

KVANTNA PREPLETENOST KOT MERA INFORMACIJE

TILEN ŠKET

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Članek obravnava pojav kvantne prepletenosti večdelčnih valovnih funkcij in vpelje von Neumannovo entropijo kot mero za prepletenost. Ukvarja se s skalirnimi režimi entropije prepletenosti v odvisnosti od velikosti sistema. Vpelje način simuliranja večdelčnih prepletenih sistemov na kvantnem računalniku in opiše fazni prehod med skalirnimi režimi entropije prepletenosti povzročen z meritvami sistema ter predstavi eksperimentalno izvedbo takšnega faznega prehoda.

QUANTUM ENTANGLEMENT AS A MEASURE OF INFORMATION

The article discusses the phenomenon of quantum entanglement in many-body wave functions and introduces von Neumann entropy as a measure of entanglement. It deals with the scaling regimes of entanglement entropy depending on the size of the system. It introduces a method for simulating many-body entangled systems on a quantum computer and describes the phase transition between entanglement entropy scaling regimes induced by system measurements, and presents an experimental implementation of such a phase transition.

1. Uvod

Kvantna prepletenost je skozi zgodovino begala še tako velike ume. Najbolj znan je verjetno prav izvorni članek, ki opisuje EPR paradoks, z avtorstvom Alberta Einsteina. Sam je ta pojav imenoval kar *spooky action at a distance*, kar bi se nekako prevedlo kot srhljivo delovanje na daljavo. Čeprav danes prepletenost razumemo veliko bolje kot ob začetkih kvantne mehanike, ostaja atraktivna tema za raziskovanje. V članku bomo kot primer sodobnih raziskav predstavili manipulacijo prepletenosti v kvantnem računalniku [1, 2, 3]. Pomembnost koncepta prepletenosti je potrdila tudi Nobelova nagrada iz leta 2022, ki je bila podeljena za eksperimentalno potrditev kršitve Bellovih neenačb s prepletenimi fotoni.

2. Prepletenost dveh kubitov

Zamislimo si stanje dveh delcev, ki ima skupno vrtilno in gibalno količino enako nič. Takšno stanje lahko zapišemo kot singlet

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_a |\downarrow\rangle_b - |\downarrow\rangle_a |\uparrow\rangle_b) , \quad (1)$$

kjer se oznaki a in b ustrezno nanašata na prvi in drugi delec. Imenujemo ga Bellov par. Zapisano stanje nato razpade na dva delca, ki v nekem trenutku odletita v nasprotnih smereh, saj imata nasprotni gibalni količini. Na delca nato ne delujemo z nobeno zunanjo silo toliko časa, da odletita dovolj daleč narazen, da lahko po lokalnosti trdimo, da medsebojnih interakcij med njima ni več. Na tej točki bomo merili projekciji njunih vrtilnih količin s Stern-Gerlachovima napravama. Oba delca imata vrtilno količino $\frac{1}{2}$, torej sta možna rezultata posamezne meritve, v smeri merilnih naprav, gor in dol. Napravi sta orientirani v smereh z_a in z_b . Poskrbeti moramo, da se orientaciji ujemata, torej da sta smerna normirana vektorja, na katera projeciramo vrtilno količino, enaka $\mathbf{n}_a = \mathbf{n}_b$. Če za trenutek pozabimo začetno stanje teh dveh delcev in upoštevamo le dve neodvisni Stern-Gerlach meritvi, potem so vsi možni rezultati

$$|\uparrow\rangle_a |\uparrow\rangle_b , \quad |\uparrow\rangle_a |\downarrow\rangle_b , \quad |\downarrow\rangle_a |\uparrow\rangle_b , \quad |\downarrow\rangle_a |\downarrow\rangle_b . \quad (2)$$

V našem primeru je nekoliko drugače, saj nam začetno stanje ne dovoljuje vseh štirih možnih izmerkov. In sicer sta dovoljena le $|\uparrow\rangle_a |\downarrow\rangle_b$ in $|\downarrow\rangle_a |\uparrow\rangle_b$, kjer sta verjetnosti rezultatov 50%. Recimo, da za delec a izmerimo vrtilno količino $|\uparrow\rangle_a$. Takšen rezultat je možen le v stanju $|\uparrow\rangle_a |\downarrow\rangle_b$, kar pomeni, da mora rezultat meritve za delec b biti $|\downarrow\rangle_b$ v 100% primerih. Kadarkoli kasneje torej izmerimo vrtilno količino delca b , bo rezultat enak, ker poznamo stanje delca natančno in nanj ne delujejo zunanje sile [4].

Sedaj bi poskus lahko interpretirali popolnoma klasično. Ključna razlika je v tem, da sta vrtilni količini obeh delcev v klasičnem razmišljanju določeni v trenutku razpada. V našem primeru, po Københavnski interpretaciji, pa meritev sama povzroči določitev stanja. Torej se ob meritvi delca a določi tudi stanje delca b in to ne glede na njuno medsebojno oddaljenost. Ta trditev lahko bralca zmoti z vprašanjem, ali smo s tem prekršili načelo relativnosti in imamo potovanje hitreje od svetlobe. Odgovor je seveda ne. Ob meritvi delca a fizik, ki to meritev opravi, pozna stanje delca b , vendar te informacije svojemu kolegu pri napravi b nikakor ne more sporočiti s hitrostjo, večjo od svetlobne.

Pojav, opisan v tem poglavju, se imenuje kvantna prepletenost na primeru dveh kubitov. Kvantna je, saj v klasični fiziki ni analognega pojava. Delca sta kubita, ker je vsako možno stanje le linearna kombinacija dveh baznih stanj, ki ju lahko poimenujemo $|\uparrow\rangle$ in $|\downarrow\rangle$ ali pa $|0\rangle$ in $|1\rangle$, kar spominja na stanji klasičnega bita. Skozi članek se bomo ukvarjali s karakterizacijo prepletenosti pri večdelčnih valovnih funkcijah, torej bo prepletenost vseskozi prisotna.

3. Večdelčni sistemi

V prejšnjem poglavju smo se srečali s pojmom prepletenosti na primeru Bellovega para. Za takšno stanje sta potrebna dva delca, ki ju obravnavamo kvantno. Prepletenost pa ni omejena le na dva delca, ampak vemo, da je lahko prepleten tudi večdelčni sistem. Valovno funkcijo takšnega sistema lahko zapišemo kot tenzorski produkt enodelčnih valovnih funkcij. Tudi bazo takšnega sistema N delcev zapišemo s tenzorskim produktom baz posameznih delcev in tako dobimo produktno bazo. Generična valovna funkcija N delcev zapisana v produktni bazi je

$$|\psi\rangle = \sum c_{s_1, s_2, \dots, s_N} |s_1\rangle \otimes |s_2\rangle \otimes \dots \otimes |s_N\rangle ,$$

kjer je s_i stanje i -tega delca. Za koeficiente velja Bornovo pravilo, torej je kvadrat absolutne vrednosti koeficienta nekega stanja enak verjetnosti, da to stanje izmerimo. Za krajši zapis se tenzorski produkti pogosto spuščajo ali pa se stanja zapišejo kar v en ket

$$|\psi\rangle = \sum c_{s_1, s_2, \dots, s_N} |s_1\rangle |s_2\rangle \dots |s_N\rangle = \sum c_{s_1, s_2, \dots, s_N} |s_1 s_2 \dots s_N\rangle .$$

Zapišimo v večdelčni produktni bazi prej obravnavani Bellov par. Baza mora vsebovati vsa možna stanja za vsak delec pri poljubni izbiri stanj za ostale delce. Za obravnavani primer smo bazo dejansko že zapisali v (2). Preostane nam le še, da iz enačbe (1) določimo koeficiente naše valovne funkcije. Te lahko neposredno preberemo, saj opazimo, da je naš singlet že zapisan v produktni bazi, le da sta dva koeficienta enaka nič. Torej dobimo

$$|\psi\rangle = 0 |\uparrow\rangle_a |\uparrow\rangle_b + \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle_a |\downarrow\rangle_b - \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle_a |\uparrow\rangle_b + 0 |\downarrow\rangle_a |\downarrow\rangle_b .$$

3.1 Schmidtova dekompozicija

V prejšnjem poglavju smo zapisali generično večdelčno valovno funkcijo v produktni bazi. Sedaj nas zanima, kakšna je prepletenost med njenima podsistemoma A in B. V vsakem izmed teh podsistemov

je lahko poljuben delež vseh delcev, v A je recimo prvih r delcev in v B preostalih $N - r$. Valovno funkcijo lahko s takšno ločitvijo v mislih zapišemo kot tenzorski produkt podsistemov

$$|\psi\rangle = \sum c_{s_1, s_2, \dots, s_r} |s_1 s_2 \dots s_r\rangle \otimes \sum c_{s_{r+1}, s_{r+2}, \dots, s_N} |s_{r+1} s_{r+2} \dots s_N\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\alpha\rangle \otimes \sum_{\beta} c_{\beta} |\beta\rangle ,$$

kjer α in β tečeta po vseh možnih stanjih podsistemov A in B. Tak zapis valovne funkcije lahko še skrajšamo v

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha\beta} |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle .$$

Koeficienti $c_{\alpha\beta}$ imajo dva indeksa, zato jih lahko zapišemo v matriko. Ker tečeta indeksa po vseh možnih stanjih podsistemov, ki sta lahko različnih velikosti, ta matrika v splošnem ni kvadratna. V takšni matriki je torej zapisana informacija o stanju našega sistema.

Na matriki koeficientov bomo izvedli singularni razcep (angl. *Singular value decomposition*). Pri tem razcepu matriko zapišemo kot produkt unitarne, diagonalne in še ene unitarne matrike

$$M = U \Sigma V^{\dagger} .$$

Naredimo ga lahko na poljubni matriki, zato je ustrezna tudi naša matrika koeficientov, čeprav ni nujno kvadratna. Vrednosti diagonalne matrike Σ so poznane kot singularne vrednosti. Če singularne vrednosti nastopajo v padajočem vrstnem redu, potem so te enolično določene do permutacije enakih. Iz naše matrike koeficientov torej dobimo

$$c_{\alpha\beta} = \sum_k U_{\alpha k} \lambda_k V_{k\beta}^{\dagger} ,$$

kjer so $U_{\alpha k}$ in $V_{k\beta}^{\dagger}$ elementi unitarnih matrik, λ_k pa singularne vrednosti.

Ponovno zapišimo valovno funkcijo večdelčnega sistema in tokrat za matriko koeficientov uporabimo singularni razcep

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha, \beta, k} \lambda_k U_{\alpha k} |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle V_{k\beta}^{\dagger} .$$

Ker sta matriki U in $V^{\dagger}$ unitarni, lahko definiramo novi bazi podsistemov A in B

$$|u_k\rangle = \sum_{\alpha} U_{\alpha k} |\alpha\rangle , \quad |v_k\rangle = \sum_{\beta} V_{k\beta}^{\dagger} |\beta\rangle .$$

Valovno funkcijo sistema lahko sedaj zapišemo v novih bazah podsistemov

$$|\psi\rangle = \sum_k \lambda_k |u_k\rangle |v_k\rangle . \quad (3)$$

Verjetnost, da pri meritvi izmerimo stanje $|u_k\rangle |v_k\rangle$, je λ_k^2 . Torej zaradi normalizacije valovne funkcije velja $\sum_k \lambda_k^2 = 1$. Postopek, ki smo ga ravno izvedli, se imenuje Schmidtova dekompozicija in nam pove, da lahko poljubno večdelčno valovno funkcijo, ki jo razdelimo na podsistema A in B, zapišemo v obliki iz enačbe (3).

3.2 Von Neumannova entropija

Sedaj znamo generično večdelčno valovno funkcijo, sestavljeno iz podsistemov A in B, zapisati. Želimo pa znati tudi povedati, kakšna je prepletenost teh dveh podsistemov. Navežimo se na primer Bellovega para opisanega v poglavju 2. V obravnavi smo opazili, da lahko poljuben par kubitov nastopa v štirih možnih skupnih stanjih, kar je tudi velikost produktne baze takšnega sistema. Če

v splošnem pomerimo enega izmed delcev, nam to o stanju drugega lahko ne pove nič. Iz zapisa stanja (1) vemo, da naš par delcev tvori prepleten singlet in zaradi te informacije ob meritvi enega kubita poznamo tudi stanje drugega. Od tod sklepamo, da iz prepletenosti lahko izvemo, koliko informacije je deljene med komplementarnima podsistemoma.

Ker govorimo o informaciji, se lahko naslonimo na koncept entropije, bolj natančno Shannonove ali diskretne Gibbsove entropije, ki se glasi

$$S = - \sum_k p_k \log(p_k) ,$$

kjer je p_k verjetnost za k -to stanje. Če zamisel zrcalimo v naš sistem po Schmidtovem razcepu, dobimo enega izmed možnih zapisov von Neumannove entropije

$$S = - \sum_k \lambda_k^2 \log \lambda_k^2 ,$$

kjer ničelne singularne vrednosti ne upoštevamo v vsoti in se tako rešimo problema divergence logaritma. Iz definicije vidimo, da velja $S \geq 0$, kjer je $S = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 = 1$. Prepričati se želimo, ali je to dobra mera prepletenosti med podsistemoma A in B sistema v stanju zapisanem v (3).

Poglejmo si primer dveh sistemov: Bellovega para, za katerega vemo, da je prepleten, in stanje

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle |\uparrow\rangle + |\uparrow\rangle |\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle |\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle |\downarrow\rangle) . \quad (4)$$

To stanje smo izbrali, saj z enako verjetnostjo dovoljuje vse 4 možne rezultate meritve dveh kubitov in torej ni prepleteno, saj meritev enega kubita nič ne pove o možnih rezultatih meritve drugega. Izračun von Neumannove entropije bi torej moral pokazati razliko med stanjema, saj je le eno prepleteno. Obe stanji sta sestavljena iz dveh kubitov, zato za podsistema izberemo po en kubit. Oba izbora smo že zapisali v produktni bazi v (1) in (4). Od tod odčitamo matriki koeficientov

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} , \quad M_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Na tema matrikama sedaj izvedemo singularni razcep in zapišemo dobljene singularne vrednosti

$$\Sigma_1 = \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) , \quad \Sigma_2 = \text{diag}(1, 0) .$$

V zadnjem koraku izračunajmo še entropiji iz neničelnih singularnih vrednosti

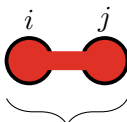
$$\begin{aligned} S_1 &= -\frac{1}{2} \log(1/2) - \frac{1}{2} \log(1/2) = \log 2 , \\ S_2 &= -\log(1) = 0 . \end{aligned} \quad (5)$$

Kot želeno je von Neumannova entropija prepletenega stanja neničelna, medtem ko je za neprepleteno stanje enaka nič. Zanimiva opazka je tudi, da nam takšen dvonivojski sistem da ravno $\log 2$ entropije, kar je, preračunano v bite, za katere se uporabi logaritem z osnovo dva za izbiro enote, ravno en bit. Za naš primer je ta količina torej dobra mera prepletenosti. Izkaže se, da je tako tudi v splošnem, torej da je von Neumannova entropija dobra mera prepletenosti med podsistemoma A in B in jo zato lahko imenujemo tudi entropija prepletenosti [5].

4. Skaliranje

Prepletenost smo uspeli prenesti iz koncepta na dveh kubitih do bolj splošnega primera sistema N delcev, kjer je N poljubno naravno število večje ali enako dva. Na tej točki se lahko vprašamo, kako

von Neumannova entropija raste z večanjem števila N . V splošnem obstajajo trije skalirni režimi, in sicer volumsko skaliranje, kritično skaliranje in površinsko skaliranje. Volumsko skaliranje narašča z velikostjo (številom delcev) sistema, kritično z logaritmom velikosti, površinsko pa z njegovo površino. V tem članku bomo obravnavali le enodimenzionalne primere. Pri teh narekuje površinsko skaliranje približno konstantno vrednost von Neumannove entropije, kar lahko interpretiramo s tem, da je površina v enodimenzionalnem sistemu 0-dimenzionalna in torej neodvisna od velikosti sistema. Pri takem skaliranju je torej von Neumannova entropija podobna kot le za en sam ali nekaj Bellovih parov.



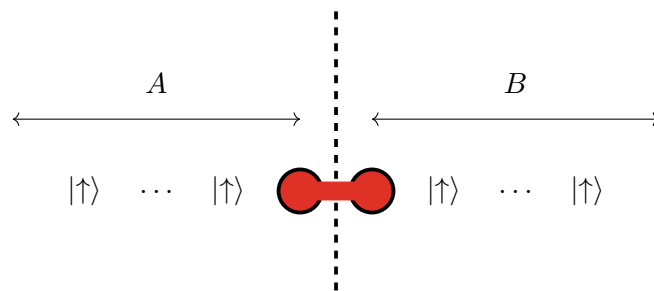
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_i |\downarrow\rangle_j - |\downarrow\rangle_i |\uparrow\rangle_j)$$

Slika 1. Grafični prikaz Bellovega para.

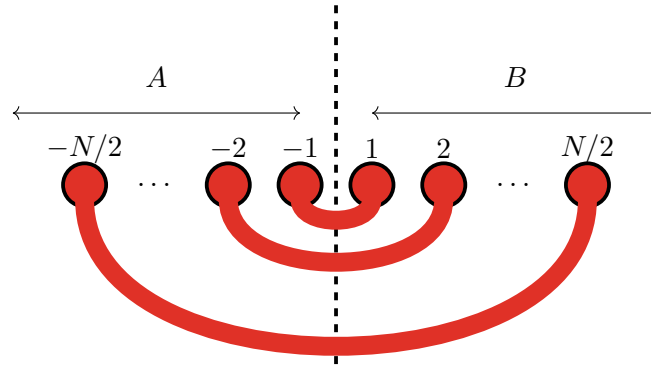
Poglejmo si primera površinskega in volumskega skaliranja. Zapis valovnih funkcij za večdelčne sisteme postane že precej zapleten, zato jih prikažemo grafično za lažjo predstavo. Kubite, za katere poznamo projekcijo spina, označimo s puščico gor ali dol. Bellove pare pa označimo kot na sliki 1. Poglejmo si sedaj dve stanji, obe bomo razpolovili in nato obravnavali prepletenost med tema polovicama. V prvem primeru en Bellov par postavimo v feromagnetno ozadje, torej v ozadje, kjer so vsi delci v istem stanju, na primer $|\uparrow\rangle$. To lahko vidimo na sliki 2. V drugem primeru pa Bellove pare postavimo tako, da jih zrcalimo čez črto, ki ločuje podsistema. Prikaz tega je na sliki 3. V prvem primeru se z večanjem sistema (dodajanjem $|\uparrow\rangle$ stanj na levem in desnem koncu) entropija prepletenosti med polovicama ne spreminja in ostaja podobna kot pri enem Bellovem paru. To je primer površinskega skaliranja entropije prepletenosti. V drugem primeru pa se von Neumannova entropija poveča z vsakim dodanim Bellovim parom. Taka linearna rast z velikostjo sistema ustreza volumskemu skaliranju entropije prepletenosti.

Poglejmo si še primer na sliki 4, ki ima podobno kot stanje iz slike 3 vsak kubit v Bellovem paru, vendar so tokrat vsi delci prepleteni lokalno s svojimi sosedi. Čeprav bi lahko pomislili, da tak sistem sledi volumskemu režimu, temu ni tako, saj med podsistemoma A in B nastopa le en Bellov par. Takšno stanje torej sledi površinskemu režimu. Poenostavljeno je torej število Bellovih parov čez mejo mera za entropijo prepletenosti.

Za splošno enodimenzionalno valovno funkcijo N delcev znamo napovedati kakšen bo skalirni režim entropije prepletenosti [2]. Osnovna stanja Hamiltonovega operatorja z energijsko režo med osnovnim in prvim vzbujenim stanjem kažejo površinski skalirni režim entropije prepletenosti in



Slika 2. Diagram enega Bellovega para, vstavljenega v feromagnetno ozadje. To je primer sistema, kjer se entropija prepletenosti skalira s površinskim režimom.



Slika 3. Diagram sistema, kjer Bellove pare postavimo tako, da jih zrcalimo čez mejo podsistemov. To je primer sistema v volumskem režimu skaliranja.

so zato iz stališča prepletenosti preprosta za obravnavo. Dokaz trditve iz reference [6] sloni na eksponentnem padanju statičnih in dinamičnih korelacij med operatorji, ki delujejo na različnih delih sistema. Diskusija dokaza presega okvire tega članka. Ob parametrih, kjer se energijska reža ravno zapre, opazimo kritično skaliranje entropije prepletenosti, kar pomeni, da raste z logaritmom velikosti sistema. Vzbuena stanja generično kažejo volumsko skaliranje entropije prepletenosti in jih je težko klasično simulirati. Iz opisanega lahko v osnovnem stanju pri spreminjanju parametrov Hamiltoniana torej preidemo med režimi skaliranja, kar izgleda kot fazni prehod. V naslednjih poglavjih se vprašamo, ali lahko tak fazni prehod opazimo tudi v kvantni dinamiki s časovnim razvojem.

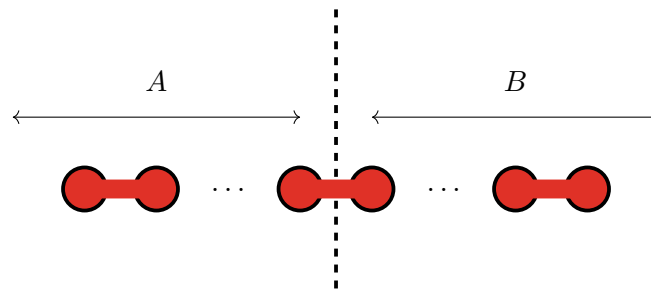
5. Mersko induciran fazni prehod

Za sisteme, ki jih ne merimo, je značilen unitaren razvoj. Zaradi lokalnosti fizike lahko predpostavimo, da vsak delec interagira le s tistimi v neposredni okolici. Zamislimo si tak sistem, ki ga simuliramo na kvantnem računalniku. Imamo N kubitov v vrsti, vsak izmed njih je v začetnem stanju

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) .$$

Nato na pare sosednjih delcev delujemo z unitarnimi vrati, ki jih prepletejo. S tem simuliramo lokalne interakcije med delci. Unitarna vrata delujejo tako, da vzamejo sosednji par delcev in njuno skupno valovno funkcijo prepletejo. Izberemo si lahko na primer hermitski operator

$$M_i = S_i^+ S_{i+1}^- + S_i^- S_{i+1}^+ ,$$



Slika 4. Diagram sistema, kjer vsak delec nastopa v Bellovem paru, vendar so te prepletenosti lokalne, le s sosedi in ne med podsistemoma A in B. Tak sistem sledi površinskemu režimu skaliranja.

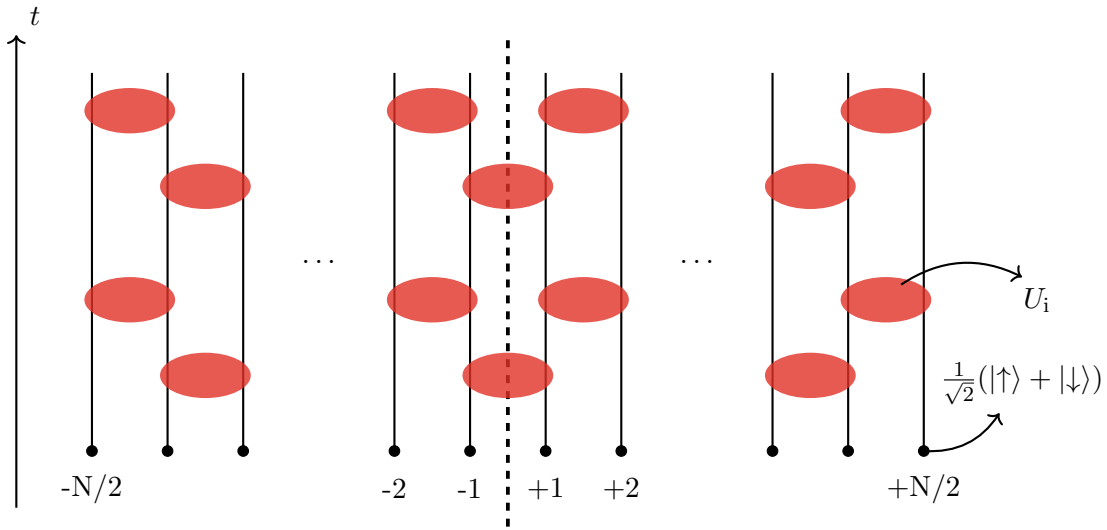
ki je sestavljen iz lestvičnih operatorjev projekcije spina za i -ti in i plus prvi delec. Ker sta $S^\pm$ lestvična operatorja, zanju veljajo naslednje znane zveze delovanja na možna spinska stanja

$$\begin{aligned} S^+ |\uparrow\rangle &= 0, & S^+ |\downarrow\rangle &= |\uparrow\rangle, \\ S^- |\uparrow\rangle &= |\downarrow\rangle, & S^- |\downarrow\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Indeks S_i nakazuje, na kateri delec se operator nanaša, na vse delce pa ostale deluje kot identiteta. Z M_i z eksponentno preslikavo tvorimo unitarni propagator

$$U_i = e^{-i\theta M_i}.$$

V naši simulaciji sedaj z vrati izmenično delujemo na pare kubitov z levimi in desnimi sosedi, kjer bosta robna kubita sodelovala vsak le enkrat, saj imata po enega soseda. Tak sistem je prikazan na sliki 5.

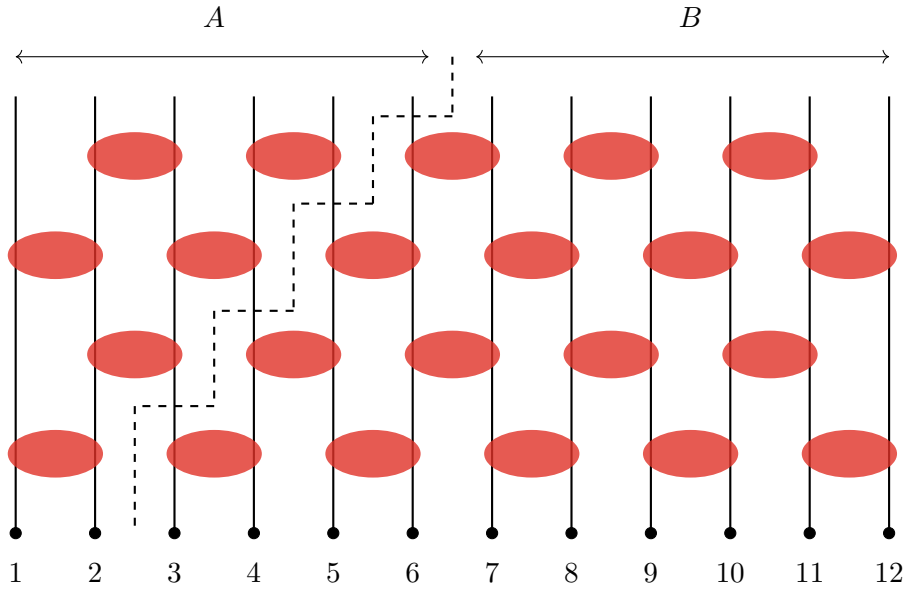


Slika 5. Diagram sistema N kubitov v začetnem neprepletenem stanju. Unitarna vrata (označena z rdečimi elipsami) med sosednjimi delci simulirajo interakcije med delci in jih prepletejo.

5.1 Minimalni rez

Ob delovanju prve vrste vrat na začetno stanje našega večdelčnega sistema, dobimo prepletene pare, ki so neprepleteni z ostalimi pari kubitov, na katere je že deloval propagator U_i . Druga vrsta propagatorjev preplete sosednje četverce kubitov. Po t korakih se tako lahko vprašamo, kakšna je entropija prepletenosti med podsistemoma A in B. Da razmislimo, kako to oceniti, se lahko vprašamo, koliko povezav, vzpostavljenih s propagatorji U_i , bi morali prerezati, da podsistema A in B popolnoma ločimo. Na sliki 6 vidimo primer takšnega reza štirih povezav, ki je potreben, da sta podsistema A in B nepovezana po štirih korakih. Za kvantna vezja s prikazano opečnato geometrijo v splošnem rabimo vsaj $N_{\text{rez min}} = t$ rezov, v drugačnih geometrijah je minimalno število rezov lahko drugačno. Povezave, ki jih vzpostavi propagator U_i , si zamislimo kot podobne tisti, ki nastopa v Bellovem paru. Pri obravnavi von Neumannove entropije smo omenili, da je dobra ocena zanjo število Bellovih parov med podsistemoma. Iz 5 vemo, da je entropija za en Bellov par $\log 2$. Sklepamo torej, da je za primer na sliki 6 štirikratnik te vrednosti, saj imamo štiri reze. Izkaže se, da je to res dobra ocena za zgornjo mejo, saj velja

$$S \leq N_{\text{rez min}} \cdot \log 2, \quad (6)$$



Slika 6. Sistem dvanajstih kubitov, ki ga v končnem stanju razpolovimo na podsistema A in B. S črtkano je označen eden izmed možnih rezov.

kjer je S entropija, $N_{\text{rez min}}$ pa minimalno število potrebnih rezov, da podsistema ob času t med seboj ločimo. Minimalno število vzamemo, da upoštevamo najstrožjo med ocenami [2].

Za obravnavane sisteme z unitarnim razvojem je značilno, da število prepletenih kubitov med podsistemoma raste s časom. Entropija torej narašča s časom približno linearno, zato po $t \sim N$ korakih dosežemo volumnsko skaliranje prepletenosti. Vprašamo se lahko kako bi na podoben način simulirali površinski režim skaliranja. V zadnjem času so raziskovalci to uspeli izvesti s pomočjo meritev, ki delujejo kot protiutež in manjšajo prepletenost podsistemov.

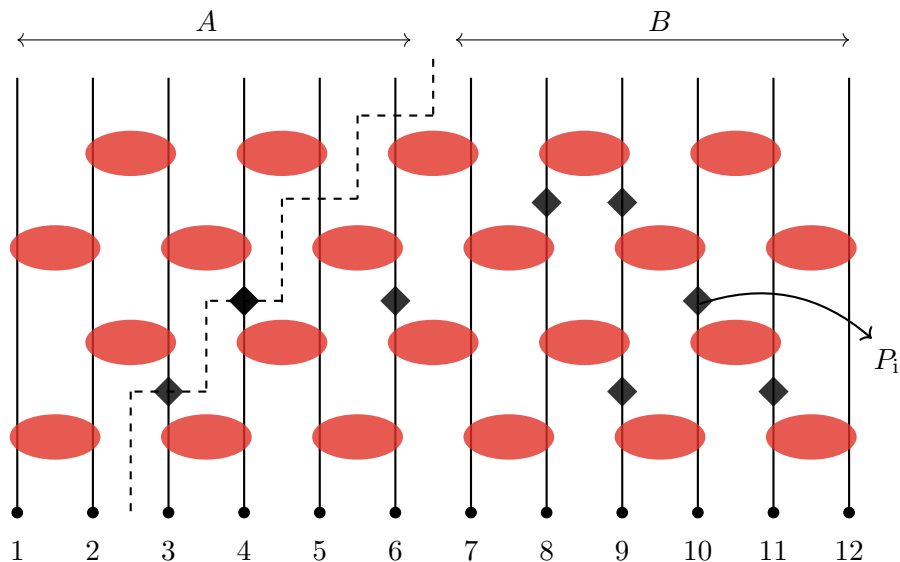
5.2 Meritev

Po Københavnski interpretaciji kvantne mehanike pri meritvi stanja delca njegova valovna funkcija kolapsira v eno izmed možnih stanj. Če imamo Bellov par in enega izmed delcev pomerimo, vemo, kakšen bo rezultat meritve na drugem delcu, vendar v nadaljnjem časovnem razvoju ta dva delca nista več prepletena. Od tod dobimo idejo, da bi v naših vezjih uporabili operatorje meritve in z njimi zmanjšali prepletenost. To izvedemo s projektorjem, ki je neunitaren operator. Za namen tega članka si izberemo projektor P_i na stanje $|\uparrow\rangle$. Zanj torej velja

$$P|\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle, \quad P|\downarrow\rangle = 0.$$

Indeks i pove na katerem mestu deluje, za vsa ostala mesta pa se obnaša kot identiteta. Upoštevati moramo še, da operator ni unitaren, zato moramo valovno funkcijo po vsakem delovanju projektorja ponovno normirati. Če bi po vsaki aplikaciji propagatorja en kubit pomerili, bi prepletenost med paroma uničili in preprečili njeno širjenje v naslednjih enakih korakih. Očitno taka postavitev sledi površinskemu režimu. Bolj zanimiv bo primer, ko po aplikaciji propagatorja meritev na enem kubitopravimo le z verjetnostjo p . V vsakem koraku bomo torej pomerili približno $p \cdot N$ kubitov.

Entropija sistema se še vedno drži ocene (6), vendar sedaj pomerjeni kubi predstavljajo že opravljen rez. Na sliki 7 je primer reza pri neki postavitvi meritev. Ker rez in meritev oba odstranita povezavo, meritve na diagramu obravnavamo kot že opravljene reze. Za izbrani primer je število rezov torej enako dva in tako pričakujemo, da je entropija takega sistema manjša kot v primeru brez meritev. Pričakujemo, da bo z večanjem pogostosti meritev, torej z večanjem p , entropija



Slika 7. Sistem dvanajestih kubitov, ki ga v končnem stanju razpolovimo na podsistema A in B. S črtkano je označen eden izmed možnih rezov, da končna sistema ločimo med seboj. Črne kare so meritve, ki so postavljene naključno z verjetnostjo p .

prepletenosti manjša. Zanimivo pa je tudi pogledati odvisnost entropije prepletenosti od števila delcev in pogostosti meritev p . Izkaže se, da opazimo fazne prehode med različnimi skalirnimi režimi entropije prepletenosti.

5.3 Fazni prehodi

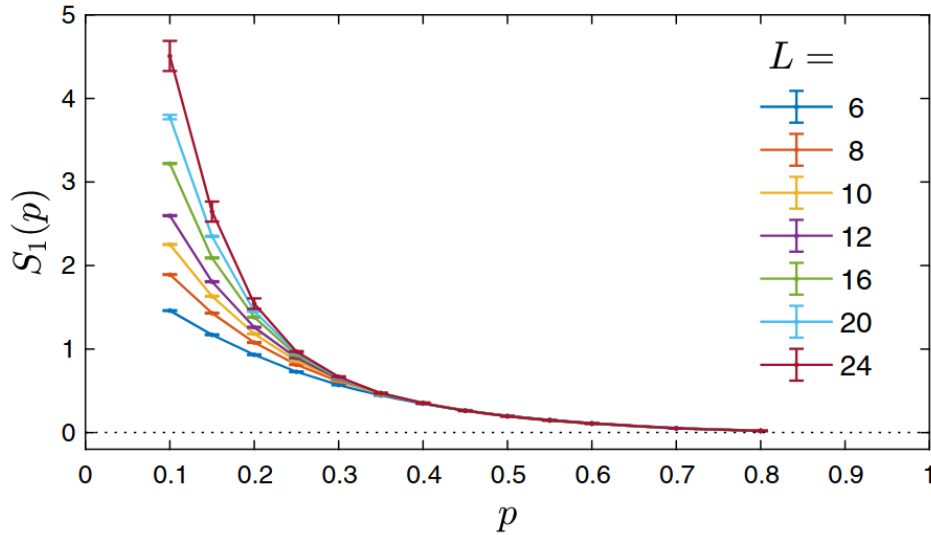
Za opisane sisteme lahko s spreminjanjem pogostosti meritev induciramo fazni prehod med skalirnimi režimi entropije prepletenosti. Na sliki 8 je ta prehod dobro opazen. Pri majhnih vrednostih parametra p entropija prepletenosti z rastjo velikosti sistema raste linearno, kar je značilno za volumski režim. Pri dovolj pogostih meritvah pa razlik v vrednosti entropije prepletenosti med različnimi velikostmi sistema praktično ni več, torej smo v površinskem režimu. Ko se vrednost p bliža ena, entropija pade proti nič, kar je tudi pričakovano.

5.4 Eksperimentalna izvedba

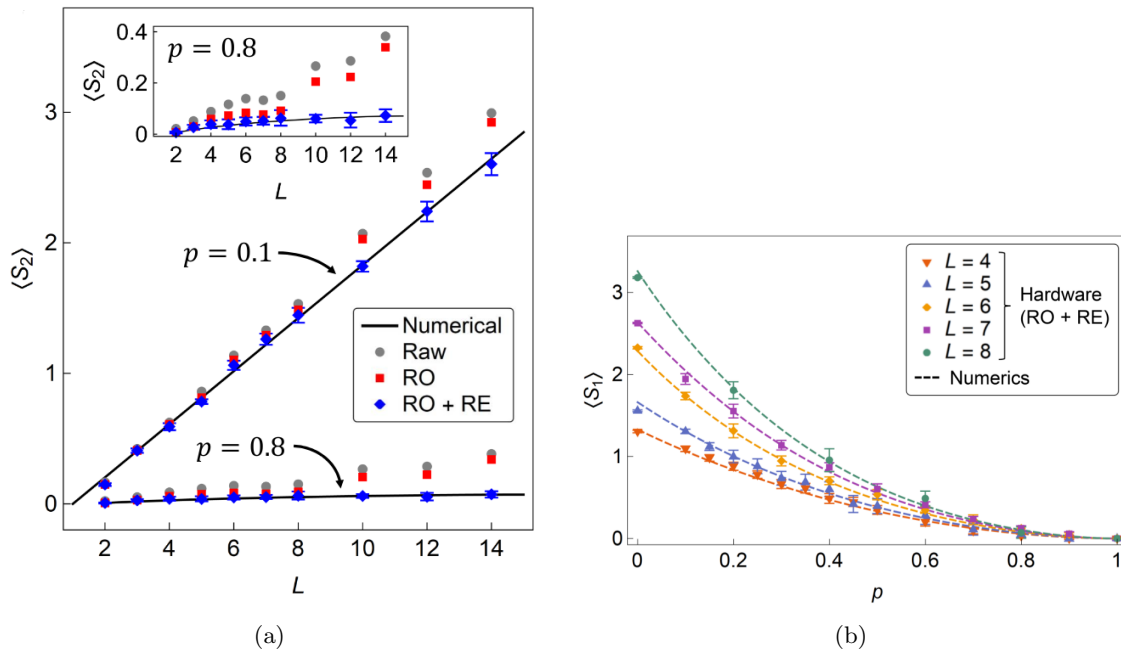
Opisani mersko inducirani fazni prehod je fizično uspelo izvesti raziskovalcem iz IBM na njihovem kvantnem računalniku. Vezje kvantnega računalnika je bilo zastavljeno podobno kot v tem članku. Razlike so, da so unitarni operator U_i zamenjali z naključnim izborom unitarnih operatorjev, merili so po vsakih dveh korakih in za meritve niso uporabljali le projektorja. Dobljeni rezultati se zelo dobro ujemajo s teorijo, kar vidimo na sliki 9. Entropija prepletenosti se pri dovolj redki meritvi skalira z volumskim režimom, če pa je pogostost meritve p dovolj velika, se skalira s površinskim režimom [3].

6. Zaključek

Za večdelčne valovne funkcije poznamo več skalirnih režimov von Neumannove entropije, ki pri osnovnih stanjih Hamiltonovega operatorja dependirajo od razlike energije do prvega vzbujenega stanja. Pri kvantni dinamiki unitarna vrata, ki delujejo le med sosedi s časom prepletejo kubite, da njihova entropija raste približno linearno in po dolgem času doseže volumsko skaliranje. Če obenem sistem dovolj pogosto merimo, s čimer manjšamo prepletenost, lahko dosežemo, da skalirni režim entropije



Slika 8. Graf odvisnosti entropije od velikosti parametra p , ki opisuje pogostost meritve za različne velikosti sistema. Pri majhnih vrednostih parametra p se entropija z velikostjo sistema večja, kar narekuje volumski režim. Pri večjih vrednostih te odvisnosti ni, torej smo v površinskem režimu. Vir: [1].



Slika 9. Rezultati eksperimentov izvedenih na kvantnih računalnikih podjetja IBM. (a) Odvisnost entropije prepletenosti od velikosti sistema pri majhni in veliki vrednosti parametra p . Opazimo, da pri redki meritvi entropija prepletenosti narašča linearno z velikostjo sistema, pri gosti pa ostaja približno konstantna. To se ujema s pričakovanimi skalirnima režimoma. (b) Odvisnost entropije prepletenosti od parametra p pri več velikostih sistema. Pri majhnih vrednostih p entropija sledi volumskemu režimu, pri velikih pa površinskemu. Graf se dobro ujema s teoretično napovedjo na sliki 8. Vir: [3].

prepletenosti v odvisnosti od velikosti sistema fazno preide od volumskega do površinskega, torej od bolj kvantnega do bolj klasičnega obnašanja. Teoretične napovedi faznega prehoda so bile potrjene z eksperimentom, izvedenim na kvantnem računalniku. Na njem je kvantno stanje do neke mere robustno proti dekoherenci, saj jo obravnavamo kot meritev, saj na podoben način kolapsira superpozicijo. To omogoča, da je kvantni računalnik nekoliko zašumljen, a kljub temu v bolj kvantnem režimu, torej je uporaben za izvajanje kvantnih algoritmov.

LITERATURA

- [1] B. Skinner, J. Ruhman in A. Nahum, *Measurement-induced phase transitions in the dynamics of entanglement*, Phys. Rev. X **9** (2019), 031009.
- [2] B. Skinner, *Lecture Notes: Introduction to random unitary circuits and the measurement-induced entanglement phase transition*, arXiv:2307.02986 [cond-mat.stat-mech] (2023).
- [3] J. M. Koh, S. N. Sun, M. Motta in A. J. Minnich, *Measurement-induced entanglement phase transition on a superconducting quantum processor with mid-circuit readout*, Nature Phys. **19** (2023), 1314–1319.
- [4] A. Ramšak, *Kvantna mehanika*, Založba Univerze v Ljubljani, Ljubljana, 2021.
- [5] M. A. Nielsen in I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*, Cambridge University Press, 2010.
- [6] M. B. Hastings, *An area law for one-dimensional quantum systems*, J. Stat. Mech. **0708**, (2007), P08024.