GEOMETRIJSKE FAZE V KVANTNI MEHANIKI

LARA ULČAKAR

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

V članku so predstavljene geometrijske faze, ki nastopijo pri obravnavi kvantnih sistemov. Na začetku je obrazložena klasična različica geometrijske faze, kasneje pa Berryjeva faza. Opisana je na primeru elektrona v magnetnem polju. Tema nato preide na Aharonov-Anandanovo fazo. Na koncu je opisan primer merjenja faze in nato še uporaba geometrijskih faz v kvantnem računalništvu.

GEOMETRIC PHASES IN QUANTUM MECHANICS

In the article geomeric phases, which occur when transforming quantum systems, are presented. First a classical version of geometric phase is described and later the Berry phase, which is explained on an example. Aharonov-Anandan phase is introduced. And the end the measurement of phase in described and possible application in quantum computing.

1. Uvod

Geometrijska faza je faza, ki jo stanje sistema lahko pridobi pri določenih tipih transformacij. Nastopa v geometrijskem faznem faktorju $e^{i\gamma}$, ki je merljiv. Geometrijske faze delimo na več vrst, v tem seminarju bom predstavila Berryjevo in Aharonov-Anandovo fazo.

Berryjeva faza je fazna razlika, ki jo pridobi sistem po cikličnem adiabatskem procesu[1] in je posledica geometrijskih lastnosti prostora parametrov, od katerih je odvisno stanje sistema [1][2]. Geometrijsko fazo je odkril S. Pancharatnam leta 1956 pri polarizirani svetlobi, ki potuje čez kristal. Pojav je postal zares poznan leta 1984, ko je M. V. Berry objavil članek z naslovom "Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes". Berryjeva faza nastopi pri Aharonov-Bohmovem pojavu, pri katerem curek elektronov potuje okrog magnetnega polja. Pojavi se tudi v raznih drugih valovnih sistemih, recimo v klasični optiki. V klasični mehaniki obstaja analog Berryjeve faze, imenovan Hannayev kot, ki je bil odkrit leta 1985, torej po odkritju kvantnomehanske geometrijske faze.

Področje geometrijskih faz postaja v zadnjih letih vedno bolj aktualno. Preko cikličnih transformacij se lahko doseže poljubne rotacije spina elektronov, kar je zelo pomembno pri razvoju kvantnih računalnikov, pri katerih je informacija zapisana z orientacijo spina. Preko Aharonov-Bohmovega pojava se opravlja najnatančnejše meritve magnetnega polja.

2. Klasična geometrijska faza

V klasični mehaniki je Hannayev kot klasični analog Berryjeve faze. Klasična geometrijska faza je v tem poglavju razložena na primeru nihala, ki potuje po površini Zemlje.

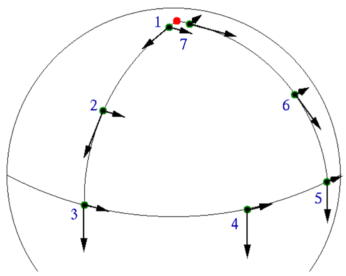
Stojimo na severnem polu (točka 1 na sliki 1) in v roki držimo matematično nihalo, ki niha pravokotno na smer poldnevnika (smer nihanja označuje manjša puščica na sliki 1). Počasi (to pomeni adiabatsko) nesemo nihalo vzdolž poldnevnika do ekvatorja. V tej točki niha nihalo v smeri vzhod-zahod. Nekaj časa nesemo nihalo vzdolž ekvatorja (nihalo ves čas niha v smeri vzhod-zahod) in ga nato odnesemo vzdolž novega poldnevnika nazaj na severni pol. S slike je očitno, da nihalo ne

[1] Pojem adiabatskega procesa je razložen v poglavju 3.1.

[2] Primer take ciklične transformacije je nihajoče matematično nihalo, kateremu počasi spreminjamo dolžino vrvice. Dolžina vrvice je parameter, od katerega je odvisno stanje sistema.

niha v isti smeri kot na začetku, čeprav se nahaja na isti točki. S staro smerjo nihanja oklepa kot θ, ki je enak prostorskemu kotu Ω, ki ga oklepa pot, po kateri smo nesli nihalo. Kot θ je enak kotu Ω, ker smo nesli nihalo po $\frac{\theta}{2\pi}$ delu severne poloble, torej je površina, ki jo oklepa naša pot, enaka $A = \frac{1}{2}(\frac{\theta}{2\pi})4\pi R^2 = \theta R^2$, kjer je R radij Zemlje. Od tod sledi po definiciji prostorskega kota

$$\theta = \frac{A}{R^2} \equiv \Omega. \tag{1}$$



Slika 1. Na sliki je prikazan potek poti, po kateri nesemo nihalo. Slika je iz vira [2].

Sistemu, ki se po transportu po zaključeni zanki ne vrne v začetno stanje, pravimo, da je *neholonomski*. Ni nujno, da je transport fizično gibanje. Kot transport so mišljeni zunanji parametri sistema, ki se spreminjajo tako, da je njihova vrednost na koncu enaka začetni vrednosti. Kot primer neholonomskega procesa si lahko prestavljamo delovanje cikličnega motorja. Po koncu vsakega cikla je motor v enakem stanju, avto pa se za malo premakne oziroma tovor je malo dvignjen.

3. Berryjeva faza

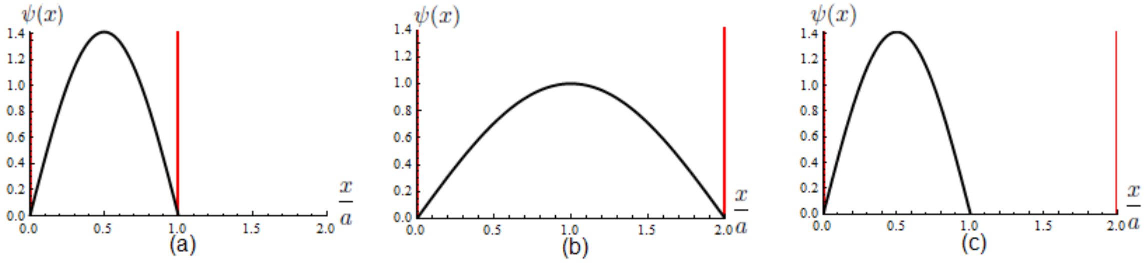
Berryjeva geometrijska faza se pojavi, če se parametri kvantnega sistema adiabatsko in krožno spreminjajo s časom. Hamiltonian je torej časovno odvisen zaradi časovne odvisnosti parametrov sistema $\mathrm{H} = \hat{H}(t) = \hat{H}(\mathbf{R}(t))$, kjer je $\mathbf{R}$ vektor, v katerem so zapisani parametri sistema. Pričakovali bi, da je po končani transformaciji končno stanje sistema enako začetnemu, saj so končne vrednosti parametrov enake začetnim. Vendar temu ni tako, če je vektor parametrov $\mathbf{R}$ potoval po prostoru parametrov krožno. Končno stanje se od začetnega razlikuje za fazni faktor, ki ga imenujemo Berryjeva faza. Berryjevo fazo se meri preko interferenčnega eksperimenta.

V tem poglavju je najprej razložen adiabatski teorem, ki je potreben za razumevanje Berryjeve faze. Berryjeva faza je nato razložena na primeru elektrona v adiabatsko spreminjajočem magnetnem polju.

3.1 Adiabatski teorem

Adiabatski proces karakterizirajo počasne spremembe zunanjih pogojev. Pri tem govorimo o dveh časih: T_N, notranji čas, ki predstavlja gibanje sistema, in T_Z, zunanji čas, v katerem se parametri sistema očitno spremenijo. Pri adiabatskem procesu velja, da je $T_Z \gg T_N$. Klasično si ga lahko predstavljamo preko matematičnega nihala, kateremu spreminjamo dolžino vrvice L. Če spreminjamo dolžino vrvice hitro, nihalo ne bo več sinusno nihalo, temveč bo začelo poskakovati, pri počasnih spremembah pa se bo nihanje nihala ves čas prilagajalo novi dolžini vrvice, tako da bo ves čas sinusno nihalo s frekvenco $\omega_N = \sqrt{\frac{g}{L(t)}}$. V kvantni mehaniki pa je pojem adiabatskega procesa strnjen v adiabatskem teoremu, ki je razložen na primeru na sliki 2.

Adiabatski teorem: Naj se Hamiltonian sistema počasi spreminja s časom iz začetne oblike $\hat{H}^i$ v končno obliko $\hat{H}^f$. Če je bil delec na začetku v n-tem lastnem stanju $\hat{H}^i$, bo prenesen v n-to lastno stanje $\hat{H}^f$.



Slika 2. (a) Delec se na začetku nahaja v osnovnem stanju neskončne potencialne jame. (b) Če se desna stena jame počasi premika, bo delec ostal v osnovnem stanju. (c) Če se stena hitro premakne, je delec na začetku še v osnovnem stanju prejšnjega Hamiltoniana $\hat{H}^i$, nato pa se stanje podre v superpozicijo lastnih stanj novega Hamiltoniana $\hat{H}^f$.

3.2 Berryjeva faza

Če je Hamiltonian neodvisen od časa, bo sistem, ki se je na začetku nahajal v n-tem lastnem stanju, tudi ostal v $n-$tem lastnem stanju [3]. Valovna funkcija bo dobila fazni faktor $\psi_n(x,t) = \psi_n(x)e^{-iE_nt/\hbar}$, kjer je E_n n-ta lastna energija, $\psi_n(x)$ pa n-to lastno stanje. Če pa se Hamiltonian spreminja s časom, so lastne energije in lastna stanja odvisna od časa. Izračunamo jih iz stacionarne Schödingerjeve enačbe:

$$H(t)\psi_n(x,t) = E_n(t)\psi_n(x,t). \tag{2}$$

Po adiabatskem teoremu bo sistem, ki je začel v $n-$tem lastnem stanju, tudi ostal v njem, če se Hamiltonian počasi spreminja. Največ, kar bo valovna funkcija dobila, je fazni faktor. Nastavek za valovno funkcijo delca, ki se je na začetku nahajal v n-tem lastnem stanju in je šel čez krožni adiabatski proces, je

$$\Psi_n(x,t) = \psi_n(x,t)e^{i\theta_n(t)}e^{i\gamma_n(t)}. \tag{3}$$

$\psi_n(x,t)$ je n-to lastno stanje Hamiltoniana ob času t in je pomnoženo z dvema faznima faktorjema. Člen

$$\theta_n(t) = -\frac{1}{\hbar}\int\limits_0^t E_n(t')dt' \tag{4}$$

imenujemo *dinamična faza*. To je splošen faktor $(-E_nt/\hbar)$, v tem primeru smo ga morali integrirati po času, saj so lastne energije odvisne od časa. Drugo dodatno fazo $\gamma_n(t)$, ki se lahko pojavi, imenujemo *geometrijska faza*. Tako fazo moramo dovoliti, saj je delec kljub fazi v n-tem lastnem stanju, kar se sklada z adiabatskim teoremom, enačba lastnih stanj (2) in normalizacijski pogoj pa določata $\psi_n(x,t)$ le do poljubne faze. Posledično se energija pri tem procesu ne ohranja, kar pa ni nič narobe, saj časovno spreminjajoči Hamiltomian črpa energijo v sistem. Poiščimo sedaj geometrijsko fazo $\gamma_n(t)$. Če nastavek za valovno funkcijo (3) vstavimo v časovno odvisno Schrödingerjevo enačbo

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H(t)\Psi \tag{5}$$

in nato skalarno pomnožimo s ψ_n, dobimo

$$\frac{d\gamma_n}{dt} = i \left\langle \psi_n \middle| \frac{\partial \psi_n}{\partial t} \right\rangle. \tag{6}$$

$\psi_n(x,t)$ se sedaj spreminja s časom, ker je Hamiltonian odvisen od parametrov $\mathbf{R}(t) = (R_1(t), \ldots, R_N(t))$, ki so časovno odvisni. Zato zapišemo

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \frac{\partial \psi_n}{\partial R_1}\frac{dR_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial \psi_n}{\partial R_N}\frac{dR_N}{dt} = (\nabla_{\mathbf{R}}\psi_n) \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt}, \tag{7}$$

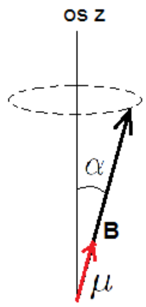
kjer je $\nabla_{\mathbf{R}}$ gradient na parametre R_i. Sedaj enakost (7) uporabimo pri izračunu $\gamma_n(t)$ po formuli (6). Upoštevamo še, da gre za krožno spremembo, torej da so končne vrednosti parametrov enake začetnim, in dobimo formulo za geometrijsko fazo

$$\gamma_n(T) = i \oint \langle \psi_n | \nabla_{\mathbf{R}} \psi_n \rangle \, d\mathbf{R}. \tag{8}$$

To je linijski integral po zaključeni zanki v prostoru parametrov, po kateri so potovale vrednosti parametrov $\mathbf{R}$ med transformacijo[3]. Enačbo (8) je prvi zapisal M. Berry leta 1984, zato se ta geometrijska faza imenuje *Berryjeva faza.* Pomembna lastnost je ta, da je $\gamma_n(T)$ odvisna samo od poti parametrov in ne od časa, ki je vmes pretekel. V nasprotju je dinamična faza (4) tesno povezana s časom transformacije.

3.3 Primer: Elektron v adiabatsko spreminjajočem se magnetnem polju

Koncept Berryjeve faze se da dobro pokazati na primeru elektrona, ki se nahaja v adiabatsko spreminjajočem se magnetnem polju. Elektron z nabojem $-e_0$ in maso m se nahaja v magnetnem polju, ki ima velikost B_0 in s konstantno kotno hitrostjo ω precedira okrog osi z, s katero oklepa kot α. Obravnavan sistem je prikazan na sliki 3.



Slika 3. Pričakovana vrednost dipolnega momenta μ je ves čas poravnana z $\mathbf{B}(t)$. Magnetno polje $\mathbf{B}(t)$ precedira okrog osi z pod kotom α.

Celotni izračun se nahaja v [2], rezultati pa so obravnavani tu. Če se je na začetku elektron nahajal v lastnem stanju s spinom v smeri magnetnega polja, iz izračuna vidimo, da je spin elektrona ob vseh časih v smeri polja, valovna funkcija pa je pomnožena z geometrijskim in dinamičnim faznim faktorjem. Dinamična faza je

$$\theta_+(t) = -\frac{1}{\hbar}\int_0^t E_+(t')dt' = \frac{\omega_1 t}{2}, \tag{9}$$

[3] $\gamma_n(t)$ je realna, saj če ni, je faktor $e^{i\gamma_n}$ eksponentna funkcija, kar uniči normalizacijo valovne funkcije. Faktor $\langle \psi_n | \nabla_{\mathbf{R}} \psi_n \rangle$ je imaginaren, saj je $\nabla_{\mathbf{R}} \langle \psi_n | \psi_n \rangle = 0 = \langle \psi_n | \nabla_{\mathbf{R}} \psi_n \rangle + \langle \nabla_{\mathbf{R}} \psi_n | \psi_n \rangle = \langle \psi_n | \nabla_{\mathbf{R}} \psi_n \rangle + \langle \psi_n | \nabla_{\mathbf{R}} \psi_n \rangle^*$.

kjer je $\omega_1 = \frac{eB_0}{m}$ enaka klasični precesijski frekvenci elektrona, geometrijska faza pa po zaključenem ciklu

$$\gamma_+(T) = \pi(\cos\alpha - 1). \tag{10}$$

Vidimo, da geometrijska faza po končanem cikličnem procesu ni odvisna od časa transporta T.

Če bi obravnavali splošnejši primer, kjer konica magnetnega polja opisuje zaključeno krivuljo poljubne oblike na površini sfere z radijem $r = B_0$, bi prišli do rezultata za geometrijsko fazo

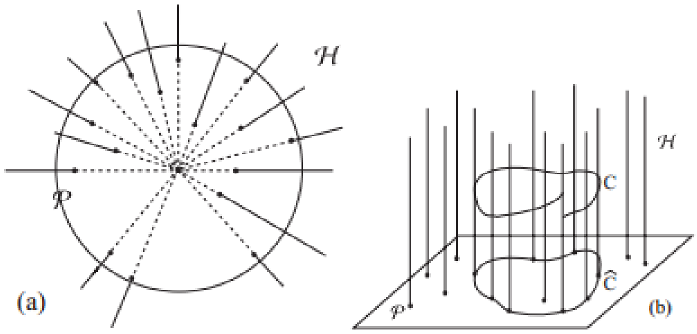
$$\gamma_+(T) = -\frac{1}{2}\Omega, \tag{11}$$

kjer je Ω prostorski kot v središču sfere, ki ga določa krivulja, po kateri potuje konica magnetnega polja.

4. Aharonov-Anandanova faza

Leta 1987 sta Aharonov in Anandan predlagala pomembno posplošitev Berryjeve faze [4]. V njej obravnavata ciklične transformacije, ki niso nujno adiabatske. Berryjeva faza je potemtakem poseben primer Aharonov-Anandanove faze. Ta posplošitev je zelo pomembna, saj v realnosti procesi redko izpolnjujejo adiabatski pogoj.

Za razumevanje Aharonov-Anandanove faze je potrebno poznati pojem projekcijskega prostora. Valovne funkcije, ki točno določijo stanje in so rešitve Schrödingerjeve enačbe, so elementi Hilbertovega prostora $\mathcal{H}$. Projekcijski prostor $\mathcal{P}$ pa sestavljajo valovne funkcije, katerim so fazni faktorji odvzeti. To pomeni, da vse valovne funkcije, ki se razlikujejo le za fazni faktor, predstavljajo isto stanje v projekcijskem prostoru. Na sliki 4(a) je shematski prikaz, kako se različne valovne funkcije iz $\mathcal{H}$ preslikajo v isto stanje v $\mathcal{P}$.



Slika 4. Na sliki (a) je predstavljena ilustracija projekcijskega prostora. Puščice so valovni vektorji iz $\mathcal{H}$, ki se razlikujejo le za fazni faktor. V projekcijskem prostoru so ena točka. Na sliki (b) je predstavljena ciklična transformacija v projekcijskem prostoru in v Hilbertovem prostoru. Sliki sta vzeti iz [4].

Obravnavajmo transformacijo vektorja $|\psi(t)\rangle$ s periodo T, ki je ciklična v projekcijskem prostoru. Stanje $|\psi(t)\rangle$ se v projekcijskem prostoru sprojicira v stanje $|\xi(t)\rangle$. Smiselno je, da je ciklična v projekcijskem prostoru, saj mi kot zunanji opazovalci dojemamo fizikalno stanje kot element projekcijskega prostora in ne kot Hilbertovega, saj ne znamo izmeriti faktorja $e^{i\phi}$. V projekcijskem prostoru potuje stanje $|\xi(t)\rangle$ po sklenjeni zanki $\hat{C}$, v Hilbertovem pa $|\psi(t)\rangle$ potuje po ne nujno sklenjeni zanki C (glej sliko 4(b)). Celotna izpeljava se nahaja v [4], tu pa so obravnavani rezultati. Končno stanje se od začetnega razlikuje za fazni faktor

$$|\psi(T)\rangle = e^{i\Phi} |\psi(0)\rangle . \tag{12}$$

Po Aharonu in Anandanu je faza iz dveh delov $\Phi = \beta + \theta$, kjer je θ dinamična faza

$$\theta = -\frac{1}{\hbar}\int_0^T \langle\psi\,|H|\,\psi\rangle\,dt, \tag{13}$$

člen β pa je Aharonov-Anandanova geometrijska faza

$$\beta = i\oint_{\hat{C}} \left\langle \xi \left| \frac{\partial}{\partial t} \right| \xi \right\rangle dt. \tag{14}$$

Iz (14) vidimo, da se Aharonov-Anandanova faza od Berryjeve razlikuje v tem, da je enaka linijskemu integralu po projekcijskem prostoru valovnih funkcij, Berryjeva (8) pa je odvisna od linijskega integrala po prostoru parametrov. V adiabatski limiti se formula (14) poenostavi v Berryjevo obliko (8). (13) je splošna formula za izračun dinamične faze. Velja tudi v primeru, če delec med procesom ni ob vsakem času v lastnem stanju Hamiltoniana. Formula (4) je poenostavljena oblika in velja, ko je delec ves čas v lastnem stanju. Pri neadiabatskih procesih je stanje delca superpozicija lastnih stanj in se zato dinamično fazo izračuna po formuli (13). Lastnosti Ahararonov-Anandanove faze:

- V izpeljavi Aharonov-Anandanove faze ni bil uporabljen adiabatski približek, kar pomeni, da se bo tudi pri neadiabatski ciklični transformaciji pojavila geometrijska faza.

- Iz formule vidimo, da se bo geometrijska faza pojavila, tudi če Hamiltonian ni cikličen, $H(T) \neq H(0)$. Za fazo je pomembno le, da je časovni razvoj sistema $|\xi(t)\rangle$ cikličen.

- Ni potrebno, da je začetno stanje sistema lastno stanje Hamiltoniana, zato je Aharonov-Anandanova faza veljavna za splošna valovna stanja.

Na Aharonov-Anandanovo fazo ne vpliva oblika Hamiltoniana, odvisna je le od krivulje $\hat{C}$, po kateri je potovalo stanje sistema.

5. Merjenje faz

Navajeni smo, da je faza valovne funkcije arbitrarna, saj vse fizikalne količine vsebujejo $|\Psi|^2$, kjer je fazni faktor izgubljen. Kljub temu pa se geometrijsko fazo da izmeriti. Vzemimo curek delcev (vsi so v stanju Ψ) in ga razcepimo na dva dela, tako da en potuje čez adiabatsko spreminjajoč potencial, drugi pa ne. Ko se curka združita, ima skupna valovna funkcija obliko

$$\Psi = \frac{1}{2}\Psi_0 + \frac{1}{2}\Psi_0 e^{i\Phi}, \tag{15}$$

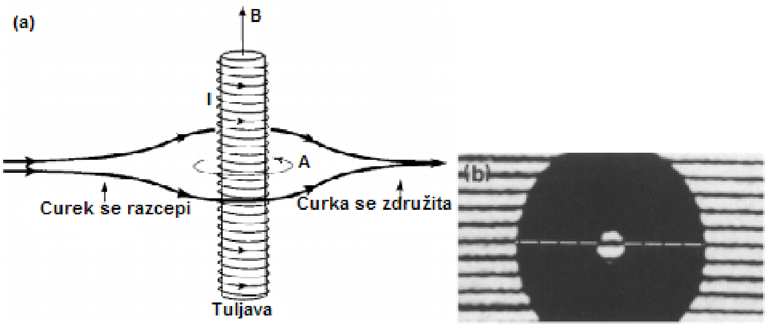
kjer je Ψ_0 direktni curek valovne funkcije, Φ je pa dodatna faza (delno geometrijska, delno dinamična), ki jo je pridobil curek delcev med potovanjem po časovno spreminjajočem potencialu. V tem primeru je

$$|\Psi|^2 = \frac{1}{4}|\Psi_0|^2(1+e^{i\Phi})(1+e^{-i\Phi}) = \frac{1}{2}|\Psi_0|^2(1+\cos\Phi) = |\Psi_0|^2\cos^2(\Phi/2). \tag{16}$$

Če iščemo točke konstruktivne in destruktivne interference, z lahkoto izmerimo Φ.

5.1 Bohm-Aharonov pojav

Na gornji način lahko merimo geometrijsko fazo, ki jo dobi curek elektronov pri Bohm-Aharonovem pojavu. To je pojav, pri katerem pridobi valovna funkcija dodatno fazo, ko delec potuje okrog magnetnega pretoka Φ_B. Delec potuje po prostoru brez elektromagnetnih polj, prisoten je le potencial. Pridobljena faza je $\Phi = \frac{e}{\hbar}\Phi_B$. Eksperimentalno izvedemo poskus tako, da curek elektronov razcepimo in nato vsako komponento curka pošljemo po svoji strani okrog tuljave. Znotraj tuljave je magnetno polje, zunaj ga pa ni. Na drugi strani tuljave se komponenti curka zopet združita. Z merjenjem intenzitete curka bi videli, da se ujema s teoretično napovedjo. Z merjenjem točk konstruktivne interference in s pomočjo formule (16) lahko zelo natančno določimo magnetni pretok Φ_B. Na sliki 5 je prikazan potek poskusa in rezultat meritev.



Slika 5. Na sliki (a) je shematski prikaz poskusa, kjer pride do Bohm-Aharonovega pojava. Na sliki (b) je prikazan interferenčni vzorec, ki ga dobimo z merjenjem intenzitete curka elektronov. Sliki sta vzeti iz [5].

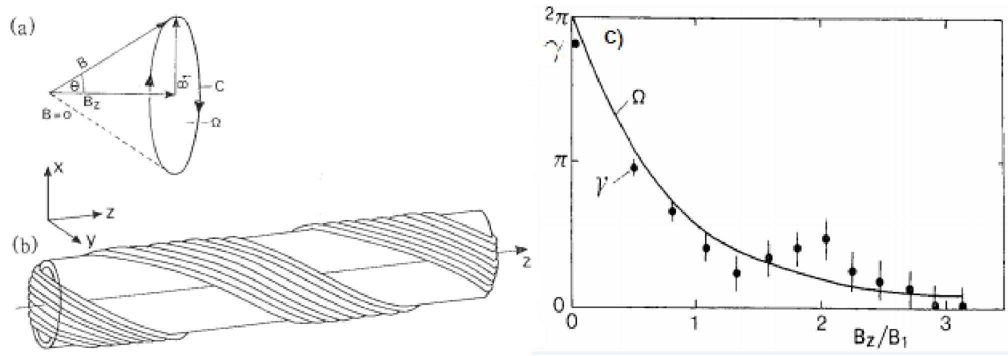
5.2 Eksperimenti z nevtroni

Prvi eksperiment, ki je pokazal efekt Berryjeve faze pri fermionih, sta izvedla Bitter in Dubbers leta 1987. Pri tem eksperimentu je bil curek nevtronov poslan skozi magnetno polje, kateremu se smer spreminja po vijačnici. Pojavi se geometrijska faza, kar se opazi kot sprememba polarizacije nevtronov. Na žalost pri tem eksperimentu ni mogoče ločiti dinamične in geometrijske faze. Curek nevtronov potuje vzdolž cevi, okrog katere je vijačno ovit vodnik. Ta ustvarja magnetno polje, ki naredi vzdolž dolžine cevi en poln obrat 2π. Magnetno polje razdelimo na vzdolžno komponento B_z in pravokotno komponento B_1, celotno velikost magnetnega polja pa označimo z B. Postavitev poskusa je predstavljena na sliki 6. Iz teorije sledi, da je geometrijska faza enaka

$$\gamma_\sigma = -\sigma\Omega(C) = -\sigma 2\pi(1 - \frac{B_z}{B}). \tag{17}$$

$\sigma = \pm 1$ pomeni desnosučno ali levosučno magnetno polje, $\Omega(C)$ pa prostorski kot, ki ga oklepa krivulja, po kateri je potovala konica magnetnega polja. Pri eksperimentu so nevtroni potovali s hitrostjo $500\,\mathrm{m/s}$ in imeli začetno polarizacijo 97%. Potovali so skozi cilinder dolžine $80\,\mathrm{cm}$, ki zasenči zunanje magnetno polje. V njem se je nahajal še en cilinder dolžine $40\,\mathrm{cm}$, okrog katerega je bil vijačno navit vodnik. Nevtroni so neadiabatsko vstopili in izstopili iz magnetnega polja, znotraj pa so potovali adiabatsko. Na sliki 6(c) so predstavljene meritve Berryjeve faze.

Meritve na sliki 6(c) malo odstopajo od napovedane krivulje zaradi dinamične faze, katere se pri tem eksperimentu ne da popolnoma odstraniti.



Slika 6. Na sliki (a) je predstavljen vektor magnetnega polja, ki opiše zaključeno zanko C. Na sliki (b) pa je postavitev eksperimenta, kjer obračamo spin nevtronov z vijačno navitim vodnikom. Curek nevtronov potuje vzdolž osi z. Na sliki (c) so predstavljene meritve Berryjeve faze kot funkcije $\frac{B_z}{B_1}$. Sliki sta vzeti iz [4].

6. Uporaba geometrijskih faz

Razumevanje geometrijskih faz je pomembno pri razumevanju mnogih kvantnih pojavov, kot je na primer Bohm-Aharonov pojav. Tega lahko izkoristimo za zelo točne meritve magnetnega pretoka [6].

Ena zanimivih uporab geometrijskih faz je v kvantnem računalništvu. Enota kvantne informacije se imenuje kubit (kvantni bit). Zapišemo jo v kvantnem sistemu z dvema ortogonalnima lastnima stanjema, ki ju označimo z $|0\rangle$ in $|1\rangle$. To lahko realiziramo z elektronom s spinom $s = \frac{1}{2}$, stanju s projekcijo spina $s_z = +\frac{\hbar}{2}$ pripišemo stanje $|0\rangle$, stanju s projekcijo spina $s_z = -\frac{\hbar}{2}$ pa $|1\rangle$. V nasprotju s klasičnim bitom lahko stanje sistema obstaja v superpoziciji $\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$, kjer je $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. V primeru elektrona to pomeni, da informacijo predstavlja orientacija spina. Torej je za zapis informacije pomembno znati nadzorovati orientacijo spina elektrona. To se da doseči s pomočjo geometrijskih faz. Manipulacije spina preko geometrijskih faz so zelo pripravne, saj je dobljena geometrijska faza odvisna le od geometrije prostora parametrov, tako da šumi iz okolice ne motijo računskih operacij. Ta metoda pa ima tudi slabosti, recimo znebiti se je treba dinamične faze. Ena od metod kontrole spina preko geometrijskih faz je vožnja elektrona po prostoru ob prisotnosti električnega polja. Imamo elektron [7], ki je ujet v harmonskem potencialu in se nahaja v električem polju, s katerim ima sklopljen spin preko Rashbove sklopitve. Stanje elektrona s projekcijo spina gor ima enako lastno energijo kot stanje s projekcijo spina dol, torej je obravnavani sistem degeneriran. Koordinata minimuma harmonskega potenciala se giblje v eni dimenziji, kar opiše funkcija $\xi(t)$. Velikost električnega polja je prav tako časovno odvisna. Sistem opiše naslednji Hamiltonian

$$H(t) = \frac{p^2}{2m^*}I + \frac{m^*\omega^2}{2}\left[x - \xi(t)\right]^2 I + \alpha(t)p\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}, \tag{18}$$

kjer je m^* efektivna masa elektrona, ω je frekvenca harmonskega potenciala, $\mathbf{n}$ je smer električnega polja, $\alpha(t)$ pa Rashbova konstanta, ki vsebuje velikost električnega polja. Časovno spreminjajoča parametra sistema sta torej položaj harmonskega potenciala in velikost električnega polja. S ciklično transformacijo sistema, torej parametri sistema ξ in α med transformacijo potujejo po zaključeni zanki v prostoru parametrov, lahko dosežemo obrat spina elektrona. Če je bil spin na začetku v stanju s spinom gor $|0\rangle$ in če električno polje kaže v smeri osi x, bo po koncu transformacije spin v stanju

$$|\psi\rangle = (\cos\phi I + i\sin\phi\sigma_x)\,|0\rangle = \cos\phi\,|0\rangle + i\sin\phi\,|1\rangle\,. \tag{19}$$

ϕ kot zasuka spina in je sorazmeren ploščini, ki jo oklepa zanka v prostoru parametrov.

7. Zaključek

V seminarju so bile predstavljene geometrijske faze v kvantni mehaniki. Berryjeva faza je geometrijska faza, ki jo pridobi sistem ob cikličnem adiabatskem procesu. Splošnejša faza je Aharonov-Anandanova geometrijska faza, ki se pojavi ob neadiabatskih procesih, ki so ciklični v projekcijskem prostoru Hilbertovega prostora. Za geometrijske faze je značilno, da niso odvisne od časa transformacije. V primeru Berryjeve faze so odvisne od linijskega integrala po prostoru parametrov, v primeru Aharonov-Anandanove faze pa od linijskega integrala v projekcijskem prostoru.

Področje geometrijskih faz postaja v zadnjem času vedno bolj aktualno. Razvoj se odvija na področju kvantnega računalništva, kjer se preko geometrijskih faz kontrolira informacijo, zapisano na kubitu.

LITERATURA

[1] E.A. Cornell, C.E. Wieman, M.R. Matthews, J.R. Ensher in M.H. Anderson, *Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor*, Science **269** (1995), 198–201.

[2] M. V. Berry, *Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes*, Proceedings of the Royal Society A **392** (1984).

[3] D. J. Griffiths, *Introduction To Quantum Mechanics*, Prentice Hall (1994).

[4] J. W. Zwanziger, M. Koenig, A. Pines, *Berry's Phase*, Department of Chemistry, University of California (1990).

[5] K. Durstberger, *Geometric Phases In Quantum Theory*, Universit"at Wien (2002).

[6] A. Kregar, *Aharonov-Bohm Effect*, Univerza v Ljubljani (2011).

[7] Aleš Navrat, *Geometric Phase In Quantum Theory*, Masaryk University (2006).

[8] Čadež, J. H. Jefferson, A. Ramšaky, *Exact Nonadiabatic Holonomic Transformations of Spin-Orbit Qubits*, Physical Review Letters **112** (2014)