FRAKTALNA DIMENZIJA

VESNA IRŠIČ

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 07.50.Hp, 01.65.+g

V članku je predstavljen zgodovinski razvoj teorije fraktalov in natančen opis primerov, kot so Cantorjeva množica, Kochova krivulja in trikotnik Sierpinskega. Sledi predstavitev topološke (male induktivne), samopodobnostne, škatlaste in fraktalne ali Hausdorffove dimenzije. Pri vsaki je navedenih tudi nekaj primerov uporabe na konkretnih fraktalih. Na koncu so razložene tudi povezave med različnimi dimenzijami.

FRACTAL DIMENSION

The article presents the historical development of the fractal theory and some examples of the fractals, such as Cantor set, Koch curve and Sierpinski triangle. Furthermore the article explains the definitions of topological (small inductive), self-similarity, box counting and fractal or Hausdorff dimension. There are also some examples of calculating those dimensions for different fractals. Some connections between those dimensions are shown in the end.

1. Uvod

Čeprav so množice s fraktalnimi lastnostmi poznali že prej, se je ime *fraktali* uveljavilo šele v drugi polovici 20. stoletja, ko ga je vpeljal matematik Benoit Mandelbrot, ki je fraktale definiral kot množice, katerih fraktalna oziroma Hausdorffova dimenzija preseže njihovo topološko dimenzijo in torej ni naravno število ([2]).

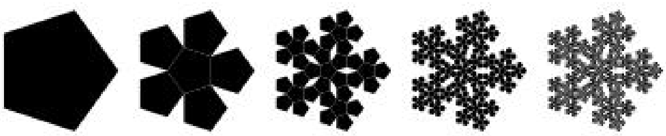
Fraktali nam pomagajo razumeti "geometrijo narave". Z evklidsko geometrijo zlahka preučujemo dele sveta, ki smo ga sami ustvarili – zgradbe, ceste, predmete ipd. Če naravo opazujemo in merimo na enak način naletimo na težave. Oglejmo si primer. Želimo izmeriti dolžino slovenske obale. Najprej to naredimo s 5 km dolgimi palicami. Dobimo nek približek. Ko dolžino izmerimo s palicami dolžine 1 km, dobimo večjo vrednost. Nato ponovimo s palicami dolžine 500 m in vrednost se še poveča. Lahko si predstavljamo, da bi se pri krajših palicah, ki bi lahko izmerile več podrobnosti, vrednosti le še povečevale. Ali to pomeni, da je dolžina slovenske obale neskončna? In kako naj jo pravzaprav izmerimo? S tem vprašanjem se je v 60. letih prejšnjega stoletja srečal tudi matematik Benoit Mandelbrot in o tem napisal članek z naslovom "Kako dolga je obala Velike Britanije?"

Neformalno fraktal razumemo kot množico, ki ima naslednje lastnosti:

- je samopodobna (kar pomeni, da so njene podmnožice enake ali vsaj podobne celoti),
- je nepravilne oblike (v evklidskem smislu) in nikjer diferenciabilna (če jo gledamo kot graf neke funkcije),
- tudi ko jo pogledamo pod povečavo ima še vedno enako veliko podrobnosti,
- njena definicija je pogosto preprosta in rekurzivna.

2. Zgodovinski razvoj in uporaba

Liki s fraktalnimi lastnostmi so matematike in tudi umetnike pritegnili že dolgo preden je matematik Benoit Mandelbrot vpeljal besedo *fraktal*. Okoli leta 1500 je nemški umetnik in matematik Albrecht Dürer zasnoval Dürerjeve petkotnike, ki imajo (če jih vrisujemo drugega v drugega v neskončnost) fraktalne lastnosti (slika 1).



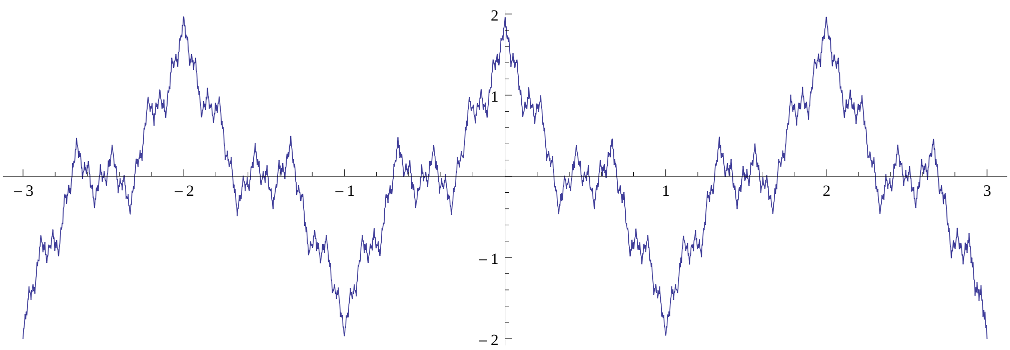
Slika 1. Z vrisovanjem petkotnikov drugega v drugega dobimo Dürerjeve petkotnike, ki jih poznamo že od 16. stoletja. Na sliki vidimo nekaj začetnih korakov generiranja končne slike. Lik, ki ga dobimo po neskončno iteracijah, ima vse lastnosti fraktalov - je samopodoben, vsebuje veliko podrobnosti, definiran je na preprost rekurziven način ...

V 17. stoletju je nemški matematik Gottfried Leibniz uvedel pojem rekurzivne samopodobnosti, ki je ena izmed značilnosti fraktalov. Po njem se je še nekaj matematikov ukvarjalo s tem pojmom, vendar niso prišli do pomembnejših odkritij.

Pomemben korak naprej je storil nemški matematik Karl Weierstrass, ki je leta 1872 predstavil zvezno funkcijo, ki v nobeni točki ni odvedljiva (in ti dve lastnosti tudi dokazal). Funkcijo, ki jo danes imenujemo tudi Weierstrassova funkcija, je definiral kot

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

kjer je $0 < a < 1$, b pozitivno liho celo število in $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Zveznost te funkcije zlahka dokažemo s pomočjo Weierstrassovega M-testa ([6]), dokaz neodvedljivosti pa je nekoliko težji. Kasneje je angleški matematik Godfrey Harold Hardy pokazal, da zvezno in nikjer diferenciabilno funkcijo dobimo tudi tako, da konstanti a in b zadoščata $0 < a < 1$ in $ab \geq 1$. Izkaže se, da je graf te funkcije fraktalne oblike, kot lahko vidimo na sliki 2.



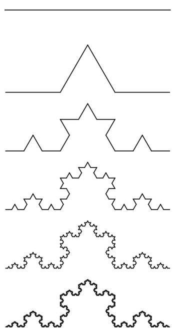
Slika 2. Graf Weierstrassove funkcije pri $a = 0.5$ in $b = 3$. Graf ima fraktalne lastnosti. Če pobližje pogledamo katerikoli del funkcije, spet vidimo podobno obliko in enako veliko podrobnosti kot na celotni sliki.

Naslednji zanimiv primer fraktala (čeprav takšnih množic takrat še niso tako imenovali) je objavil nemški matematik Georg Cantor. Tako imenovana Cantorjeva množica ima fraktalne lastnosti in jo dobimo kot neskončen presek zaprtih množic (slika 3). Več o njej najdemo v poglavju 3.1.

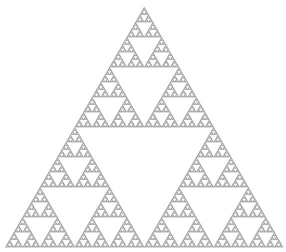
Leta 1904 je švedski matematik Niels Fabian Helge von Koch, nezadovoljen z Weierstrassovo analitično definicijo zvezne nikjer odvedljive funkcije, podal svojo, bolj geometrijsko verzijo takšne krivulje, ki jo danes poznamo pod imenom Kochova krivulja. Dobimo jo z neskončnim ponavljanjem "daljšanja in lomljenja" daljice (slika 4). Več o njej najdemo v poglavju 3.2.

Kmalu zatem je tudi poljski matematik Waclaw Sierpinski predstavil fraktalno strukturo, t. i. trikotnik Sierpinskega, ki ga dobimo tako, da iz začetnega polnega trikotnika izrezujemo manjše trikotnike v sredini (slika 5). Ko to ponavljamo v neskončnost, dobimo fraktalno obliko. Več o njej najdemo v poglavju 3.3.

Slika 3. Nekaj korakov generiranja Cantorjeve množice, ki jo je leta 1883 predstavil nemški matematik Georg Cantor. Ko pogledamo presek neskončno mnogo takšnih daljic, dobimo Cantorjevo množico.

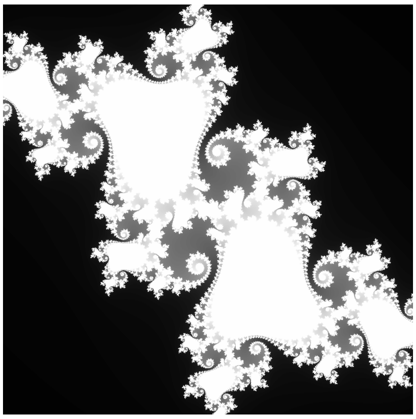


Slika 4. Nekaj korakov nastajanja Kochove krivulje, ki v nobeni točki ni diferenciabilna, vendar je povsod zvezna.



Slika 5. Trikotnik Sierpinskega je sebipodoben, saj ga lahko sestavimo iz štirih pomanjšanih kopij samega sebe.

Leta 1918 sta Gaston Julia in Pierre Fatou neodvisno prišla do rezultatov, ki opisujejo vedenje določenih kompleksnih iterabilnih funkcij in s tem opisala množice, ki jih danes uvrščamo med fraktale. Julia je opazoval kompleksno funkcijo in z njeno pomočjo konstruiral zaporedje kompleksnih števil. Vzel je začetno vrednost z_0 in izračunal člene zaporedje rekurzivno po formuli $z_n = z_{n-1}^2 + c$, kjer je $c \in \mathbb{C}$ neka izbrana konstanta. Dobljeno zaporedje tedaj konvergira h končni vrednosti ali divergira v neskončnost. Juliajeva množica je meja med začetnimi točkami, kjer zaporedje konvergira in točkami, kjer divergira v neskončnost (primer Juliajeve množice pri konstanti $c = -0.16 - 0.65i$ vidimo na sliki 6). Pogosto pri risanju Juliajeve množice začetne točke z_0 obarvamo z različnimi barvami, ki jih določimo glede na število korakov po katerih zaporedje zdivergira preko neke izbrane vrednosti. Omenimo lahko, da je slika Juliajeve množice seveda odvisna tudi od konstante c in da včasih dobimo povezane, včasih pa nepovezane množice (več lahko bralec najde v [1]).

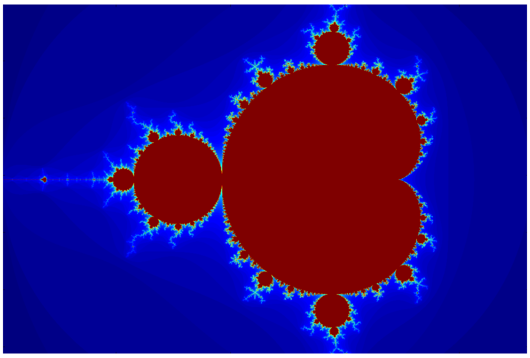


Slika 6. Juliajeva množica, ki jo dobimo pri konstanti $c = -0.16 - 0.65i$. Različni odtenki sive povejo, po koliko korakih začne zaporedje, ki je podano z rekurzivno zvezo $z_n = z_{n-1}^2 + c$, divergirati.

Istega leta je Felix Hausdorff razširil definicijo dimenzije, da dovoljuje tudi necele vrednosti, kar je bilo zelo pomembno za kasnejšo definicijo fraktalov.

Velik problem zgodnjih raziskovalcev fraktalov so bile težave z vizualizacijo. Takrat še niso poznali moderne računalniške grafike, zato so lahko skice fraktalov risali le na roke. Zato nekateri matematiki fraktalov, ki so jih odkrili, niso nikoli videli narisanih s tolikšnimi podrobnostmi, kot je to mogoče danes. Na primer Juliajevo množico je brez pomoči računalnika skoraj nemogoče risati.

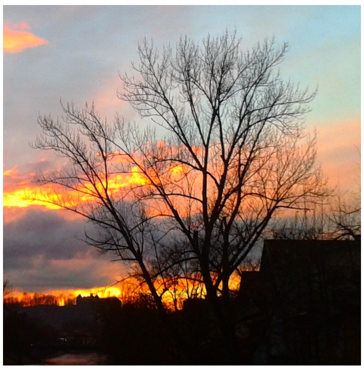
Oče teorije fraktalov je Benoit Mandelbrot, ki je že v 60. letih 20. stoletja pisal o samopodobnosti in se ukvarjal s problemom izmeritve dolžine obal kontinentov. Leta 1975 je vpeljal besedo fraktal, nekatere že znane fraktale ilustriral z računalnikom in predstavil nov fraktal – t. i. Mandelbrotovo množico, ki je množica vrednosti konstante c (glej opis Juliajeve množice), pri katerih je Juliajeva množica povezana (slika 7).



Slika 7. Mandelbrotova množica. Če bi posamezne dele množice pogledali pod povečavo, bi opazili podobnosti s celotno množico.

Znanstveniki se še danes ukvarjajo s preučevanjem fraktalov. Usmerjajo se predvsem v simulacije narave (gorskih verig, dreves, listov . . .). Vse raziskave so tesno povezane z računalnikom, s pomočjo katerega izdelujejo fraktalne slike. Tu so zelo pomembni iterirani funkcijski sistemi ali IFS (angl. iterated function system).

Fraktale najdemo v naravi kot oblike listov, oblakov, porečij, gorskih verig, obal, nekatere zelenjave (cvetača in brokoli), snežink, kristalov, dreves (slika 8), žil v telesu in barvnih vzorcih na živalih ([2]). Ugotovili so na primer, da je porazdelitev debelin debel dreves v celotnem gozdu enaka kot porazdelitev debelin vej na posameznem drevesu v tem gozdu. Tako lahko z analizo enega drevesa ocenijo koliko ogljikovega dioksida celoten gozd pretvori v kisik.



Slika 8. Veje drevesa spominjajo na zapleten fraktal. Če opazujemo zaporedje izraščanja vej, opazimo ponavljajoč vzorec.

Znanstveniki so odkrili zanimive možnosti uporabe fraktalov v tehnologiji, na primer pri oblikovanju anten, napovedovanju rasti mest, kompresiji slik, raziskovanju različnih omrežji ... Ugotovili so, da je fraktalna oblika anten ključna pri omogočanju sprejema več različnih frekvenc, kar je zelo uporabno na primer pri mobilnih telefonih. Poleg tega fraktalna oblika omogoči tudi manjšo velikost antene. Fraktale uporabljajo tudi v biologiji (npr. za napovedovanja širjenja bakterij ali raziskovanje rasti spužve), medicini, glasbi (generiranje glasbenih kompozicij s pomočjo fraktalnih vzorcev) in v slikarstvu. Slike s fraktalnimi lastnostmi je risal predvsem slikar Maurits Cornelis Escher. Fraktale uporabljajo tudi pri izdelovanju računalniških iger in v filmski industriji. Z njimi lahko generirajo celotne pokrajine, simulirajo izbruhe lave in podobne elemente akcijskih in znanstveno-fantastičnih filmov.

3. Primeri fraktalov

3.1 Cantorjeva množica

Cantorjevo množico C dobimo tako, da začnemo z zaprtim intervalom $C_0 = [0, 1]$, nato iz intervala izrežemo srednjo tretjino, tj. odprti interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Ostaneta zaprta intervala $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Postopek ponavljamo, torej na vsakem koraku iz preostalih intervalov izrežemo srednje tretjine. Tako dobimo na primer $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Cantorjevo množico C nato definiramo kot presek vseh takšnih množic C_n:

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

Na sliki 9 vidimo nekaj korakov generiranja množice.

Ob natančnejšem opazovanju množic C_n opazimo, da je vsaka izmed njih sestavljena iz 2^n enako velikih intervalov. Dolžine teh intervalov na n-tem koraku so ravno $\frac{1}{3^n}$, kar sledi iz konstrukcije Cantorjeve množice.

Slika 9. Nekaj korakov generiranja Cantorjeve množice, ki jo dobimo kot presek množic C_n. Izkaže se, da je Cantorjeva množica kompakten, popolnoma nepovezan metričen prostor brez izoliranih točk.

Trditev 1. *Cantorjeva množica ima naslednje lastnosti:*

(i) je popolnoma nepovezan kompakten metričen prostor brez izoliranih točk in

(ii) njena dolžina je enaka 0.

Dokaz. (i) Glej [5].

(ii) Dolžina izrezanih intervalov je

$$\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + \ldots = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots\right) = 1.$$

To pomeni, da je dolžina Cantorjeve množice enaka 0, čeprav vsebuje neštevno mnogo točk. ∎

Na primeru Cantorjeve množice si oglejmo nekaj karakterističnih lastnosti fraktalov. Cantorjeva množica je samopodobna: če namesto celote pogledamo le del na intervalu $[0, \frac{1}{3}]$, vidimo popolnoma enako sliko kot celota. Podobno je tudi na intervalih $[\frac{2}{3}, 1], [0, \frac{1}{9}], [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}], [0, \frac{1}{27}] \ldots$ Prav tako imajo vsi ti kosi, ko jih pobližje pogledamo, enako podrobnosti kot celota, saj se vzorec nadaljuje v neskončnost. Definirana je rekurzivno in njena definicija je povsem preprosta.

3.2 Kochovi krivulja in snežinka

Začnemo z daljico, ki jo v prvem koraku razdelimo na tri enake dele. Nato odstranimo srednji del in ga nadomestimo z dvema enako dolgima deloma, tako da tvorita trikotnik nad odstranjeno daljico. V naslednjem koraku enak postopek ponovimo na vsaki od dobljenih štirih daljic. Ta postopek ponavljamo v neskončnost (slika 4).

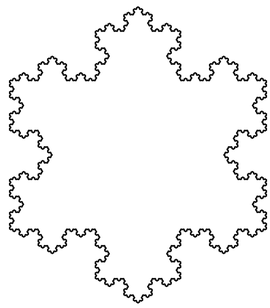
Zanimivo se je vprašati, kako dolga je dobljena krivulja. Na vsakem koraku se dolžina krivulje poveča za faktor $\frac{4}{3}$, torej je dolžina neskončna (ker geometrijska vrsta s koeficientom strogo večjim od 1 divergira). Podobno ugotovimo, da je dolžina krivulje med poljubnima točkama na krivulji neskončna.

Izračunajmo še ploščino lika, ki ga omejujeta Kochova krivulja in začetna daljica. V prvem koraku naj znaša ploščina S. V naslednjem koraku dodamo štiri trikotnike s stranicami za tretjino manj kot prejšnji, torej s ploščino $\frac{S}{3^2}$, v naslednjem dodamo 16 trikotnikov s ploščinami $\frac{S}{9^2}$. Če nadaljujemo razmislek, dobimo

$$\left(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \ldots\right) S = \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} S = \frac{9}{5} S,$$

kar je očitno končno. Hkrati velja tudi, da Kochova krivulja v nobeni točki ni odvedljiva in je samopodobna – če pogledamo le njen manjši del vidimo isti vzorec, ki pa še vedno vsebuje enako veliko podrobnosti.

Kochovo snežinko dobimo tako, da združimo tri Kochove krivulje tako, da začetne daljice tvorijo enakostranični trikotnik (slika 10). S pomočjo dejstev, ki smo jih izpeljali za Kochovo krivuljo zlahka vidimo, da je snežinka neskončno dolga sklenjena krivulja, ki oklepa končno ploščino.



Slika 10. Kochovo snežinko dobimo tako, da povežemo tri Kochove krivulje. Njena dolžina je neskončna, vendar oklepa končno ploščino.

3.3 Trikotnik Sierpinskega

Trikotnik Sierpinskega tvorimo tako, da iz originalnega trikotnika odstranimo narobe obrnjeno in za polovico pomanjšano kopijo trikotnika, ki jo dobimo tako, da povežemo razpolovišča vseh stranic. V naslednjem koraku to ponovimo na vsakem izmed preostalih trikotnikov. Nato postopek ponavljamo v neskončnost (slika 5).

V prvem koraku torej odstranimo $\frac{1}{4}$ celotne ploščine, v drugem koraku $3 \cdot \frac{1}{16}$, v tretjem $9 \cdot \frac{1}{4^3}$ in tako naprej. Če je začetna ploščina trikotnika enaka S, smo skupno odstranili

$$\left(\frac{1}{4} + 3\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 3^2\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots\right) S = \frac{S}{4}\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = S,$$

torej je ploščina trikotnika Sierpinskega enaka 0, čeprav vsebuje neštevno točk, podobno kot pri Cantorjevi množici.

Tudi trikotnik Sierpinskega je samopodoben. Če pobližje pogledamo manjši trikotnik znotraj njega, vidimo isti vzorec z enako veliko podrobnostmi.

4. Definicije dimenzije

Če želimo razumeti Mandelbrotovo definicijo fraktalov, navedeno v uvodu (poglavje 1)., moramo najprej definirati dimenzijo. Intuitivno si predstavljamo, da je dimenzija točke enaka 0, dimenzija daljice, premice, krožnice 1, dimenzija ravnine, ploskve 2, dimenzija kocke, telesa 3, dimenzija poljubnega prostora $\mathbb{R}^n$ enaka n in podobno.

Preden se lotimo definicij različnih dimenzij, si na primeru poglejmo v čem se običajno pojmovanje dimenzije pri fraktalih zatakne. Cantorjeva množica je popolnoma nepovezana, zato bi lahko pomislili, da ima dimenzijo 0. A hkrati obstaja zvezna surjekcija iz Cantorjeve množice na interval [0, 1] (posledica izreka Aleksandrova, glej [5]), ki ima dimenzijo 1. Kakšna je torej dimenzija Cantorjeve množice, 0 ali 1? Ali nekaj vmes? Na podobno težavo naletimo tudi pri Kochovi krivulji. Ker je krivulja, bi mislili, da je 1-dimenzionalna. Vendar je lega točke na daljici enolično določena z razdaljo točke od neke izbrane izhodiščne točke na daljici. Razdalja med poljubnima točkama na Kochovi krivulji je neskončna, zato to pri njej ne deluje. Kakšna je torej njena dimenzija? Opazimo tudi, da Kochova krivulja na nek način zapolnjuje prostor bolj kot navadna daljica, hkrati pa ne dovolj, da bi bila dvodimenzionalna. Podoben pojav zapolnjevanja prostora opazimo tudi pri trikotniku Sierpinskega in drugih fraktalih. Želja po rešitvi podobnih težav nas vodi v razširitev "intuitivne" definicije dimenzije, s katero bomo lahko opisali dimenzije fraktalov.

Da bo (fraktalna) dimenzija dobro definirana, jo želimo definirati tako, da bo veljalo sledeče:

(i) če je dimenzija množice naravno število, naj dobljena vrednost sovpada z običajnim pojmom dimenzije,

(ii) množice imajo lahko tudi necelo dimenzijo,

(iii) točke, končne in števne množice točk imajo dimenzijo 0.

Običajno za dobro definiranost dimenzije zahtevamo še dodatne pogoje ([3]), vendar se v tem članku ne bomo spuščali v takšne podrobnosti.

4.1 Topološka dimenzija

Točko na daljici lahko ujamemo v "ječo", če jo omejimo z dvema točkama (ki imata dimenzijo 0), zato lahko rečemo, da ima daljica dimenzijo 1. Podobno lahko točko v ravnini ujamemo v ječo, če jo omejimo s poljubno majhno krožnico s središčem v dani točki. Rob krožnice je sklenjena krivulja, zato ima podobno kot daljica dimenzijo 1. Ravnina ima tako dimenzijo 2. V prostoru lahko točko omejimo s poljubno majhno kroglo, katere rob je sfera, ki ima dimenzijo 2. Tako je dimenzija prostora enaka 3. S to idejo v mislih poskušamo definirati topološko dimenzijo. Najprej si bomo ogledali definicijo dimenzije 0, nato pa še splošno definicijo.

Definicija 1. Podmnožico metričnega prostora, ki je hkrati odprta in zaprta, imenujemo *odprto-zaprta množica.*

Definicija 2. Metrični prostor je *0-dimenzionalen*, če obstaja baza tega prostora, ki jo sestavljajo odprto-zaprte množice.

Primer 1. Vsaka končna množica točk v nekem metričnem prostoru ima diskretno topologijo, torej so vse točke odprte in zaprte hkrati, zato so kar vsi enojci baza iz odprto-zaprtih množic. Torej je končna množica 0-dimenzionalna.

Definicija 3. *Topološka dimenzija (mala induktivna dimenzija)* $\dim_T X$ množice X v metričnem prostoru je definirana induktivno:

- $\dim_T \emptyset = -1$

Za vsak $d \in \mathbb{N}_0$ je $\dim_T X \leq d$, če obstaja baza odprtih množic, ki je sestavljena iz množic, katerih meje imajo topološko dimenzijo strogo manjšo od d.

- Če je X neprazna in obstaja tak $d \geq 0$, da je $\dim_T X \leq d$ in $\dim_T X \nleq d-1$, je $\dim_T X = d$.
- Če ne obstaja $d \geq 0$, da je $\dim_T X \leq d$, je $\dim_T X = \infty$.

Opomba 1. Ker govorimo o metričnih prostorih, se lahko omejimo le na poljubno majhne krogle, ki seveda sestavljajo bazo prostora.

Hitro vidimo, da se ta definicija ujema s prej definirano dimenzijo 0. Prostor $X \neq \emptyset$ je po definiciji 2 0-dimenzionalen natanko tedaj, ko obstaja baza iz odprto-zaprtih množic. Vzemimo poljubno odprto-zaprto množico U. Ker je U odprta, je $U \cap \partial U = \emptyset$, kjer z ∂U označujemo mejo množice U. Ker je U zaprta, je $\partial U \subseteq U$. Od tod sledi, da je $\partial U = \emptyset$ in zato $\dim_T(\partial U) = -1$. Torej je po definiciji 3 $\dim_T X \leq 0$. Ker je $X \neq \emptyset$, je $\dim_T X \geq 0$. Sledi $\dim_T X = 0$. Analogno dokažemo še v drugo smer.

V skladu s to definicijo je dimenzija točke enaka 0, saj je presek meje poljubne okolice točke in točke same vedno prazen, torej ima dimenzijo -1, zato ima točka dimenzijo 0. S podobnim sklepom ugotovimo, da je dimenzija daljice 1, dimenzija ravnine 2, dimenzija prostora $\mathbb{R}^n$ enaka n in podobno. Definicija se torej sklada z običajno definicijo dimenzije in je vedno naravno število oziroma 0 ali -1.

Primer 2. Izračunajmo topološko dimenzijo Cantorjeve množice.

V skladu s konstrukcijo Cantorjeve množice, ki jo vidimo na sliki 9 in razlago v poglavju 3.1, je C_n sestavljena iz 2^n intervalov dolžine $\frac{1}{3^n}$. Označimo te intervale in zapišimo $C_n = \bigcup\limits_{k=1}^{2^n} I_{nk}$. Na primer, interval $I_{0,1} = [0,1]$, $I_{1,1} = [0, \frac{1}{3}]$ in $I_{1,2} = [\frac{2}{3}, 1]$. Tedaj je

$$\{C \cap I_{nk} \; ; \; n \in \mathbb{N}_0, k = 1, 2, \ldots, 2^n\} \cup \{\emptyset\}$$

baza za Cantorjevo množico C (to sledi iz definicije C). Ker so I_{nk} zaprti intervali, so vse bazne množice zaprte. Ker je razdalja med intervali $I_{nk} = [a_{nk}, b_{nk}]$ pri fiksnem n vsaj $\frac{1}{3^n}$, je $C \cap I_{nk} = C \cap (a_{nk} - \frac{1}{3^n}, b_{nk} + \frac{1}{3^n})$, zato so vse bazne množice tudi odprte. Ker ima C torej bazo iz odprto-zaprtih množic, ima topološko dimenzijo 0.

Opomba 2. Obstajajo še druge definicije topološke dimenzije (npr. velika induktivna dimenzija, krovna dimenzija ...), zato včasih v literaturi pod tem imenom najdemo drugačno definicijo.

4.2 Dimenzija samopodobnosti

Najprej natančno definirajmo pojem samopodobnosti.

Definicija 4. Množica je *samopodobna*, če jo lahko zapišemo kot unijo množic, ki so skrčene kopije celotne množice in se sekajo kvečjemu na robovih.

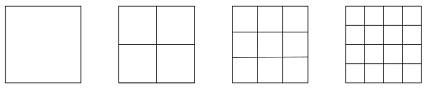
Množica je *popolnoma samopodobna*, če jo lahko zapišemo kot unijo množic, ki so vse za isti faktor skrčene kopije celotne množice in se sekajo kvečjemu na robovih.

Če upoštevamo lastnost popolne samopodobnosti, lahko pridemo do (predvsem za računanje) preproste definicije dimenzije.

Osnovno idejo si oglejmo na primeru polnega kvadrata, ki je seveda dvodimenzionalen. Kvadrat lahko razdelimo na štiri manjše kvadrate, ki so vsi ravno za polovico manjši od originala. Podobno ga lahko razdelimo na 9 za tretjino pomanjšanih kvadratov ali na 16 za četrtino pomanjšanih kvadratov (slika 11). Če z N označimo število manjših kopij, ki sestavljajo celoten lik in faktor skrčitve s f, opazimo relacijo

$$N = \left(\frac{1}{f}\right)^2.$$

Že tu naj omenimo, da bo faktor skrčitve f običajno strogo manjši od 1. Če bi bil večji od 1, bi šlo namreč za razteg množice.



Slika 11. Delitve kvadrata na manjše, enako velike kose, katerih unija je cel kvardat. Kosi se ne smejo prekrivati.

Podobno lahko razmislimo za tridimenzionalno kocko, ki jo lahko razdelimo na osem za polovico manjših kock ($N = 8$ in $f = \frac{1}{2}$) ali na 27 za tretjino pomanjšanih kock ($N = 27$ in $f = \frac{1}{3}$). Pri enakih oznakah kot prej tu opazimo

$$N = \left(\frac{1}{f}\right)^3.$$

Obe formuli lahko z uporabo preprostega sklepanja in nekaj evklidske geometrije tudi izpeljemo. Vidimo, da eksponent pri $\frac{1}{f}$ izraža dimenzijo objekta.

Če to posplošimo, dobimo

$$N = \left(\frac{1}{f}\right)^D \quad \text{oz.} \quad D = \frac{\log(N)}{\log(\frac{1}{f})},$$

kjer N označuje število manjših kopij, ki sestavljajo celoten objekt, f faktor skrčitve teh manjših kosov in D dimenzijo objekta. V skladu s tem definiramo:

Definicija 5. Naj bo množica X popolnoma samopodobna in sestavljena iz N manjših kopij, ki so za faktor f skrčene celotne množice. Tedaj definiramo *dimenzijo samopodobnosti (angl. self-similarity dimension)* kot

$$\dim_S(X) = \frac{\log N}{\log(\frac{1}{f})}.$$

Slabost te definicije je, da lahko z njo računamo le dimenzije popolnoma samopodobnih fraktalov, prednost pa, da je račun veliko preprostejši kot pri kasneje definiranih dimenzijah. Oglejmo si nekaj primerov.

Primer 3. (1) Izračunajmo dimenzijo samopodobnosti za Cantorjevo množico.

Cantorjeva množica C je sestavljena iz dveh popolnoma enakih kopij sebe, ki sta pomanjšani za tretjino. Torej je $N = 2$ in $f = \frac{1}{3}$. Zato

$$\dim_S(C) = \frac{\log(2)}{\log(3)} \approx 0,6309.$$

(2) Izračunajmo dimenzijo samopodobnosti za Kochovo krivuljo.

Kochova krivulja K je sestavljena iz štirih popolnoma enakih kopij sebe, ki so pomanjšane za tretjino. Torej je $N = 4$ in $f = \frac{1}{3}$. Zato

$$\dim_S(K) = \frac{\log(4)}{\log(3)} \approx 1,2619.$$

(3) Izračunajmo dimenzijo samopodobnosti za trikotnik Sierpinskega.

Trikotnik Sierpinskega S je sestavljen iz treh popolnoma enakih kopij sebe, ki so pomanjšane za polovico. Torej je $N = 3$ in $f = \frac{1}{2}$. Zato

$$\dim_S(T) = \frac{\log(3)}{\log(2)} \approx 1,5850.$$

Na podlagi opisanih primerov vidimo, da imajo nekateri fraktali necele dimenzije in torej na nek način bolj zapolnjujejo prostor kot navadne daljice, kar smo slutili že v uvodu poglavja o dimenzijah (glej poglavje 4.).

4.3 Škatlasta dimenzija

Naj bo $X \subset \mathbb{R}^n$. Prostor $\mathbb{R}^n$ razdelimo na kvadratno mrežo. Nato preštejemo število kock, ki sekajo množico X. Ko manjšamo širino mreže na nek način dobimo približek za dimenzijo množice X, saj ocenimo (ne)pravilnost njene oblike. Od tu izhajata ideja in ime naslednje dimenzije, ki nam pove, kako se število kock iz mreže, ki jih potrebujemo za pokritje, spreminja z velikostjo mreže. Ideja je podobna kot pri dimenziji samopodobnosti, le da smo jo posplošili tudi na množice, ki niso popolnoma samopodobne. Enotski interval lahko na primer pokrijemo z $N_\varepsilon(K_1) = \dfrac{1}{\varepsilon}$ kockami premera ε, enotski kvadrat z $N_\varepsilon(K_2) = \dfrac{1}{\varepsilon^2}$, enotsko kocko z $N_\varepsilon(K_3) = \dfrac{1}{\varepsilon^3}$, ... Če vzamemo, da eksponent v imenovalcu predstavlja dimenzijo D, bi v splošnem dobili formulo

$$N_\varepsilon(K) = \frac{1}{\varepsilon^D}.$$

Po logaritmiranju pa

$$D = \frac{\log N_\varepsilon(K)}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}.$$

V skladu s to (zelo neformalno) idejo definiramo:

Definicija 6. Naj bo X podmnožica nekega metričnega prostora, $\varepsilon > 0$ in $N_\varepsilon(X)$ najmanjše število krogel s premerom ε, ki jih potrebujemo, da pokrijemo X. *Zgornjo in spodnjo škatlasto dimenzijo* definiramo kot

$$\begin{aligned}
\overline{\dim}_B X &= \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N_\varepsilon(X)}{\log(\frac{1}{\varepsilon})} \\
\underline{\dim}_B X &= \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N_\varepsilon(X)}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}
\end{aligned}$$

Če sta ti vrednosti enaki, definiramo *škatlasto dimenzijo (angl. box counting dimension)* kot

$$\dim_B X = \overline{\dim}_B X = \underline{\dim}_B X.$$

Opomba 3. Ker

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N_\varepsilon(X)}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}$$

ne obstaja vedno, smo v definiciji posebej definirali zgornjo in spodnjo dimenzijo.

Opomba 4. Obstaja več ekvivalentnih definicij škatlaste dimenzije. Namesto števila krogel s premerom ε lahko gledamo tudi najmanjše število odprtih množic z diametrom pod ε ali najmanjše število kock iz mreže širine ε, ki jih potrebujemo, da pokrijemo množico, ali pa največje število disjunktnih krogel danega radija, ki imajo središča v X.

Poglejmo si, če definicija na preprostih množicah deluje tako kot pričakujemo. Točko lahko za poljubno majhen ε pokrijemo z eno kroglo. Ker je $\log 1 = 0$, je škatlasta dimenzija točke enaka 0.

Daljico D dolžine d lahko pokrijemo vsaj z $\left\lceil \frac{d}{\frac{\varepsilon}{2}} \right\rceil \leq \frac{2d}{\varepsilon} + 1$ kroglami premera ε (če so središča krogel na med sebojni razdalji $\frac{\varepsilon}{2}$ in razporejena po celotni daljici) in najmanj z $\left\lceil \frac{d}{\varepsilon} \right\rceil \geq \frac{d}{\varepsilon}$ kroglami (če so središča krogel na med sebojni razdalji ε in razporejena po celotni daljici). Torej je $\frac{d}{\varepsilon} \leq N_\varepsilon(D) \leq \frac{2d}{\varepsilon} + 1$, od koder lahko izračunamo

$$1 \leq \underline{\dim}_B D \leq \overline{\dim}_B D \leq 1,$$

zato je škatlasta dimenzija daljice enaka 1.

Podobno lahko vidimo, da se tudi na drugih objektih ta definicija sklada z običajnim dojemanjem dimenzije, vendar hkrati dovoljuje tudi necele vrednosti, kot bomo videli iz naslednjega primera.

Primer 4. Izračunajmo škatlasto dimenzijo Cantorjeve množice.

Iz definicije Cantorjeve množice C in razlage v poglavju 3.1 sledi, da jo lahko pokrijemo z 2^k intervali dolžine $\frac{1}{3^k}$ preprosto tako, da vsakega izmed 2^k intervalov, ki sestavljajo množico C_k pokrijemo z intervalom dolžine $\frac{1}{3^k}$, kar je ravno enako njegovi dolžini. Vzemimo $3^{-k} < \varepsilon \leq 3^{-k+1}$. Tedaj je $N_\varepsilon(C) \leq 2^k$. Od tod sledi

$$\overline{\dim}_B C = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N_\varepsilon(C)}{-\log \varepsilon} \leq \limsup_{k \to \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Nato ugotovimo, da če je $3^{-k} < \varepsilon \leq 3^{-k+1}$, vsak interval dolžine ε seka kvečjemu dva intervala dolžine 3^{-k} v C_k (vsaka dva intervala v C_k sta vsaj za 3^{-k} narazen in dolžine 3^{-k}). Zato je $N_\varepsilon(C) \geq \frac{2^k}{2} = 2^{k-1}$. Zato

$$\underline{\dim}_B C = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N_\varepsilon(C)}{-\log \varepsilon} \geq \liminf_{k \to \infty} \frac{\log 2^{k-1}}{\log 3^k} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Od tod pa sledi, da sta zgornja in spodnja škatlasta dimenzija enaki in zato je

$$\dim_B C = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Vendar želimo, da za ustrezno definicijo dimenzije velja tudi, da je dimenzija števne množice točk enaka nič. Izkaže se, da to za škatlasto dimenzijo v splošnem ne velja.

Trditev 2. *Obstaja števna množica točk X, za katero je $dim_B X \neq 0$.*

Dokaz. Vzemimo
$$X = \left\{ \frac{1}{n} \,;\, n \geq 1 \right\} \cup \{0\}$$
in $1 > \varepsilon > 0$. Opazimo, da je za $n \geq 2$ razdalja med točkama $\frac{1}{n}$ in $\frac{1}{n-1}$ enaka $\frac{1}{n(n-1)}$. Obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $\dfrac{1}{n_0(n_0+1)} \leq \varepsilon < \dfrac{1}{n_0(n_0-1)}$. Tedaj so točke $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n_0}\}$ med seboj oddaljene vsaj za ε, zato potrebujemo n_0 krogel, da jih pokrijemo.

Množico $[0, \frac{1}{n_0}] \cap X$ lahko pokrijemo z $n_0 + 1$ kroglami, ker je $\frac{1}{n_0(n_0+1)} \leq \varepsilon$. Preostanek množice X sestavlja $n_0 - 1$ točk in vsako od teh lahko pokrijemo še z eno množico. Torej skupaj potrebujemo $2n_0$ množic.

Skupaj torej dobimo oceno
$$n_0 \leq N(\varepsilon) \leq 2n_0.$$
S pomočjo vsega tega lahko ocenimo, da je
$$\frac{\log n_0}{\log n_0(n_0+1)} \leq \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \leq \frac{\log(2n_0)}{\log n_0(n_0-1)}.$$
Limita leve in desne strani neenakosti sta enaki $\frac{1}{2}$, zato je po pravilu sendvič ([6]) tudi limita izraza $\dfrac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$, ko gre $\varepsilon \to 0$ oziroma $n_0 \to \infty$, enaka $\frac{1}{2}$, torej velja $\dim_B(X) = \frac{1}{2} \neq 0$. ∎

Škatlasta dimenzija je sicer zelo uporabna za računanje dimenzij različnih množic (tudi takšnih, ki niso samopodobne), saj obstaja veliko ekvivalentnih definicij in lahko vsakič izberemo najprimernejšo za obravnavano množico. Poleg tega so vse definicije precej preproste za računanje.

Vendar sploh ni nujno, da škatlasta dimenzija vedno obstaja. Težavo povzročajo tudi števne množice, katerih škatlasta dimenzija je različna od nič. V želji, da bi vendarle našli ustrezno definicijo dimenzije, si poglejmo t. i. Hausdorffovo dimenzijo.

4.4 Hausdorffova ali fraktalna dimenzija

Da bomo lažje razumeli sledeče definicije, si najprej na preprostih in znanih primerih oglejmo nekaj značilnosti dolžine, površine in prostornine. Pri tem se zavedajmo, da so dolžina, površina in prostornina le različna imena za merjenje "velikosti, mere" množice v različnih evklidskih prostorih. Daljica, ki jo opazujemo v $\mathbb{R}$ ima neko dolžino, ko jo gledamo v $\mathbb{R}^2$ je njena ploščina 0, v $\mathbb{R}^3$ je njen volumen 0. Pričakujemo, da bo dimenzija daljice enaka 1, kar je ravno eksponent pri $\mathbb{R}^1$, to je prostor, kjer ima daljica ravno še neničelno "velikost". Če enotski kvadrat opazujemo v $\mathbb{R}^2$ ima ploščino 1, njegov volumen v $\mathbb{R}^3$ pa je enak 0. Pričakujemo, da bo dimenzija kvadrata enaka 2, kar je ravno eksponent pri $\mathbb{R}^2$, to je prostor, kjer ima kvadrat ravno še neničelno "velikost". Opazimo torej, da je velikost oz. mera množice odvisna od ambientnega prostora v katerem jo opazujemo. Zato je smiselno definirati neko mero, ki bo odvisna od dimenzije ambientnega prostora, dimenzijo množice pa kot mejno vrednost, preden velikost množice pade na nič.

Definicija 7. Naj bo X podmnožica 2-števnega metričnega prostora. Za realni števili $s, \delta > 0$ definiramo
$$H^s_\delta(X) = \inf \mathcal{H}^s_\delta(X) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diam} U_i)^s \,;\, \{U_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ je odprto pokritje } X, \text{ kjer } \mathrm{diam} U_i < \delta \right\}.$$

Nato definiramo *s-dimenzionalno Hausdorffovo mero* kot

$$H^s(X) = \lim_{\delta \searrow 0} H^s_\delta(X) = \sup_{\delta > 0} H^s_\delta(X) \in [0, \infty].$$

Definicija je dobra le za množice, ki imajo kakšno števno pokritje. Razmislimo še, če je definicija dimenzije kot supremuma dobra, torej če je res ekvivalentno računati $H^s(X)$ z limito in supremumom. Če je $\delta_1 < \delta_2$, so seveda pokritja s premeri pod δ_1 hkrati tudi pokritja s premeri pod δ_2, zato so v $\mathcal{H}^s_{\delta_2}$ zavzete že vse vrednosti iz $\mathcal{H}^s_{\delta_1}$. V $\mathcal{H}^s_{\delta_2}$ lahko nastopajo še kakšne druge vrednosti, ki so lahko tudi manjše od vrednosti v $\mathcal{H}^s_{\delta_1}$. Ker gledamo infimum, je zato seveda $H^s_{\delta_1} \geq H^s_{\delta_2}$.

Oglejmo si, kaj se zgodi, če spreminjamo vrednost s. Brez škode za splošnost je $\delta < 1$ (saj bomo kasneje gledali limito, ko gre $\delta \to 0$). Po definiciji je

$$H^s_\delta(X) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diam} U_i)^s \,;\, \{U_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ je odprto pokritje } X, \text{kjer } \mathrm{diam} U_i < \delta \right\}.$$

Ker je $\mathrm{diam} U_i < \delta < 1$, je H^s_δ padajoča funkcija s. Zato enako velja tudi za H^s.

Naj bosta $0 < s < t$ realni števili in $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ poljubno števno pokritje X, za katerega velja $\mathrm{diam} U_i < \delta$ za vse i. Tedaj je $(\mathrm{diam} U_i)^t \leq \delta^{t-s} \cdot (\mathrm{diam} U_i)^s$, zato je

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diam} U_i)^t &\leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diam} U_i)^s \\ 0 \leq H^t_\delta(X) &\leq \delta^{t-s} H^s_\delta(X) \end{aligned}$$

Poglejmo si zdaj limito te neenakosti, ko gre $\delta \to 0$. Če je $H^s(X) < \infty$ (torej končna), je po pravilu sendvič (glej [6]) $H^t(X) = 0$. Torej obstaja kritična vrednost s, kjer se $H^s(X)$ spremeni iz ∞ v 0. Lahko pa se tudi zgodi, da takšna vrednost ne obstaja: potem je $H^s(X) = \infty$ za vse vrednosti s. To kritično vrednost vzamemo za definicijo dimenzije množice X (če takšna vrednost ne obstaja, bomo rekli, da je dimenzija enaka neskončno).

Če je $H^t(X) > 0$ lahko podobno kot prej sklepamo, da mora biti $H^s(X) = \infty$, saj je $\lim\limits_{\delta \to 0} \delta^{t-s} = 0$ in mora biti drugi faktor na desni strani neenakosti neomejen, sicer bi bila limita produkta enaka 0.

Pravkar smo izpeljali naslednjo trditev:

Trditev 3. *Naj bo X podmnožica metričnega prostora, ki jo lahko pokrijemo s števno množicami. Naj bo $0 < s < t$. Tedaj velja:*

(1) Če je $H^s(X) < \infty$, je $H^t(X) = 0$.

(2) Če je $H^t(X) > 0$, je $H^s(X) = \infty$.

Definicija 8. Naj bo X podmnožica metričnega prostora. *Hausdorffovo (ali fraktalno) dimenzijo* definiramo kot

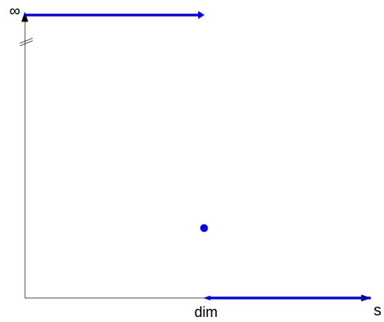
$$\dim_H(X) = \inf\{s \,;\, H^s(X) = 0\} = \sup\{s \,;\, H^s(X) = \infty\} \in [0, \infty].$$

Izkaže se, da ta definicija ustreza vsem zahtevam za dobro definiranost dimenzije. Seveda se lahko zgodi, da sploh ne obstaja vrednost s, da bo $H^s(X) \neq \infty$. V tem primeru bo dimenzija enaka ∞. Pri računanju dimenzije na konkretnih primerih običajno iščemo kritično vrednost s, kjer H^s nima ne ničelne in ne neskončne vrednosti (slika 12).

Brez dokaza navedimo nekaj lastnosti Hausdorffove mere.

Trditev 4. *(1) Če sta A, B disjunktni množici in velja $X = A \cup B$, je*

$$H^s(X) = H^s(A) + H^s(B).$$



Slika 12. Primer grafa funkcije $H^s(X)$ v odvisnosti od s. Vrednost Hausdorffove mere je najprej neskončno, potem lahko v neki točki pade na končno vrednost, od tam naprej pa bo gotovo ves čas enaka 0. Mejno vrednost, ko mera pade iz neskončno na 0, vzamemo za definicijo dimenzije.

(2) Za $\lambda > 0$ velja

$$H^s(\lambda X) = \lambda^s \cdot H^s(X).$$

Primer 5. Izračunajmo Hausdorffovo dimenzijo Cantorjeve množice.

Cantorjevo množico C lahko razdelimo na disjunktno unijo dveh kompaktnih podmnožic $C_0 = C \cap [0, \frac{1}{3}]$ in $C_2 = C \cap [\frac{2}{3}, 1]$, ki sta obe ravno za tretjino pomanjšani kopiji celotne množice C. Denimo, da ima C končno dimenzijo. Iščemo vrednost s, da bo $H^s(C) \neq 0$ in $H^s(C) \neq \infty$, torej tisto mejno vrednost, ki nam bo dala dimenzijo. S pomočjo rezultatov trditve 4 sledi

$$\begin{aligned} H^s(C) &= H^s(C_0) + H^s(C_2) = \\ &= H^s\left(\frac{1}{3}C\right) + H^s\left(\frac{1}{3}C\right) = \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^s \cdot H^s(C) \end{aligned}$$

Ker $H^s(C)$ ni niti 0 niti ∞, lahko delimo s $H^s(C)$ in dobimo

$$\begin{aligned} 1 &= 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^s \\ 2 &= 3^s \\ s &= \log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3} \end{aligned}$$

Torej je

$$\dim_H C = \frac{\log 2}{\log 3},$$

kar je enako dimenziji samopodobnosti za Cantorjevo množico, ki smo jo izračunali v poglavju 4.2. Kot zanimivost omenimo, da lahko izračunamo, da je $H^{\dim_H C}(C) = 1$ in torej res končna od nič različna vrednost ([3]), s čimer je celoten postopek reševanja končno utemeljen.

Zdaj ko smo spoznali pojma topološke in fraktalne dimenzije, lahko končno podamo tudi Mandelbrotovo definicijo fraktalov.

Definicija 9 (Mandelbrotova definicija fraktala). *Fraktal je metrični prostor F, za katerega velja*

$$\dim_T F < \dim_H F.$$

Primer 6. Za primer Cantorjeve množice smo dokazali, da je

$$\dim_T C = 0 < \frac{\log 2}{\log 3} = \dim_H C,$$

torej je Cantorjeva množica res fraktal.

4.5 Povezava med različnimi dimenzijami

Izkaže se, da dimenzija samopodobnosti za popolnoma samopodobne fraktale sovpada s Hausdorffovo dimenzijo, zato lahko fraktalno dimenzijo takšnih fraktalov določamo na bolj preprost način.

Pomembna ugotovitev je tudi, da škatlasta dimenzija določa zgornjo mejo za Hausdorffovo dimenzijo. Za X podmnožico metričnega prostora velja

$$\dim_H X \leq \dim_B X.$$

Dokaz najdemo v [3].

Velja tudi, da je topološka (mala induktivna) dimenzija največja spodnja meja za Hausdorffovo dimenzijo. Za X, ki je separabilen metričen prostor, velja

$$\dim_T X = \inf\{\dim_H Y \ ; \ Y \text{ je homeomorfen } X\}.$$

Skico dokaza najdemo v [4].

Če je za nek fraktal lažje izračunati dimenzijo samopodobnosti in škatlasto dimenzijo, lahko z njuno pomočjo dobimo vsaj neko oceno za fraktalno oziroma Hausdorffovo dimenzijo in mogoče ugotovimo ali je končna ali neskončna. V splošnem pa se, če želimo dobiti fraktalno dimenzijo lika, računanju Hausdorffove dimenzije ne moremo izogniti.

LITERATURA

[1] A. J. Crilly, R. A. Earnshaw in H. Jones, *Fractals and Chaos*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[2] *Fractal*, [ogled 1. 3. 2014], dostopno na `http://en.wikipedia.org/wiki/Fractal`.

[3] E. Pearse, *An introduction to dimension theory and fractal geometry: fractal dimensions and measures*, [ogled 2. 3. 2014], dostopno na `http://www.math.cornell.edu/~erin/docs/dimension.pdf`.

[4] D. Bučinel, *Topološka in fraktalna dimenzija*, diplomsko delo, Pedagoška fakulteta, Univerza v Ljubljani, 1993.

[5] J. Mrčun, *Topologija*, DMFA - založništvo, Ljubljana, 2008.

[6] J. Globevnik in M. Brojan, *Analiza I*, DMFA - založništvo, Ljubljana, 2010.