunanjo dimenzijo sistema  $L$  pride do inercije energije, ki se nato preko nelinearnih interakcij prenaša na vse manjše vrtince. Ko doseže dimenzija vrtincev dimenzijo Kolmogorova  $\eta$ , pride do pretvorbe kinetične energije v notranjo energijo. Vsi vrtinci so si med seboj podobni. Prirejeno po [15].

katerega je pritrjen inercialen koordinatni sistem. Za lažje razumevanje si bomo najprej ogledali enačbe v Eulerjevem zapisu, Lagrangev opis pa bom predstavil v naslednjem podpoglavju.

Kljub jasni predstavi energijske kaskade zgolj iz definicije  $Re$  ne moremo ugotoviti, kakšna je dimenzija najmanjših vrtincev in ali se z manjšanjem dimenzije vrtinca manjša tudi karakteristična hitrost. To opisuje teorija Kolmogorova, temelji pa na treh predpostavkah, dimenzijski analizi in eksperimentalnih podatkih. Najprej predpostavimo izotropijo, t.j. da so hitrosti vrtincev v vseh smereh enakovredne. Kolmogorov je predpostavil, da izotropija velja pri dimenzijah, manjših od inercialne dimenzije  $L$ , kjer je turbulenca lahko anizotropna, vendar se anizotropija izgubi tekom energijske kaskade. Podobno velja za obliko vrtincev. Pri dimenzijah manjših od inercialne dimenzije so si vrtinci različnih dimenzij med seboj podobni, kar se tiče statističnih lastnosti. Takšni vrtinci so torej univerzalni in neodvisni od zunanje oblike sistema, njihovo obnašanje pa določata zgolj viskoznost in tok vložene energije na enoto mase. Pojav imenujemo samopodobnost. Tretja predpostavka je, da je turbulenca homogena, torej da je kinetična energija vrtincev enaka povsod v prostoru [16].

Upoštevajoč zgornje predpostavke je Kolmogorov s pomočjo dimenzijske analize prišel do izraza za najmanjšo dimenzijo vrtincev, ki jih opazimo v toku. Ta dimenzija se po njem imenuje dimenzija Kolmogorova:

$$\eta = (\nu^3/\epsilon)^{\frac{1}{4}} = L \cdot Re^{-\frac{3}{4}}. \quad (4)$$

Odvisna je le od viskoznosti  $\nu$  in disipiranega energijskega toka na enoto mase  $\epsilon$ .<sup>1</sup> Slednji je enak toku prejete energije pri zunanjih dimenzijah, kar so potrdili tudi eksperimenti [7]. S pomočjo dimenzije  $\eta$  je Kolmogorov definiral območje ravnotežja, za katerega velja  $L \gg r \gg \eta$ , kjer je  $r$  karakteristična dimenzija vrtincev. S tem je kvantitativno definiral območje samopodobnosti, ki ga je predpostavil. V tem območju vrtinci ne čutijo vpliva zunanjih sil ali viskoznosti. Statistične lastnosti turbulence v tem območju so univerzalne, določa pa jih le energijski tok na enoto mase  $\epsilon$ . Spodnja meja območja je določena tako, da so  $Re$  vrtincev iz območja dovolj velika, da lahko zanemarimo viskoznost v enačbi (1). Večanje  $Re$  toka ne vpliva na disipacijo energije, ampak pomeni le manjšo dimenzijo Kolmogorova  $\eta$ . Z večanjem  $Re$  zato

<sup>1</sup>Z  $\epsilon$  sem prej že označil delež prvotnega elementa pri fraktalih. V teoriji Kolmogorava z isto črko označujemo energijski tok na enoto mase, zaradi konsistentnosti z literaturo sem obdržal enake oznake.

lahko povečamo območje ravnotežja, kar je zelo primerno za meritve pri eksperimentih.

Pri analizi turbulentnih tokov se pogosto uporabljajo korelacijske funkcije hitrosti reda  $p$ :

$$S_p(r) = \langle \delta v(r)^p \rangle \sim \epsilon^{\frac{p}{3}} r^{\frac{p}{3}} = (\epsilon r)^{\zeta(p)}, \quad (5)$$

ki so zgolj časovna povprečja različnih potenc fluktuacij hitrosti. Razliko hitrostnega polja med dvema točkama na razdalji  $r$  definiramo kot:

$$\delta v(\mathbf{r}) = (\mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{x})) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (6)$$

To količino uporabljamo zato, ker je lahko merljiva, recimo z anemometri na vročo žičko [8]. Ker je korelacijska funkcija statistična lastnost turbulence, naj bi bila v območju ravnotežja odvisna le od  $\epsilon$ , kar predstavlja srednji del enačbe (5). Odvisnost od  $r$  smo pripeljali v enačbo preko definicije razlike hitrostnega polja (6) in ni v nasprotju s predpostavko Kolmogorova o samopodobnosti.

Žal pa se izkaže, da teorija Kolmogorova ni v skladu z eksperimenti v opaznem delu faznega prostora. Ti namreč pokažejo, da eksponent  $\zeta(p)$  v korelacijski funkciji (5) ni linearna funkcija, kot predvideva K41. Pojav imenujemo nestalnost. Kot merilo za nestalnost uporabimo novo količino - monotonost, definirano kot:

$$\Gamma_p(r) = S_p(r)/S_2(r)^{\frac{p}{2}}. \quad (7)$$

Gre za razmerje korelacijskih funkcij reda  $p$  in 2. reda. Ta definicija je primerna zaradi primerjave z Gaussovo porazdelitvijo, monotonost 4. reda za Gaussovo funkcijo ima namreč konstantno vrednost  $\Gamma = 3$  [14]. Monotonost v turbulentnem toku narašča z manjšanjem dimenzije. Fizikalno podlago nestalnosti lažje razumemo skozi oči Lagrangevega formalizma.

### 3.3 Lagrangev opis

Kot že omenjeno, se v Lagrangevem opisu osredotočimo na točkast delec, ki se giblje v hitrostnem polju  $\mathbf{v}$ . Njegovo trajektorijo označimo z  $\mathbf{x}(t)$ . Enačbe teorije K41 se prepisujejo v

$$\eta \mapsto \tau_d = (\nu/\epsilon)^{\frac{1}{2}}, \quad (8)$$

$$\delta v(r) \mapsto \delta v(\tau) = |\mathbf{v}(t + \tau) - \mathbf{v}(t)|, \quad (9)$$

$$S_p(r) \mapsto S_p^L(\tau) = \langle \delta v(\tau)^p \rangle \sim (\epsilon \tau)^{\frac{p}{2}}, \quad (10)$$

$$\Gamma_p \mapsto \Gamma_p^L = S_p^L / (S_2^L)^{\frac{p}{2}}. \quad (11)$$

$\tau_d$  predstavlja časovno dimenzijo Kolmogorova,  $\tau$  časovno razliko med dvema točkama opazovanja,  $L$  v superskriptu pa je le oznaka za Lagrangevo obliko funkcije. Tako kot pri Eulerjevem opisu bi tudi v tem primeru morale veljati  $\Gamma_p^L = \text{konst.}$ , vendar tudi v tem primeru monotonost narašča. V Lagrangevem načinu opazimo celo večjo nestalnost kot v Eulerjevem. Pojav lahko pojasnimo z izračunom pospeška delca

$$a = \left| \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} \right| \sim \frac{\delta v(\tau_d)}{\tau_d}, \quad (12)$$

kjer smo pri drugem enačaju upoštevali dimenzijsko invariantnost. Eksperimenti pokažejo, da je pospešek ena najbolj nestalnih količin v turbulenci [11]. Opazimo namreč, da ima verjetnostna funkcija veliko večjo varianco od Gaussove funkcije. Monotonost pospeška močno naraste, če zmanjšamo  $\tau$ . Monotonost lahko razumemo tudi kot merilo za pogostost pojavljanja fluktuacij

hitrosti, večjih od standardne deviacije Gaussove porazdelitve. Eksperimenti so pokazali, da se pri verjetnostni porazdelitvi časovnih fluktuacij hitrosti pojavijo večji repi pri manjših časovnih dimenzijah, kjer monotonost narašča.

Nestalnost pospeška razložimo z občasnim prihodom navideznega delca tekočine v območja z izredno veliko vrtničnostjo  $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$ . Pospešek doseže vrednosti  $a \sim \omega^2 r_f$ , kjer je  $r_f$  presek takega območja. Navadno velja da je  $r_f$  velikostnega reda približno  $10\eta$ . Območja zavzemajo obliko filamenta - vlakna, ki se razteza lahko vse do zunanjih dimenzij sistema.

Obstoj takšnih vrtničnih filamentov dopušča možnost, da dimenzijska invarianca, opisana z enačbo (5), ne velja nujno, saj ne zajema opisa takšne nelinearne nestalne dinamike. Ker se filamenta raztezajo vse do zunanjih dimenzij in ker so preseki  $r_f$  približno velikostnega reda  $\eta$ , se pojavlja vprašanje, ali je sploh možen opis turbulence, ki bi bil neodvisen od zunanjega mehanizma in disipacijskih lastnosti [11].

Ugotovimo lahko, da teorija K41 ne opiše vseh statističnih pojavov v turbulenci, česar se je zavedal že sam Kolmogorov [7]. Boljšo napoved in nadgradnjo teorije K41 pa predstavlja multifraktalni pristop.

#### 4. Multifraktalni pristop

Multifraktalni pristop poudarja, da samopodobnost ni nujno globalna, ampak lahko velja le lokalno. Statistične lastnosti torej niso samopodobne v vseh točkah, temveč obstajajo posamezna območja, znotraj katerih velja samopodobnost.

V območju ravnotežja, kjer ni prispevkov viskoznosti, lahko zapišemo dimenzijske transformacije, na katere je Navier-Stokes-ova enačba (1) invariantna:

$$\mathbf{r} \mapsto \lambda \mathbf{r}, \quad \mathbf{v} \mapsto \lambda^h \mathbf{v}, \quad t \mapsto \lambda^{1-h} t. \quad (13)$$

Direktno iz (13) sledi še  $\epsilon \mapsto \lambda^{3h-1} \epsilon$ .  $\lambda$  predstavlja faktor, za katerega smo zmanjšali dimenzijo,  $h$  pa je skalirni eksponent. Statistične lastnosti opisanih količin so enake, če jih reskaliramo z omenjenim skalirnim eksponentom.

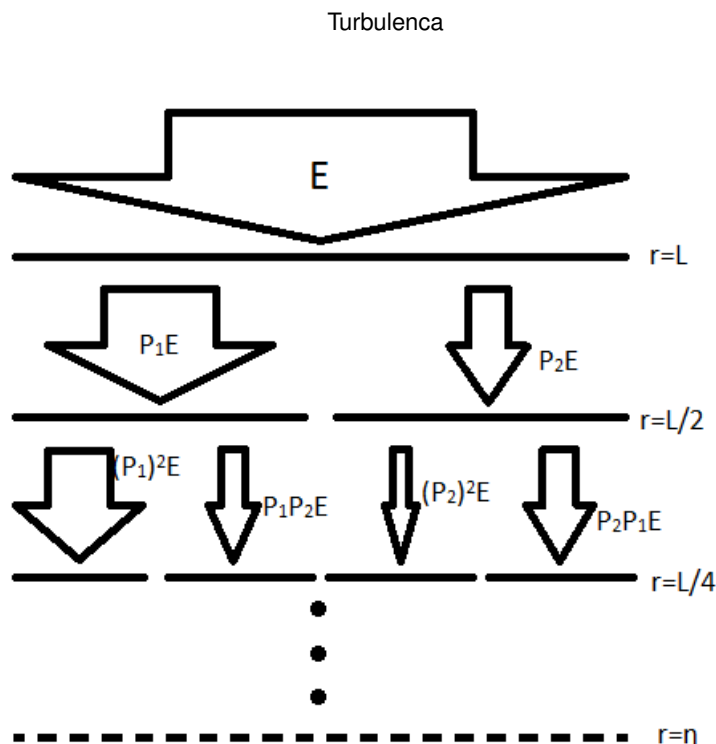
Bistvo multifraktalnega pristopa je, da obstaja več *različnih* vrednosti  $h$ , vsaka od njih pa se pojavlja z neko verjetnostjo  $P(h)$ . Turbulentni tok lahko torej obravnavamo kot superpozicijo različnih, dimenzijsko invariantnih porazdelitev, glej sliko 3. Novonastali manjši vrtinci nimajo nujno enako velike energije in s tem hitrosti, torej si niso vsi med seboj podobni.

Še vedno pa mora veljati tudi dimenzijska invariantnost pri povprečevanju preko vseh vrednosti  $h$ , torej na vsaki dimenziji dobimo enako razmerje hitrejših ali počasnejših vrtincev. Predpostavimo:

$$P(h) \sim r^{F(h)}, \quad (14)$$

kar pomeni, da velja dimenzijska invariantnost za verjetnostno porazdelitev  $P(h)$ ,  $F(h)$  pa predstavlja neko novo porazdelitev. Na vsakem dimenzijskem nivoju nastopi vsaka vrednost  $h$  z enako verjetnostjo. Če zapišemo funkcijo  $F(h)$  kot  $F(h) = 3 - D(h)$ , v funkciji  $D(h)$  prepoznamo fraktalno dimenzijo, definirano z enačbo (3). Modelu dodamo pridevnik multifraktalni, ker vsaka vrednost  $h$  prinaša s seboj svojo fraktalno dimenzijo  $D(h)$  in tako dobimo skupek večih fraktalov. Seveda funkcija  $D(h)$  ni povsem pojubna, saj mora še vedno veljati  $\langle \epsilon \rangle = \text{konst.}$  preko vseh dimenzij kaskade, pri čemer povprečujemo po vseh  $h$ . Če nas zanima le limita majhnih dimenzij, lahko izvednotimo

$$S_p(r) \sim \int dr r^{ph+3-D(h)} \sim r^{\zeta(p)}, \quad (15)$$



**Slika 3.** Shema energijske kaskade v multifraktalnem pristopu. Ko večji vrtinec razpade na več vrtincev manjše dimenzije, si ti vrtinci niso nujno podobni med seboj, saj lahko odnesejo različne deleže energije in imajo tako različne hitrosti. Verjetnostna porazdelitev  $P(h)$  nam pove, kakšen delež vrtincev z določeno energijo se pojavi na nižji stopnji kaskade. Prirejeno po [17].

kjer integral teče po vseh možnih vrednostih  $h$ . Eksponent  $\zeta(p)$ , ki nastopa v korelacijski funkciji, lahko izrazimo z Legendrovo transformacijo:

$$\zeta(p) = \inf_h [ph + 3 - D(h)]. \quad (16)$$

Pri tako formiranem eksponentu  $\zeta(p)$  se teoretične napovedi ujemajo z eksperimenti, saj monotonost  $\Gamma_p(r)$  narašča, ko  $r \mapsto 0$ . Pri vseh dosedanjih eksperimentih se je izkazalo tudi, da je  $\zeta(p)$  neodvisen od zunanjega mehanizma in  $Re$ , kar se ujema s predpostavkami Kolmogorova. Z inverzno Legendrovo transformacijo lahko iz  $\zeta(p)$  tudi izračunamo  $D(h)$ . Edini problem multifraktalnega pristopa je, da trenutno še ne znamo izračunati  $D(h)$  direktno iz Navier-Stokesove enačbe (1), kar pomeni, da napovedovanje obnašanja turbulentnega toka še ni mogoče [11].

## 5. Merjenje turbulence

### 5.1 Uporaba Dopplerjevega efekta za merjenje Lagrangeve turbulence

Lagrangeva turbulenca je bila v preteklosti precej zapostavljena, kar se tiče eksperimentov. Merjenje namreč zahteva opazovanje posameznih delcev in ne le povprečnega toka tekočine. Takšno merjenje zato zahteva dobro resolucijo tako pri majhnih kot tudi pri velikih dimenzijah, saj ni vnaprej jasno, kako se bo delec obnašal. Vse več raziskav temelji na eksperimentih z Lagrangevo turbulenco, saj v tem primeru opazimo precej večjo nestalnost (glej poglavje 3). Razumevanje Lagrangeve turbulence je tesno povezano z razumevanjem transporta in mešanja, ugotovitve pa so pomembne v ekologiji, meteorologiji, pri izgorevanju v motorjih ... [18]

Za merjenje Eulerjeve turbulence se pogosto namesto anemometrov uporabljajo ultrahitro kamere, ki snemajo opazovano območje in sledijo sledilnim delcem v tekočini. Pri Lagrangevi turbulenci ta možnost ni najbolj primerna, saj je potrebno opazovanje celotnega območja na različnih velikostnih skalah. Hkrati mora imeti kamera dovolj veliko časovno ločljivost, da opazi tudi najkrajše pojave [19]. Tako snemanje bi ustvarilo več terabajtov podatkov že pri zmernih

vrednostih  $Re$  in majhnih opazovanih območjih. Razvoj se je zato obrnil v smer opazovanja točno izbranih sledilnih delcev s pomočjo Dopplerjevega efekta [20].

Pri postavitvi takšnega eksperimenta pošiljamo valovanje v opazovano območje. Ko sledilni delci vstopijo v to območje, se na njih valovanje siplje, modulacija v frekvenci pa nosi podatek o hitrosti delca. Uporabljamo lahko ultrazvočno valovanje, možna pa je tudi uporaba laserjev. V obeh primerih je največkrat uporabljen von Karmanov model toka. Gre za posodo, v kateri turbulenco ustvarjata 2, v nasprotnih smereh se vrteča diska z lopaticami. Takšna postavitev ustvarja trubulenten tok, ki ima v sredini posode približno ničelno povprečno hitrost, tako da opazovani delci dlje časa ostanejo v območju meritve [8]. Oglejmo si principe posameznih načinov izvedbe.

### 5.1.1 Uporaba ultrazvoka

Pri ultrazvočnih merilnikih uporabljamo monokromatski izvor in sprejemnike, ki so sestavljeni iz niza piezoelektričnih pretvornikov. Na ta način hkrati merimo položaj in hitrost delca, kar omogoča primerjavo direktne in posredne meritve položaja in hitrosti. Pretvorniki v sprejemniku zaznajo različno fazo signala in določijo relativen položaj delca glede na sprejemnik. Dva takšna sprejemnika zadoščata za določitev položaja v prostoru. Podrobnejša shema je predstavljena na sliki 4.

Za kar najboljše zaznavanje Dopplerjevega premika morajo imeti sledilni delci večjo akustično impedanco od medija, v katerem se gibljejo. Njihova gostota mora biti primerljiva z gostoto medija, njihova velikost pa večja od valovne dolžine ultrazvoka, hkrati pa dovolj majhna, da se delci gibljejo skupaj z medijem. Uporabljeni delci so lahko votle steklene kroglice, kroglice iz umetnih mas ali kar zračni mehurčki in imajo premer reda nekaj  $100 \mu\text{m}$ . Slabost merjenja z ultrazvokom je velika valovna dolžina v primerjavi z  $\eta$ . Prav tako zahteva iskanje Dopplerjevega premika kompleksno procesiranje signala. Izvor namreč konstantno producira signal, saj bi bilo pulzno merjenje prepočasno za zaznavanje najmanjših časovnih skal in s tem najmanjših vrtincev v toku [18].

### 5.1.2 Uporaba laserjev

Laserski merilniki temeljijo na enakem principu kot ultrazvočni. Njihova prednost je manjša valovna dolžina, kar pomeni možnost uporabe manjših sledilnih delcev in večjo prostorsko resolucijo. V tem primeru lahko uporabimo delce velikostnega reda  $1 \mu\text{m}$ , torej govorimo o zmanjšanju dimenzije tudi za faktor 1000. Vseeno dimenzije delcev ustrezajo nekaj  $10 \mu\text{m}$  zaradi lažje izdelave [19].

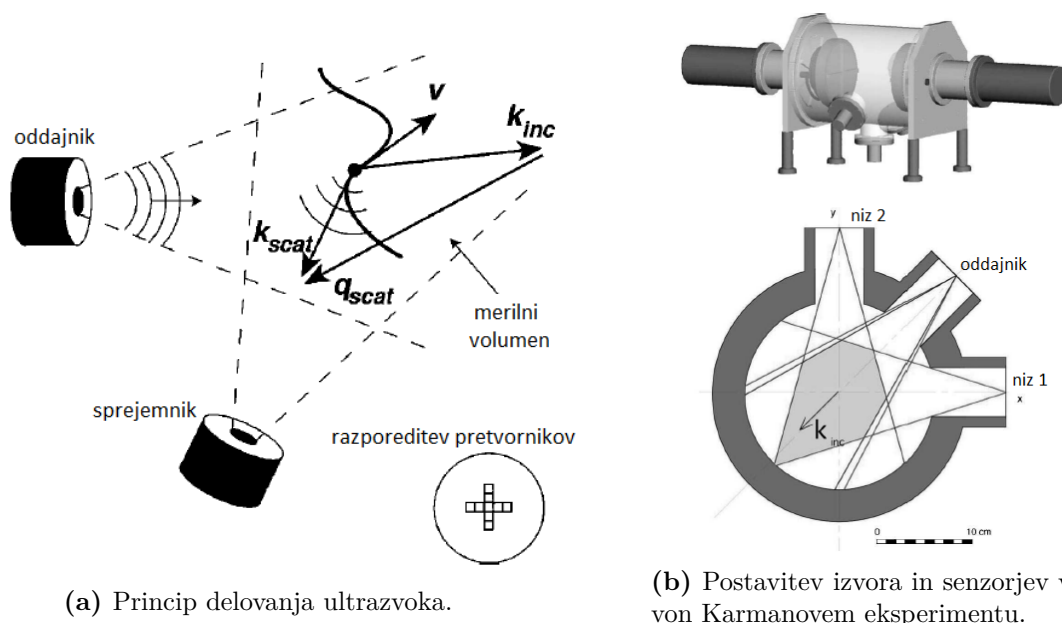
Postavitev konkretnega eksperimenta je prikazana na sliki 5. Opazovani volumen formiramo tako, da laserski žarek s polprepustnim zrcalom razdelimo na 2 snopa. Snopa nato razširimo in ju usmerimo tako, da se v curku prekrivata in ustvarjata območje interference. Pred tem enemu od snopov moduliramo frekvenco, tako da se interferenčna slika premika. S tem navidezno pretvorimo stoječe valovanje v potujoče. Na ta način lahko ugotovimo tudi predznak hitrosti, saj navidezno premaknemo ničlo frekvence, glede na katero opazujemo Dopplerjev premik. Svetlobo, ki se siplje na delcu, zaznavamo s fotodiodo v pravokotni smeri. Sprememba frekvence nosi informacijo o hitrosti delca [21].

## 5.2 Uporaba helija

### 5.2.1 Večanje Reynoldsovega števila

Pri eksperimentih, kjer proučujemo turbulenco, si prizadevamo doseči čimvečje Reynoldsovo število obravnavanega toka. Dovolj veliko je vsako  $Re$ , pri katerem statistične količine v območju





(a) Princip delovanja ultrazvoka.

(b) Postavitev izvora in senzorjev v von Karmanovem eksperimentu.

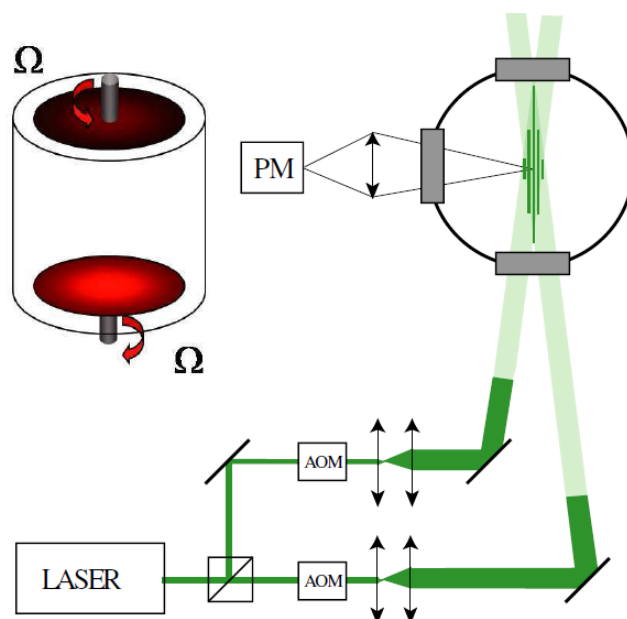
**Slika 4.** Prikaz implementacije ultrazvočnega izvora in senzorja v eksperimentih. Slika 4a prikazuje izvor in en sprejemnik ter valovna vektorja vpadnega in odbitega valovanja na sledilnem delcu. V spodnjem desnem kotu je prikazana še razporeditev pretvornikov, ki omogoča zaznavanje faznega zamika. Dejansko postavitev v posodi von Karmanovega poskusa prikazuje slika 4b. Sprejemnika sta postavljena tako, da opazujemo območje na sredini med vrtečima se ploščama. Z dovoljenjem prirejeno po Mordant, N., Metz, P., Pinton, J. and Michel, O. (2005). Acoustical technique for Lagrangian velocity measurement. *Rev. Sci. Instrum.*, 76(2), p.025105.. Copyright 2005, AIP Publishing LLC.

ravnotežja prenehajo variirati, večje vrednosti pa preprosto pomenijo večje območje ravnotežja in s tem več manevrskega prostora za merjenje količin, kot sta korelacijska funkcija in monotonost. Za kvalitetne meritve je ponavadi potreben razpon  $Re$  preko več dekad.

Visoka  $Re$  srečamo v naravi, in sicer v atmosferi ter v oceanih. Žal ti sistemi zaradi težkega nadzorovanja pogojev niso primerni za osnovne fizikalne eksperimente, vseeno pa so bila v njih opravljena že mnoga opazovanja turbulence [6]. Druga možnost so veliki vetrovniki, ki pa so cenovno zelo potratni. Dostop do takih vetrovnikov je tudi zelo omejen za fizikalne raziskave z več dni trajajočimi eksperimenti. Večinoma ima prednost testiranje aerodinamičnih lastnosti letal in avtomobilov, ker je to posredno bolj dobičkonosno. V praksi  $Re$  pri letalih in podmornicah dosegajo velikostni red  $10^8$  do  $10^9$ , trenutno najboljši eksperimenti pa le do  $10^6$  oz.  $10^7$  pri eksperimentih s stisnjenim zrakom [8, 11]. Večanje  $Re$  je zato nujno potrebno tudi zavrlojlo kvalitete meritev vzgona in upora. Da se vrednosti iz prakse ujemaajo s tistimi v vetrovnikih, je pomembno tudi s stališča površin, saj se efektivna hrapavost površine spreminja s spreminjanjem  $Re$ .

### 5.2.2 Prednosti uporabe helija

Poleg večanja dimenzij eksperimenta lahko  $Re$  povečamo tudi z manjšanjem viskoznosti. V zadnjih letih se kot medij vse večkrat uporablja nizkotemperaturni helij, saj je njegova kinematična viskoznost znatno manjša od viskoznosti običajno uporabljene vode ali zraka. Tabela 1 prikazuje viskoznosti nekaterih značilnih testnih tekočin. Helij I predstavlja tekoče stanje helija-4 in ima temperaturo med vreliščem pri 4,22 K in točko lambda pri 2,1768 K, merjeno pri tlaku 1 bar. Točka lambda predstavlja temperaturo, pod katero helij preide v supertekoče stanje, namesto da bi zamrznil. To stanje imenujemo helij II [22]. Helij II se pri pretoku skozi tanke kapilare obnaša, kot da ima ničelno viskoznost. Pri von Karmanovih eksperimentih (torej



**Slika 5.** Shema postavitve eksperimenta za merjenje Lagrangeve turbulence s snopom laserske svetlobe. Laser razdelimo na 2 snopa, katerima moduliramo frekvenco z avtooptičnim modulatorjem (AOM) in ju razširimo. Laserja v posodi ustvarjata potujočo interferenčno sliko, sipano svetlobo pa merimo s fotopomnoževalko (PM). Skica v zgornjem levem kotu predstavlja pogon von Karmanovega toka. Z dovoljenjem prirejeno po Volk, R., Mordant, N., Verhille, G. and Pinton, J. (2007). Laser Doppler measurement of inertial particle and bubble accelerations in turbulence. *Europhys. Lett.*, 81(3), p.34002. Copyright 2007.

v turbulentnem toku) pa se obnaša kot mešanica supertekočega helija II in običajnega utekočinjenega helija I. Efektivna viskoznost tako ostaja prisotna v heliju II tudi, ko temperatura pada proti 0 K, čeprav helij I ni več prisoten. To pomeni, da še vedno pride do disipacije energije, tako kot v standardnih tekočinah. Razlaga tega pojava zahteva globlji pogled v kvantno mehaniko in ni relevantna za ta članek [8]. Helij je tudi nadvse primeren za eksperimente s termalno turbulenco. Še ena pomembna lastnost helija je nizek dinamični tlak  $\frac{1}{2}\rho v^2$  v primerjavi s stisnjenim zrakom. Pri enakem  $Re$  tako na opazovan objekt deluje s precej manjšo silo.

Tekočina	T [K]	p [bar]	$\nu$ [cm <sup>2</sup> /s]
Zrak	293	1	0,15
Voda	293	1	0,01
Helij I	2,2	NPR	$1,8 \cdot 10^{-4}$
Helij II	1,8	NPR	$8,9 \cdot 10^{-5}$
Helij (plin)	5,5	2,8	$3,2 \cdot 10^{-4}$

**Tabela 1.** Vrednosti viskoznosti nekaterih značilnih tekočin, uporabljenih v eksperimentih. NPR pomeni nasičen parni tlak. [8]

Čeprav smo večanje  $Re$  omenjali predvsem v zvezi z večjim razponom območja ravnotežja in s tem večanjem kvalitete meritev, pa deluje tudi obratno. Z uporabo nizko viskozne tekočine lahko namreč pripravimo kvalitetne eksperimente, ki zavzamejo precej manj prostora. Teoretično bi lahko isti učinek dosegli tudi z večanjem hitrosti, vendar nas v tem primeru omejuje Machovo število. Če je hitrost prevelika, se namreč medij začne stiskati, kar s seboj prinese nove pojave. Le-ti nas pri merjenju osnovnih lastnosti turbulence ovirajo. S helijem lahko pogoje iz več deset meterskih (v preseku) vetrovnikov poustvarimo v približno meterskem helijevem vetrovniku pri precej normalni porabi hladilne moči  $\sim 1$  W [8].

### 5.2.3 Težave z merilnimi sistemi

Za merjenje Eulerjeve turbulence se največkrat uporabljajo anemometri na vročo žičko. Prvi problem, ki nastopi pri merjenju turbulence v heliju, je dimenzija najmanjših vrtincev. Najnižja dimenzija, t.i. dimenzija Kolmogorova, je v heliju manjša glede na zrak, sorazmerno z nižjo viskoznostjo. Najmanjši vrtinci se zato pojavljajo pri velikostih redih manjših od  $\mu\text{m}$ . Resolucija merilne sonde – žičke anemometra – lahko vpliva na meritve. Nekateri eksperimenti s helijem kažejo zmanjšanje nestalnosti pri prehodu  $Re$  nad določeno mejo [23]. Pojav bi lahko bil posledica končne dimenzije sonde glede na  $\eta$ , saj podobnih pojavov v vodi in zraku še niso opazili. Ker je dimenzija kolmogorova  $\eta$  primerljiva z velikostjo žičke, bi lahko zaradi nje prišlo do novih turbulentnih tokov, česar ne želimo. Majhne prostorske dimenzije ustrezajo tudi majhnim časovnim dimenzijam, zato morajo uporabljeni instrumenti dosegati tudi precej visoko časovno ločljivost, konkretno reda MHz [8].

Zaradi majhne gostote nastopijo težave tudi pri merjenju Lagrangeve turbulence. V tekočino moramo namreč spustiti sledilne delce, ki se bodo obnašali čimbolj podobno kot medij. Kot sem omenil v prejšnjem poglavju, se za to uporabljajo votle steklene kroglice, kar pa zaradi nizke gostote pri heliju ne deluje. Kroglice moramo v tem primeru napolniti z vodikom, to pa pomeni dodatne komplikacije v postopku izdelave. Stvar se še dodatno zaplete pri uporabi helija II, kjer moramo pri načrtovanju sledilnih delcev upoštevati še značilen relaksacijski čas, ki nam v primerjavi s časom obhoda vrtinca pove, ali bo delec sledil običajnemu ali supertekočemu delu kapljevine [8].

Tretji problem je nizka temperatura. Anemometrija temelji na konvektivnem odvajanju toplote iz žičke, ki je na nekoliko višji temperaturi kot okolica. V primeru nizkih temperatur je težje zagotoviti ustrezno občutljivost v danem območju.

## 6. Zaključek

Turbulenca je danes še vedno eden velikih izzivov klasične fizike, saj še vedno ni povsem jasno kateri elementi tega problema so deterministični in kateri zahtevajo statistično obravnavo. Ravno zaradi tega je v raziskovanju turbulence odprtih še precej vprašanj. Prav tako je še vedno neznana univerzalna teorija, ki bi omogočala napoved obnašanja toka tekočine v turbulentnem režimu.

Turbulenca je pomembna v industriji in različnih vejah znanosti, ki so močno povezane z našim vsakdanjim življenjem. Boljše razumevanje turbulence bi pomagalo razložiti pojave v magnetohidrodinamiki, superfluidih, geofiziki, klimatologiji. K novemu razumevanju bodo verjetno veliko pripomogli tudi eksperimenti in numerične simulacije, ki so zaradi vse bolj zmogljive tehnologije vedno bližje resničnim situacijam, hkrati pa napredek omogoča uporabo novih metod.

## Zahvala

Za pomoč pri ustvarjanju članka bi se zahvalil doc. dr. Mihi Ravniku.

## LITERATURA

- [1] Benzi, R. and Frisch, U. (2010). Turbulence. *Scholarpedia*, 5(3), p.3439.
- [2] Wagner, S. (2002). New results in numerical and experimental fluid mechanics III. Berlin: Springer.
- [3] Abbott, I. and Von Doenhoff, A. (1959). *Theory of wing sections, including a summary of airfoil data*. New York: Dover Publications.
- [4] Wang, Y. and Zhang, K. (2012). Coupled turbulence and aerosol dynamics modeling of vehicle exhaust plumes using the CTAG model. *Atmospheric Environment*, 59, pp.284-293.
- [5] Huber, M., McWilliams, J. and Ghil, M. (2001). A Climatology of Turbulent Dispersion in the Troposphere. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 58(16), pp.2377-2394.
- [6] Abraham, E.R. (1997). The generation of plankton patchiness by turbulent stirring. *Nature*, 391, pp.577-580.
- [7] Davidson, P. (2004). *Turbulence: an introduction for scientists and engineers*. Oxford, UK: Oxford University Press.
- [8] Niemela, J. and Sreenivasan, K. (2006). The Use of Cryogenic Helium for Classical Turbulence: Promises and Hurdles. *Journal of Low Temperature Physics*, 143(5-6), pp.163-212.
- [9] Mantegna, R. and Stanley, H. (1997). Stock market dynamics and turbulence: parallel analysis of fluctuation phenomena. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 239(1-3), pp.255-266.
- [10] Nelkin, M. (1992). In What Sense Is Turbulence an Unsolved Problem?. *Science*, 255(5044), pp.566-570.
- [11] Benzi, R. and Biferale, L. (2015). Homogeneous and Isotropic Turbulence: a short survey on recent developments. arXiv:1501.00695.
- [12] Iršič, V. (2015). Fraktalna dimenzija. *Matrika*, [na spletu] 1. Dostopno na: [http://matrika.fmf.uni-lj.si/letnik-2/stevilka-1/Fraktalna\\_dimenzija.pdf](http://matrika.fmf.uni-lj.si/letnik-2/stevilka-1/Fraktalna_dimenzija.pdf) [Pridobljeno 24. 8. 2016].
- [13] Wikipedia. (2016). Fractal dimension. [na spletu] Dostopno na: [https://en.wikipedia.org/wiki/Fractal\\_dimension](https://en.wikipedia.org/wiki/Fractal_dimension) [Pridobljeno 24. 8. 2016].
- [14] Math.unice.fr, (2015). Introduction to turbulence. [na spletu] Dostopno na: <http://math.unice.fr/~musacchi/tesi/node4.html> [Pridobljeno 25.4.2015].
- [15] Frisch, U., Sulem, P. and Nelkin, M. (1978). A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 87(04), p.719.
- [16] Baker, A. (2002). Lecture 9 - Kolmogorov's Theory. Applied Computational Fluid Dynamics. [na spletu] Bakker.org. Dostopno na: <http://www.bakker.org/dartmouth06/engs150/09-kolm.ppt> [Pridobljeno 24.4.2015].
- [17] Meneveau, C. and Sreenivasan, K. (1987). Simple multifractal cascade model for fully developed turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 59(13), pp.1424-1427.
- [18] Mordant, N., Metz, P., Pinton, J. and Michel, O. (2005). Acoustical technique for Lagrangian velocity measurement. *Rev. Sci. Instrum.*, 76(2), p.025105.
- [19] Volk, R., Mordant, N., Verhille, G. and Pinton, J. (2007). Laser Doppler measurement of inertial particle and bubble accelerations in turbulence. *Europhys. Lett.*, 81(3), p.34002.
- [20] Cornman, L. and Goodrich, R. (2016). Doppler Radar Measurements of Turbulence. *Aviation Turbulence*, pp.121-148.
- [21] Sullivan, J. and Schneider, S. (n.d.). Laser Doppler Anemometry. [na spletu] Dostopno na: <https://engineering.purdue.edu/~aae520/LDV-lecture-rev3.pdf> [Pridobljeno 16.4.2015].
- [22] Vinen, W.F. The physics of superfluid helium. School of Physics and Astronomy, University of Birmingham, Birmingham B15 2TT, UK. Dostopno na: <https://cds.cern.ch/record/808382/files/p363.pdf> [Pridobljeno 25. 8. 2016].
- [23] Tabeling, P., Zocchi, G., Belin, F., Maurer, J. and Willaime, H. (1996). Probability density functions, skewness, and flatness in large Reynolds number turbulence. *Physical Review E*, 53(2), pp.1613-1621.