

TOPOLOŠKE LASTNOSTI NEMATIKOV

ANDRAŽ SITAR

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

V tem članku je opisana matematična obravnava usmerjenih snovi, natančneje nematske faze tekočih kristalov. Obravnavana je s klasično teorijo polja ter teorijo homotopij. Topološki koncepti so pojasnjeni na fizikalen način z zgledi ter fizikalnimi primeri. Obravnavane so homotopije krivulj in ploskev ter preko njih uvedeni homotopski razredi, ki sestavljajo homotopske grupe. Z njimi so obravnavani črtasti in točkasti topološki defekti ter topološke invariante, ki jih določajo. Prikazani so še črtasti solitoni. Pri obravnavi je poudarek na direktorskem polju nematika z upoštevanjem njegove simetrije. Prikazane so rešitve z več defekti ter razložena njihova dinamika.

TOPOLOGICAL PROPERTIES OF NEMATICS

In this article, the mathematical formulation of directed matter, specifically the nematic phase of liquid crystals, is presented. It is described using classical field theory and homotopy theory. Topological concepts are explained using physical examples. Homotopies between curves and surfaces are covered, with which homotopy classes, which constitute homotopy groups, are defined. Line and point defects are described using topological invariants. Line solitons are also covered. The focus is on the director field of nematics, taking its symmetries into account. Multidefect solutions are covered and their dynamics described.

1. Uvod

Tekoči kristal je *agregatno stanje*, pri katerem so gradniki gibljivi, kot v tekočini, a obenem lokalno urejeni, podobno kot v kristalu. Za razliko od kristalov je lokalna urejenost orientacijska, ne krajevna. Ena izmed faz tekočih kristalov je *nematska faza*. Koren besede *nematik*, torej *nema*, dobimo iz grščine in pomeni *nit*. Razlog za tako poimenovanje so *črtasti defekti*, ki jih opazimo v taki snovi. Gradniki nematika so običajno podolgovate osno simetrične molekule, ki interagirajo dovolj šibko, da se prosto gibajo, a dovolj močno, da se zaradi interakcije gradniki, ki so si blizu, poravnajo. Če opazujemo točko v nematiku, vidimo, da na tem mestu ni vedno isti gradnik, enako kot v tekočini, njihova usmerjenost pa tam kljub menjavi gradnikov ostaja enaka.

Ker so gradniki lokalno poravnani, lahko predpostavimo, da je karakteristična dolžina, na kateri se smer gradnika spreminja, mnogo večja od razsežnosti gradnikov. Njihovo smer zato obravnavamo kot zvezno polje, v našem primeru vektorsko polje.

Pri splošnem vektorskem polju vektor v vsaki točki domene zavzame poljubno vrednost iz množice $\mathbb{R}^3$, torej iz *faznega prostora*. Pri nematikih vektorsko polje predstavlja le smer gradnikov, zato ne moremo določiti velikosti vektorjev. Vektorsko polje je zato *normirano*, fazni prostor pa je namesto $\mathbb{R}^3$ kar enotska sfera, ki jo označimo kot $\mathbb{S}^2$. Tako polje imenujemo *direktorsko polje*.

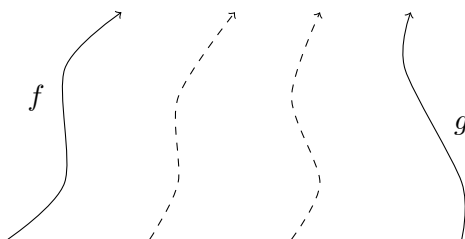
Direktorsko polje je zaradi lokalne urejenosti odvedljivo skoraj povsod. Zanj lahko definiramo *gostoto proste energije*, katere izraz je odvisen od vrste nematika, predstavljamo si jo pa lahko kot *ukrivljenost silnic*. Prosta energija v dinamičnih sistemih služi kot potencial, ki ga sistem *minimizira*. Sistem v lokalnem minimumu je rešitev diferencialne enačbe, ki jo dobimo z variacijo akcije. Rešitev je odvisna od oblike in robnih pogojev domene.

2. Homotopije krivulj

Ker obravnavamo zvezno direktorsko polje, se lahko vprašamo, katere količine in lastnosti se ohranjajo, če polje zvezno deformiramo. Take lastnosti imenujemo *topološke* lastnosti. Pri deformacijah ne smemo vplivati na celovitost telesa, torej domene ne smemo rezati oziroma lepiti. Z deformacijami torej spreminjamo *geometrijske* lastnosti snovi, ne pa *topoloških*.

2.1 Homotopije in homotopski razredi

Naj bo $I = [0, 1]$ in $D \subset \mathbb{R}^3$ ter f in g krivulji $I \rightarrow D$. Homotopija med krivuljama f in g je zvezna funkcija $H : I \times [0, 1] \rightarrow D$, da $\forall x \in I$ velja $H(x, 0) = f(x)$ in $H(x, 1) = g(x)$. Primer homotopije je preslikava med dvema krivuljama $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, ki si jo lahko predstavljamo kot zvezno *deformacijo* krivulje f v krivuljo g in jo vidimo na sliki 1.



Slika 1. Deformacija krivulje f v krivuljo g .

Če za funkciji $f, g : D \rightarrow S$ velja, da med njima obstaja homotopija, pravimo, da sta f in g *homotopni*. Homotopija je ekvivalenčna relacija, zato lahko zanjo definiramo ekvivalenčne razrede, ki jih imenujemo homotopski razredi in jih označimo z $\llbracket \bullet \rrbracket$. Če sta krivulji f in g homotopni, po definiciji razredov pripadata istemu homotopskem razredu.

$$f \text{ homotopna } g \iff \llbracket f \rrbracket = \llbracket g \rrbracket$$

2.2 Spoj krivulj in prva homotopska grupa

Naj bosta f in g zvezni krivulji $[0, 1] \rightarrow D$. Zanju lahko definiramo *spoj* $f \cup g : [0, 1] \rightarrow D$ s predpisom [3]

$$(f \cup g)(t) = \begin{cases} f(2t); & t < \frac{1}{2} \\ g(2t - 1); & t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Pri spoju $(f \cup g)(t)$ z večanjem parametra t najprej prepotujemo prvo krivuljo f , nato pa drugo g . Zato je krivulja $f \cup g$ zvezna, če in samo če velja $f(1) = g(0)$, torej če se g začne, kjer se f konča. Prikaz tega vidimo na sliki 2.

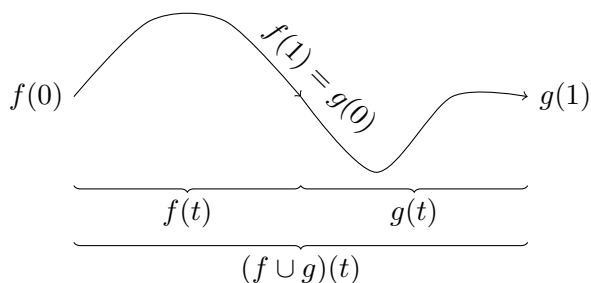
Definirajmo še spoj ekvivalenčnih razredov krivulj kot $\llbracket f \rrbracket \cup \llbracket g \rrbracket = \llbracket f \cup g \rrbracket$, kar pomeni, da obravnavamo krivulje, ki so homotopne spoju krivulj $f \cup g$.

Spoj krivulj *ni* asociativen, velja pa, da ne glede na to, kateri dve izmed treh krivulj najprej spojimo, najprej prepotujemo prvo, nato drugo, nato tretjo, torej je tir enak. Prikaz tega vidimo na sliki 3.

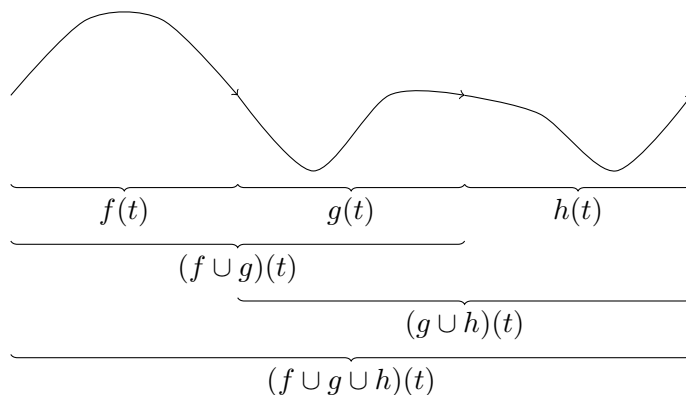
Zato sta krivulji, ki ju dobimo z dvema spojem treh krivulj, homotopni, spoj homotopskih razredov pa je asociativen, oziroma

$$(\llbracket f \rrbracket \cup \llbracket g \rrbracket) \cup \llbracket h \rrbracket = \llbracket f \rrbracket \cup (\llbracket g \rrbracket \cup \llbracket h \rrbracket) .$$

Konstantna krivulja vse vrednosti parametra slika v isto točko, zato za krivuljo, ki je homotopna konstantni krivulji $f_{\text{konst}}(t) = x_0$, rečemo, da je homotopna *točki* x_0 .



Slika 2. Prikaz zveznosti spoja krivulj. Za to morata biti krivulji staknjeni.

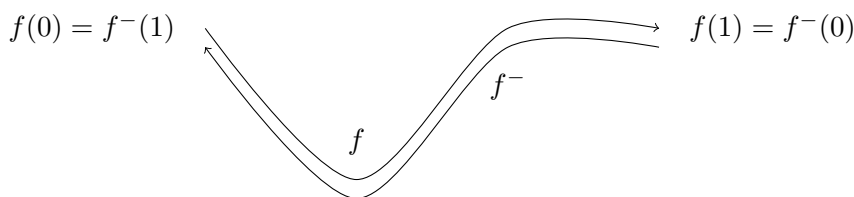


Slika 3. Prikaz asociativnosti spoja krivulj izključno v smislu homotopskih razredov.

Za vsako krivuljo f lahko definiramo *nasprotno krivuljo* f^- s predpisom

$$f^-(t) = f(1 - t) ,$$

razumemo pa jo kot krivuljo z enako sliko kot f , le da je parametrizirana v nasprotni smeri. Prikaz nasprotne krivulje vidimo na sliki 4.



Slika 4. Prikaz krivulje f in njej nasprotne krivulje f^- .

Spoj krivulje in nasprotne krivulje $f \cup f^-$ je sklenjena krivulja z enakim tirom kot f in f^- . Ta spoj je homotopen točki $f(0)$, namreč obstaja homotopija

$$F(t, s) = (f \cup f^-)(ts) ,$$

pri kateri zanko enakomerno krajšamo proti začetnemu krajišču vzdolž tira krivulje.

Homotopnost točki lahko zapišemo z ekvivalenčnimi razredi

$$[f \cup f^-] = [f_{\text{konst}}] .$$

Obravnavali bi radi krivulje, za katere je spoj zvezen, ne glede na izbiro ene ali druge. Spomnimo se, da je spoj $f \cup g$ zvezen, če sta krivulji sklenjeni, torej če velja $f(1) = g(0)$. Ker mora to veljati

za vsak par krivulj, velja tudi $f(1) = f(0)$, kar je definicija sklenjenih krivulj oziroma *zank*. Točko $f(0) = f(1) = x_0$ imenujmo krajišče zanke, ki naj ostane konstantno tudi pri homotopijah. Oglejmo si nekaj lastnosti takih zank.

1. Spoj zank s krajišči v x_0 je tudi taka zanka.
2. Spoj ni asociativen, asociativnost pa velja do homotopije natančno.
3. Za spoj nimamo enote (identičnega elementa), do homotopije natančno pa kot enota služi konstantna zanka $f_{\text{konst}}(t) = x_0$.
4. Za spoj nimamo inverznih elementov, za krivuljo f je pa spoj z inverzno zanko $f \cup f^-$ homotopen enoti – konstantni zanki f_{konst} .

Če namesto zank obravnavamo homotopske razrede, množica razredov ustreza lastnostim grupe, tako grupo pa imenujemo *prva homotopska grupa* topološkega prostora D okrog točke x_0 , ki jo označimo kot

$$\pi_1(D, x_0).$$

Če bi obravnavali zanke s krajiščem v x_1 , bi vsako zanko s krajiščem v x_0 lahko spojili z zanko s krajiščema v x_0 in x_1 ter tako nasprotno zanko, torej $f_{x_1} = f_{x_1 \rightarrow x_0} \cup f_{x_0} \cup f_{x_1 \rightarrow x_0}^-$. Zato so homotopski razredi okrog različnih točk v s potmi povezanem prostoru enaki do izomorfizma natančno. Ker homotopske grupe niso odvisne od izbire točke, je ne pišemo.

Prva homotopska grupa je množica homotopskih razredov zank. Z njo spoj igra vlogo nekakšnega *seštevanja*, izvemo pa, katerim zankam je homotopen spoj dveh zank. Če vsak homotopski razred *oštevimo*, je število topološkega razreda, ki ga dobimo s spojem dveh razredov, kar vsota števil obeh razredov v spoju.

Topološki prostor ima neskončno homotopskih grup π_k , kjer indeks k predstavlja dimenzijo domene zveznih funkcij, za katere definiramo homotopijo. Primer je druga homotopska grupa π_2 , pri kateri obravnavamo homotopije (dvorazsežnih) ploskev. V našem primeru obravnavamo (enorazsežne) zanke, in posledično prvo homotopsko grupo π_1 , ki jo imenujemo tudi *fundamentalna grupa*.

2.3 Prva homotopska grupa π_1 raznih prostorov

2.3.1 π_1 enostavno povezanega prostora

Najenostavnejši prostor je *enostavno povezan* prostor. V tem so vse zanke homotopne konstantni zanki, torej obstaja samo en homotopski razred. Vsaka fundamentalna grupa ima zato le en element – konstantno zanko oziroma točko. Primer takega prostora je krog, saj v njem lahko vsako zanko skrčimo v točko. Prav tako lahko v točko skrčimo spoj dveh zank. Naj bo f_{konst} konstantna zanka v D . Fundamentalna grupa enostavno povezanega prostora se glasi

$$\pi_1(D_{\text{enost. pov.}}) = \{[f_{\text{konst}}]\}.$$

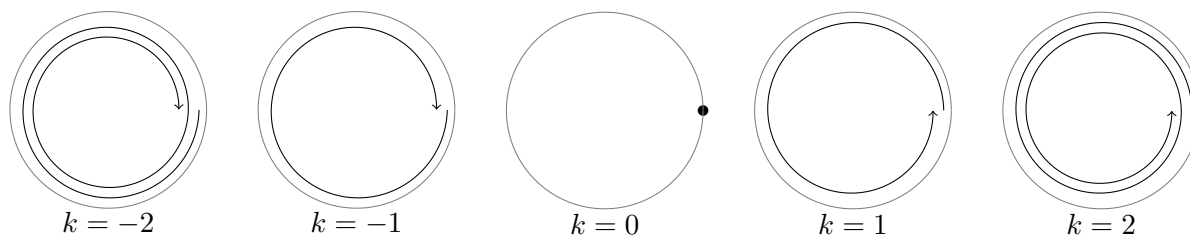
Pri grupah nas običajno ne zanimajo elementi, ampak njihova *struktura*, ki se ohranja pri izomorfizmi. Zato lahko brez izgube splošnosti v grupi operacijo spoja zank in enoto $[f_{\text{konst}}]$ zamenjamo z operacijo seštevanja in enoto 0. Zato lahko zapišemo izomorfno grupo

$$\pi_1(D_{\text{enost. pov.}}) = \{0\}.$$

2.3.2 π_1 krožnice in ovojno število

Oglejmo si še fundamentalno grupo π_1 za krožnico $\mathbb{S}^1$. Krožnica je povezana s potmi, zato nam spojne točke ni treba navesti. Najenostavnejša zanka, ki *ni homotopna* točki, je zanka, ki krožnico obide enkrat, saj take zanke ne moremo skrčiti v točko. Označimo tako zanko z f_1 . Njena nasprotna zanka krožnico obide v nasprotni smeri. Zanko f_1 lahko večkrat spojimo samo s seboj oziroma z njeno nasprotno zanko. Nova zanka krožnico obide k -krat, kjer je k razlika števil, ki povesta kolikokrat f in f^- nastopata v spoju. Take zanke označimo z f_k in so med seboj homotopne, če in samo če je njun indeks enak. Vidimo jih na sliki 5. Tako dobimo različne homotopske razrede, ki tvorijo fundamentalno grupo

$$\pi_1(\mathbb{S}^1) = \{[f_k]; \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$



Slika 5. Zanke, ki predstavljajo različne homotopske razrede krožnice $\mathbb{S}^1$. Loči jih ovojno število – kolikokrat in v kateri smeri ovijejo krožnico.

Podobno kot v primeru enostavno povezanega prostora, struktura grupe ni odvisna od izbire f_1 , zato pišemo izomorfnu fundamentalno grupo

$$\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}.$$

S tem izomorfizmom smo dobili bijekcijo $[f_k] \mapsto k$, torej smo formalno *oštevilčili* homotopske razrede. V primeru krožnice to število predstavlja število ovojev in ga imenujemo *ovojno število*, ki ga poznamo iz kompleksne analize.

V primeru krožnice si fundamentalno grupo lahko predstavljamo kot kolut, na katerega navijamo vrv, ki se ne zavozla. Če kolut z vrvjo enkrat ovijemo v eno smer, je to ravno nasprotno, kot da bi kolut ovili v drugi smeri, števila ovojev se pa seštevajo kot cela števila.

2.4 Rešitve in defekti

2.4.1 Ravninski nematiki

Obravnavajmo domeno oblike tankega valja, da je višina valja veliko manjša od polmera. Za robna pogoja na osnovnih ploskvah vzemimo, da je direktor poravnan vzporedno s ploskvama. Ker je valj tanek, lahko predpostavimo, da se direktorsko polje vzdolž višine valja bistveno ne spremeni. Direktor je tako v celotni domeni vodoraven, zato se fazni prostor z enotske sfere skrči na ekvator enotske sfere, torej na enotsko krožnico, domeno pa lahko obravnavamo kot dvorazsežno.

Obravnavamo direktor, ki je definiran na krogu, leži pa v ravnini, natančneje na krožnici. Zato je direktorsko polje $\hat{\mathbf{n}}$ funkcija

$$\hat{\mathbf{n}} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1.$$

2.4.2 Cela ovojna števila

Kot robni pogoj direktorja na zunanji krožnici lahko predpišemo, da direktor kaže v konstantni smeri $\hat{\mathbf{x}}$, torej $\hat{\mathbf{n}}|_{\partial D} = \hat{\mathbf{x}}$. Na domeni (krogu) je direktor rešitev diferencialne enačbe, ki je ne bomo

obravnavali, rešitev si pa lahko predstavljamo kot polje z najmanjšo ukrivljenostjo. Za robni pogoj $\hat{\mathbf{n}}|_{\partial D} = \hat{\mathbf{x}}$ dobimo rešitev

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{x}},$$

torej direktor na celotnem krogu kaže v smeri $\hat{\mathbf{x}}$. Ta rešitev ni ukrivljena, vidimo jo na sliki 6, delu (a).

Za robni pogoj bi lahko predpisali, da direktor kaže ven, torej $\hat{\mathbf{n}}|_{\partial D} = \hat{\boldsymbol{\rho}}$, kjer je $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ polarni oziroma cilindrični radialni enotski bazni vektor. Izkazuje se, da tedaj dobimo rešitev

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) = \hat{\boldsymbol{\rho}}.$$

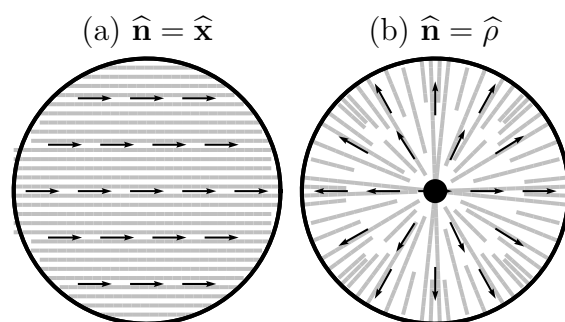
Bazni vektor $\hat{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{r})$ ni definiran za $\rho = 0$, torej ima rešitev nezveznost v točki 0, kar vidimo na sliki 6, delu (b). Tako nezveznost imenujemo *topološki defekt* in ga ne moremo odstraniti z zveznimi preslikavami, namreč tako defekt lahko le premikamo.

Zakaj pa v enem primeru dobimo defekt, v enem pa ne? Imejmo zanko, homotopno robu $\gamma \in \llbracket \partial D \rrbracket$, torej zanka γ enkrat ovije krožnico. Na tej zanki ovrednotimo direktorsko polje $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r})$:

$$I \xrightarrow{\gamma(t)} \gamma \xrightarrow{\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r})} \mathbb{S}^1.$$

V faznem prostoru tako dobimo zanko $\hat{\mathbf{n}}(\gamma(t))$, za katero želimo, da je zvezna. Kompozitum $\hat{\mathbf{n}} \circ \gamma$ je zvezen, če sta zvezna $\hat{\mathbf{n}}$ in γ . Zanka γ je po predpostavki zvezna, zato je kompozitum $\hat{\mathbf{n}} \circ \gamma$ zvezen, če in samo če je zvezen $\hat{\mathbf{n}}$. Drugače rečeno, zanka v faznem prostoru je zvezna, če in samo če je zvezno direktorsko polje okrog zanke v domeni.

Imejmo zanki $\hat{\mathbf{n}} \circ \gamma$ homotopno zanko $\hat{\mathbf{n}} \circ \gamma'$. Da sta zanki homotopni, moramo pri deformaciji γ v njej homotopno γ' paziti, da je direktorsko polje okrog zank vedno zvezno, torej da ostanemo na zveznem delu rešitve. Ta pogoj lahko upoštevamo, da obravnavamo samo del domene D , na katerem je direktorsko polje $\hat{\mathbf{n}}$ zvezno povsod, torej $D \mapsto D|_{\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \text{ zvezno}}$.



Slika 6. Direktorski polji $\hat{\mathbf{n}}$ za različna robna pogoja. Črni vektorji predstavljajo vrednosti direktorja v raznih točkah, sive črte so pa silnice direktorskega polja. Robna krožnica predstavlja rob domene, na katerem prepišemo robni pogoj za direktorsko polje. (a) Direktor je definiran povsod. (b) Direktor je definiran skoraj povsod, z nezveznostjo v $\rho = 0$, ki je označena s črno točko.

Ker je $\hat{\mathbf{n}}$ tedaj zvezna na celotni domeni D , sta prostora D in $\hat{\mathbf{n}}(D)$ homotopna in imata zato enaki fundamentalni grupi π_1 .

V primeru (a) je zanka v faznem prostoru konstantna zanka oziroma točka $\hat{\mathbf{x}}$. Vse zanke v D so torej homotopne točki, domena je posledično brez lukenj oziroma defektov. V primeru (b) zanka v faznem prostoru krožnico ovije enkrat, zato je sama krožnica. Domena D je zato homotopna krožnici. Kroga ne moremo zvezno deformirati v krožnico, zato mora imeti D lunkjo. Zadošča, da odstranimo eno točko, kjer mora biti defekt.

Za krožnico vemo, da sta zanki homotopni, če imata enako ovojno število. Ovojno število robnega pogoja je v primeru (a) enako 0, v primeru (b) pa 1, zato je zanka v primeru (a) homotopna točki, zanka v primeru (b) pa ni.

S podobnim razmislekom ugotovimo, da za vsak zvezni robni pogoj, katerega ovojno število ni enako 0, domena *ni* homotopna točki in dobimo defekt. Zato defekte pri ravninskih nematkih označimo z ovojnim številom (na sliki 6 (a) vidimo +1 defekt).

Ravninske rešitve smo dobili, ker smo predpostavili translacijsko simetrijo v $\hat{\mathbf{z}}$. Če ima rešitev defekt, zaradi simetrije defekt obstaja na celotni osi vzdolž $\hat{\mathbf{z}}$, torej zares obravnavamo *črtasti defekt*.

2.4.3 Zrcalna simetrija gradnikov in polcela ovojna števila

Tekoče kristale sestavljajo mikroskopski delci, ki se v nematski fazi poravnajo v orientacijsko ureditev z osno simetrijo, ki jo opišemo z direktorskim poljem. Ugotovili smo že, da je tedaj fazni prostor enak enotski sferi $\mathbb{S}^2$. Pri taki obravnavi nematkov ne upoštevamo njihove simetrije. Če vektor obrnemo, dobimo nasprotni vektor, če pa enako storimo z osno ter zrcalno simetričnim objektom, pa dobimo enak objekt. Zato pri definiciji direktorja upoštevajmo še ekvivalenco nasprotnih vektorjev

$$\|\hat{\mathbf{n}}\| = 1 \qquad -\hat{\mathbf{n}} \iff \hat{\mathbf{n}}.$$

Tej definiciji ne ustreza nobeno realno vektorsko polje, a kljub temu direktorje še vedno lahko obravnavamo kot vektorje, ki so definirani do predznaka natančno. Fazni prostor normiranih vektorjev je enotska sfera $\mathbb{S}^2$, a brez izgube splošnosti vse vektorje, ki kažejo pod ekvator, obrnemo. Tako za fazni prostor dobimo zgornjo polovico enotske sfere, pri kateri na njenem robu pare nasproti ležečih točk obravnavamo kot isto točko. Tako polsfero imenujemo *realna projektivna ravnina* $\mathbb{RP}^2$.

V primeru ravninskih nematkov se fazni prostor skrči na ekvator enotske sfere, torej krožnico. Če upoštevamo še simetrijo $-\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}$, pa dobimo pol krožnice, katere krajišči sta ista točka.

Vemo že, da za zvezni robni pogoj dobimo, da je ovojno število celo število. Ker sta nasprotni točki krožnice isti, krivulja v faznem prostoru potrebuje oviti le pol krožnice, torej so dovoljena tudi polcela števila. Zato velja $2k \in \mathbb{Z}$. Ta množica je izomorfna celim številom, zato ima direktorska preslikava krožnice isto fundamentalno grupo kot krožnica, kar zapišemo kot

$$\pi_1(\hat{\mathbf{n}}(\mathbb{S}^1)) = \mathbb{Z}.$$

Do tega pridemo tudi z razmislekom, da je pol krožnice, kateri krajišči sta ista točka, spet krožnica. S celotno krožnico tako dvakrat pokrijemo pol krožnice, kar je razlog za polcela ovojna števila.

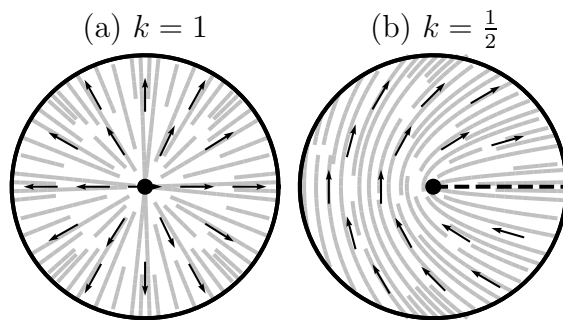
Primerjavo med rešitvama s celim in polcelim ovojnim številom vidimo na sliki 7. V primeru (a) dobimo direktorsko polje z ovojnim številom 1, ki je definirano skoraj povsod, razen v točkastem defektu, ki predstavlja fizikalni defekt. V primeru (b) pa dobimo direktorsko polje z ovojnim številom $1/2$, ki je definirano skoraj povsod, razen v točkastem defektu, ki predstavlja fizikalni defekt ter na poltraku, ki ne predstavlja fizikalnega defekta, temveč neupoštevanje zrcalne simetrije nematika. Na tem poltraku polje matematično ni zvezno, fizikalno pa. Izrez poltraka iz domene v splošnem velja za vsa polcela ovojna števila.

Polcela števila poznamo tudi kot polceloštevski spin v kvantni mehaniki, ki ga dobimo s podobnim razmislekom.

2.5 Splošni nematiki

2.5.1 π_1 sfere

Oglejmo si fundamentalno grupo π_1 za sfero $\mathbb{S}^2$. Obravnavajmo zanko, ki leži na ekvatorju sfere in jo ovije enkrat. Tako zanko lahko po vzporednikih zvezno izmikamo proti polu, zato je taka zanka



Slika 7. Direktorski polji $\hat{\mathbf{n}}$ za različni ovojno število. (a) Celoštevilsko ovojno število $k = 1$. (b) Polceloštevilsko ovojno število $k = \frac{1}{2}$. S črtkano črto je označen rez, na katerem direktor zavzame vrednost $\hat{\mathbf{n}} = \pm \hat{\mathbf{x}}$.

homotopna konstantni zanki oziroma točki. S podobnim razmislekom ugotovimo, da so vse zanke homotopne točki. Prva homotopska oziroma fundamentalna grupa sfere je torej enaka fundamentalni grupi enostavno povezanega območja

$$\pi_1(\mathbb{S}^2) = \pi_1(D_{\text{enost. pov.}}) = \{0\}.$$

To pa ne pomeni, da je sfera enostavno povezano območje, saj se razlikujeta v drugi homotopski grupi, namreč sfera je votla, enostavno povezano območje pa ne.

2.5.2 π_1 realne projektivne ravnine

Obravnavajmo domeno oblike dolgega valja v smislu, da je višina valja veliko večja od polmera. Os valja označimo z $\hat{\mathbf{z}}$. Za robni pogoj na plašču zahtevajmo translacijsko simetrijo v smeri $\hat{\mathbf{z}}$. Zato predpostavimo, da je translacijsko simetrično tudi direktorsko polje, zaradi česar izgubimo prostorsko stopnjo. Direktor zato lahko zapišemo kot funkcijo s kroga na sfero

$$\hat{\mathbf{n}} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2.$$

Vemo, da je prva homotopska grupa sfere trivialna (grupa z enim elementom, ki jo običajno pišemo $\{0\}$), a moramo upoštevati še zrcalno simetrijo nematika. Znano nam je, da so v faznem prostoru poleg zank na sferi γ fizikalno dovoljene krivulje $\tilde{\gamma}$, ki imajo nasproti ležeči krajišči, torej $\tilde{\gamma}(1) = -\tilde{\gamma}(0)$. Na sferi $\mathbb{S}^2$ te niso zanke, so pa zanke v projektivni ravnini $\mathbb{RP}^2$. Ker nasproti ležečih krajišč na sferi ne moremo zvezno premakniti v eno krajišče in obratno, take krivulje *niso* homotopne zankam na sferi, so pa homotopne med seboj. Zato v fundamentalni grupi dobimo še en homotopski razred. Če spojimo dve krivulji, homotopni $\tilde{\gamma}$, dvakrat obhodimo pol sfere, torej dobimo zanko γ . Podobno sta pri spoju zanke γ in krivulje $\tilde{\gamma}$ krajišči še vedno nasprotni, zato dobimo krivuljo, homotopno $\tilde{\gamma}$.

Zanka na sferi γ je homotopna točki, torej je spoj dveh krivulj z nasprotnimi krajišči $\tilde{\gamma}$ zanka γ , spoj dveh zank pa prav tako. Spoj γ in $\tilde{\gamma}$ pa je homotopen $\tilde{\gamma}$. To zapišemo kot

$$\begin{aligned} [\gamma] \cup [\gamma] &= [\tilde{\gamma}] \cup [\tilde{\gamma}] = [\gamma], \\ [\tilde{\gamma}] \cup [\gamma] &= [\gamma] \cup [\tilde{\gamma}] = [\tilde{\gamma}]. \end{aligned}$$

Dobimo fundamentalno grupo z dvema homotopskima razredoma

$$\pi_1(\hat{\mathbf{n}}(D_{\text{enost. pov.}})) = \{[\gamma], [\tilde{\gamma}]\}.$$

Prostor $\hat{\mathbf{n}}(D_{\text{enost. pov.}})$ je realna projektivna ravnina $\mathbb{RP}^2$, z zvezami za spoje pa dobimo grupo z dvema elementoma – ciklično grupo $\mathbb{Z}_2$, ki predstavlja permutaciji dveh elementov. Tako dobimo

fundamentalno grupo projektivne ravnine

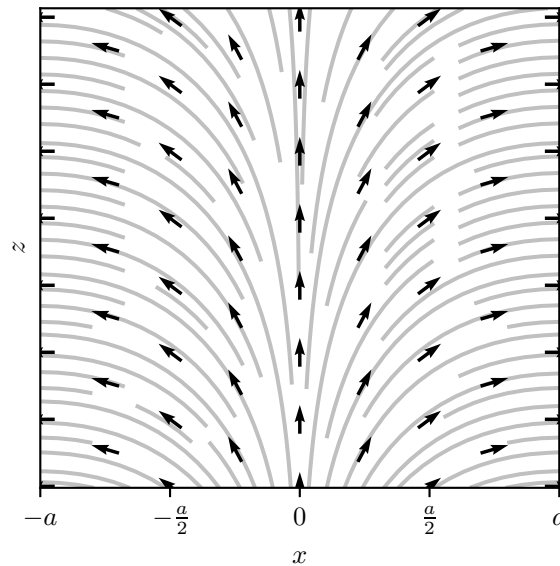
$$\pi_1(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}_2.$$

Za neravninski nematik ima fundamentalna grupa torej dva elementa – krivulje, ki v faznem prostoru opravijo cele ovoje, ter krivulje, ki opravijo polcele ovoje. Ta dva elementa lahko razumemo kot cela in polcela ovojna števila, saj s homotopijami ovojna števila lahko spremenimo za celo število. To pomeni, da pri ravninskem nematiku za katerikoli celoštevilski robni pogoj v notranjosti dobimo celoštevilski defekt ter podobno za polcela števila.

2.6 Rešitve in defekti

Z novo prostostno stopnjo si spet oglejmo rešitvi za robna pogoja $\hat{\mathbf{n}}|_{\partial D} = \hat{\mathbf{x}}$ ter $\hat{\mathbf{n}}|_{\partial D} = \hat{\rho}$. Za robni pogoj $\hat{\mathbf{n}}|_{\partial D} = \hat{\mathbf{x}}$ dobimo enako rešitev kot pri ravninskem nematiku – konstantno polje $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{x}}$, saj so ravne silnice najmanj ukrivljene. Za robni pogoj $\hat{\mathbf{n}}|_{\partial D} = \hat{\rho}$ smo za ravninski nematik dobili črtasti defekt $+1$. Ta ni odstranljiv, saj fundamentalno grupo krožnice oštevilči ovojno število. Za neravninske nematike pa vemo, da so krivulje s celoštevilskimi ovojnimi števili homotopne, zato obstaja rešitev, pri kateri namesto defekta $+1$ dobimo defekt 0 , s čimer se znebimo defekta. Izkaže se, da direktorsko polje tedaj še vedno ohranja osno simetrijo, z večanjem polmera se pa nagiba ven iz ravnine, da v osi velja $\hat{\mathbf{n}}(\rho = 0) = \pm \hat{\mathbf{z}}$. Temu pojavu rečemo *pobeg iz ravnine*, eno izmed dveh zrcalno simetričnih rešitev pa vidimo na sliki 8.

Oglejmo si še robni pogoj $\hat{\mathbf{n}}|_{\partial D} = \cos(\frac{\varphi}{2})\hat{\mathbf{x}} + \sin(\frac{\varphi}{2})\hat{\mathbf{y}}$ za azimutalni kot $\varphi \in [0, 2\pi]$. Ravninsko rešitev, torej $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0$, smo si ogledali že na sliki 7, saj ima robni pogoj ovojno število $+\frac{1}{2}$. Vemo pa, da polceloštevilska ovojna števila niso homotopna celoštevilskim, torej niso homotopna brezdefektni rešitvi ($k = 0$). Posledično za polceloštevilsko ovojno število popolni pobeg iz ravnine ni mogoč in v vsakem primeru v domeni dobimo polceloštevilski črtasti defekt vzdolž osi.



Slika 8. Presek direktorskega polja vzdolž osi ($y = 0$) neskončnega valja polmera a z osjo $\hat{\mathbf{z}}$. Prikazana je rešitev, pri kateri se direktor v osi nagne v smeri $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$. Ta rešitev nima defektov.

3. Homotopije ploskev

Do sedaj nas je pogosto zanimalo, kakšne so topološke lastnosti rešitev, ki jim predpišemo vrednost na robu. Rešitev ni vsebovala defektov, če je bila krivulja direktorja, ovrednotenega na robu,

homotopna točki. Utegnilo bi nas zanimati, če rešitvi pri enakih robnih pogojih lahko zvezno preslikamo eno v drugo, torej če sta homotopni. Fizikalno bi to pomenilo, da se lahko ena rešitev preobrazi v drugo rešitev, npr. ker je ta energijsko ugodnejša.

3.1 Spoj ploskev in druga homotopska grupa

Ker skušamo preslikati rešitve, definirane na (vsaj) dvorazsežni domeni, moramo obravnavati homotopijo zveznih *ploskev*. Zanje brez izgube splošnosti predpostavimo, da so preslikave z enotskega kvadrata

$$f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Za ploskve definiramo *spoj*, ki ga za ploskvi f in g dobimo s predpisom, podobnim predpisu za spoj zank,

$$(f \cup g)(u, v) = \begin{cases} f(2u, v); & u < \frac{1}{2} \\ g(2u - 1, v); & u \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Za ploskve hočemo definirati homotopsko grupo, katere elementi so homotopski razredi glede na homotopijo ploskev.

1. Podobno kot pri krivuljah, je spoj zveznih ploskev zvezen in dobro definiran, če velja $f|_{\partial D} = g|_{\partial D} = x_0 \in D$, torej, če sta ploskvi *zaključeni*. Tako imamo lastnost *zaprtost*.
2. Asociativnost dobimo s podobnim sklepom kot pri spoju krivulj.
3. Poznamo *konstantno* ploskev $f(u, v) = x_0$, ki ji pogosto rečemo *točka*, vendar jo moramo razlikovati od konstantne krivulje. Ta služi kot *enota* spoja.
4. Definiramo še *nasprotno* ploskev $f^-(u, v) = f(1 - u, v)$, ki služi kot *nasprotni element*.

S temi lastnostmi dobimo grupo, ki jo imenujemo *druga homotopska grupa* in jo označimo kot

$$\pi_2(D).$$

3.2 Druga homotopska grupa π_2 raznih prostorov

3.2.1 π_2 enostavno povezanega prostora

Trivialno¹ drugo homotopsko grupo dobimo v *enostavno povezanem* prostoru, kot je enotska krogla. Enostavno vidimo, da vsako zaključeno ploskev, ki leži znotraj krogle, lahko skrcimo v točko oziroma konstantno ploskev. Zapišemo torej

$$\pi_2(D_{\text{enost. pov.}}) = \{0\}.$$

3.2.2 π_2 sfere, topološki naboj in topološki soliton

Pri domeni oblike dolgega valja s translacijsko simetrijo smo obravnavali domeno direktorja kot krog, ki je dvorazsežna enostavno povezana množica. Zato nas tedaj zanimajo homotopije ploskev v faznem prostoru $\hat{\mathbf{n}}(D)$, torej druga homotopska grupa $\pi_2(\hat{\mathbf{n}}(D))$. Vemo že, da v dolgem valju z robnim pogojem $\hat{\mathbf{n}}|_{\partial D} = \hat{\boldsymbol{\rho}}$ dobimo dva pobega iz ravnine, za katera v središču velja $\hat{\mathbf{n}}(\rho = 0) = \pm \hat{\mathbf{z}}$. Robni pogoj lahko zvezno nagnemo v robni pogoj $\hat{\mathbf{n}}|_{\partial D} = \hat{\mathbf{z}}$. Pri tem eno izmed rešitev zvezno nagnemo v trivialno rešitev $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$, druga rešitev pa se vzdolž polmera domene obrne navzdol. Za tak robni pogoj sta rešitvi torej konstantna ploskev $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$, ki je v faznem prostoru točka $\hat{\mathbf{z}}$, ter obrat, ki v faznem prostoru enkrat pokrije sfero.

¹Trivialna grupa je grupa z enim elementom, ki jo običajno pišemo za operacijo seštevanja, torej $\{0\}$

Sfere, razpete na sferi, ne moremo zvezno deformirati v točko, zato sfera *ni* homotopna točki. To lahko fizikalno osmislimo z dejstvom, da so milni mehurji obstojni kljub načelu minimizacije površine (če ne počijo). Ker rešitev z obratom *ni* homotopna konstantni rešitvi, rešitev ne moremo zvezno deformirati med seboj.

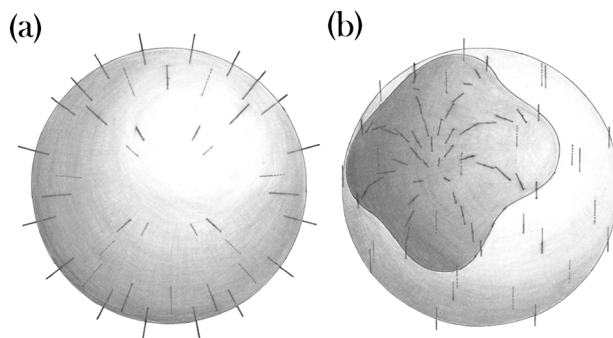
Omenili smo že, da je energija rešitve sorazmerna z ukrivljenostjo, zato ima trivialna rešitev $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$, ki ni ukrivljena, najnižjo energijo. Ta je energijsko najugodnejša, torej je energijsko obstojna. Rešitev z obratom ima višjo energijo, a ni homotopna trivialni, zato ne more preiti v energijsko ugodnejše stanje. Rečemo, da je *topološko* obstojna, rešitvam, ki so topološko obstojne, pa pravimo *topološki solitoni*. Te rešitve so zvezne povsod, zato *niso* enake topološkemu defektu. Prav tako *niso* le lokalni minimi energije, namreč so obstojni na perturbacije, ki so dovolj majhne, da ohranijo zvezno polje (tipično so to energije, veliko večje od energije defekta).

Oglejmo si še rešitev pri kateri direktor vzdolž polmera v polarnem kotu opravi celoten obrat, torej se obrne za 2π . Ploskev v faznem prostoru predstavlja dvojno pokritje ploskve, torej skoraj vsako točko na ploskvi obišče dvakrat. Direktorje notranjega dela rešitve, na katerem se direktor obrne za kot π , lahko zvezno zavrtimo okrog osi $\hat{\mathbf{z}}$ za kot π . Tako spet dobimo rešitev, ki predstavlja dvojno pokritje druge polovice sfere in pri kateri direktor kaže v smereh $\hat{\mathbf{r}}$ in $\hat{\mathbf{z}}$. Lahko se prepričamo, da se tedaj pri celotni rešitvi direktor vzdolž polmera *ne* obrne, torej je ta rešitev homotopna konstantni ploskvi. Večkratna pokritja podobno prevedemo na trivialno rešitev ali na soliton.

Sprva nepovezan problem je krogelna domena, ki ji predpišemo robni pogoj na sferi. Trivialni robni pogoj je konstantni robni pogoj $\hat{\mathbf{n}}|_{\partial D} = \hat{\mathbf{z}}$, ki da konstantno rešitev $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$. Najenostavnejši netrivialni robni pogoj pa je $\hat{\mathbf{n}}|_{\partial D} = \hat{\mathbf{r}}$, kjer je $\hat{\mathbf{r}}$ sferični radialni bazni vektor. Ta sferično simetrični pogoj da sferično simetrično rešitev $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}}$. V točki $\mathbf{r} = 0$ ima ta rešitev *točkasti* defekt. Naj bosta ϑ in φ krogelna kota, s katerima parametriziramo domeno. Tedaj velja

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{n}}(\vartheta = 0, \varphi) &= +\hat{\mathbf{z}}, \\ \hat{\mathbf{n}}(\vartheta = \pi, \varphi) &= -\hat{\mathbf{z}},\end{aligned}$$

kar kljub drugačnim oznakam parametrov prepoznamo kot robna pogoja, ki porodita soliton.



Slika 9. (a) Sferični robni pogoj $\hat{\mathbf{n}}|_{\partial D} = \hat{\mathbf{r}}$, (b) "počesan" v $\hat{\mathbf{n}}|_{\partial D} = \hat{\mathbf{z}}$, z izjemo osenčenega območja s solitonom. Prirejeno po [1].

Posledica je, da so večkratni ovoji v polarnem kotu med seboj homotopni. Podobnost je bolj očitna, če direktor na sferi $\hat{\mathbf{n}}|_{\partial D} = \hat{\mathbf{r}}$ "počesemo", da na večini sfere velja $\hat{\mathbf{n}}|_{\partial D} = -\hat{\mathbf{z}}$. Tedaj na *nepočesanem* delu enostavno prepoznamo soliton. Prikaz tega vidimo na sliki 9.

Podobno kot smo določili prvo homotopsko grupo krožnice $\pi_1(\mathbb{S}^1)$, bi radi določili drugo homotopsko grupo sfere $\pi_2(\mathbb{S}^2)$. Pri zankah je homotopsko grupo oštevilčilo ovojno število, podobno invarianto pri ploskvah pa imenujemo *topološki naboj* q . Ovojno število pove, kolikokrat se zanka ovije okrog krožnice. Podobno lahko poskusimo storiti s ploskvami. Vemo že, da so večkratni ovoji v

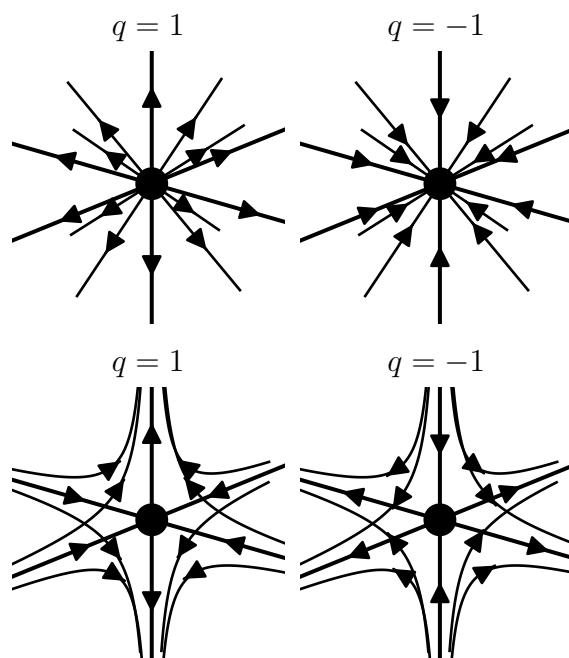
polarni smeri homotopni točki oziroma enkratnem ovoju. Zato topološki naboj ne more biti ovojno število v polarni smeri. Izkaže se, da večkratni ovoji v azimutalni smeri med seboj *niso* homotopni.

Zaradi tega sumimo, da je topološki naboj q ekvivalenten azimutalnemu ovojnemu številu ter da velja

$$\pi_2(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}.$$

Izkaže se, da je vrednost homotopne grupe pravilna, sklep o topološkem naboju pa ne povsem. Razlog je, da se s parnostno transformacijo $\hat{\mathbf{n}} \mapsto -\hat{\mathbf{n}}$ obrne predznak topološkega naboja q , kar za ovojno število ne velja. Natančneje, predznak določata smeri direktorja v polih ploskve, ki pokrije sfero. Točkasti defekt torej do predznaka natančno definira azimutalno ovojno število, predznak pa lahko zamenja orientacija direktorjev v polih defekta.

Za primer defekta vzemimo $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}}$. Rešitev je krogleno simetrična, zato je azimutalno ovojno število $+1$. Tako že vemo, da velja $|q| = 1$. Ker v polih direktor kaže *ven*, dobimo predznak $+$, skupno pa to da $q = 1$. Podobno bi za $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{r}}$ dobili $q = -1$. Pri tem robnem pogoju se direktor na poti od enega pola do drugega obrne za kot π v smeri obhoda. Oglejmo si še robni pogoj, pri katerem se direktor zopet obrne za kot π , vendar v obratni smeri. Zaradi osne simetrije si defekta lahko predstavljamo kot vrtenine ravninskih defektov $+1$ (radialnega) in -1 (hiperboličnega) v polarnem kotu. Za hiperbolični defekt prav tako velja $|q| = 1$, predznak je pa zopet odvisen od smeri direktorja na simetrijski osi. Obe vrsti defektov lahko vidimo na sliki 10.



Slika 10. Dve vrsti defektov $|q| = 1$. Prikazana sta defekta radialne in hiperbolične oblike, predznak q pa je odvisen od smeri direktorja v simetrijski osi. Prirejeno po [2]

3.2.3 π_2 realne projektivne ravnine

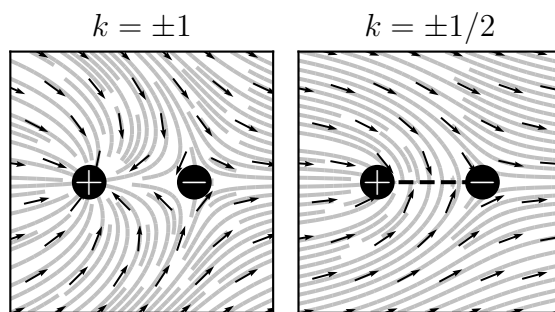
Pri drugi homotopski grupi simetrija $-\hat{\mathbf{n}} \iff \hat{\mathbf{n}}$ ne da novih rešitev, kot jih je pri črtastih defektih, zato mora biti druga homotopska grupa sfere enaka kot homotopska grupa projektivne ravnine (polsfere v faznem prostoru), kar zapišemo

$$\pi_2(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}.$$

Pri krožnici smo simetrijo lahko upoštevali, ker smo $\mathbb{S}^1$ prerežali in dobili povezano množico. Izkaže se, da je $\mathbb{S}^1$ edina hipersfera $\mathbb{S}^n$, ki jo lahko enkrat prerežemo in dobimo povezan prostor. Zato tudi drugo homotopsko grupo sfere, enako kot prvo, oštevilči azimutalno ovojno število, ki pa je v tem primeru kljub direktorski simetriji vedno celoštevilsko.

4. Rešitve z več defekti

V nematikih pogosto zasledimo več topoloških defektov, zato se utegnemo vprašati, kakšna je rešitev z več defekti. Najprej si oglejmo ravninske nematike. Spomnimo se, da ravninske defekte oštevilči ovojno število, ko ovijemo dve singularnosti oz. defekta, pa se ovojni števili defektov *seštejeta*. Najenostavnejše to vidimo v primeru defektov $+1$ in -1 na sliki 11, levo. Podobno dobimo pri ravninskih črtastih defektih $+1/2$ in $-1/2$, kar vidimo na sliki 11, desno. Če direktorsko polje predstavimo z vektorskim, vemo, da za polceloštevilski defekt na poltraku s krajiščem v defektu dobimo matematično nezveznost, ki jo izrežemo z domene. Če imamo v domeni dva defekta, lahko brez izgube splošnosti reza povežemo in tako matematično nezveznost omejimo na daljico med defektoma [4].



Slika 11. Para defektov z obhodnim številom $k = \pm 1$ ter $k = \pm 1/2$. Prirejeno po [4]

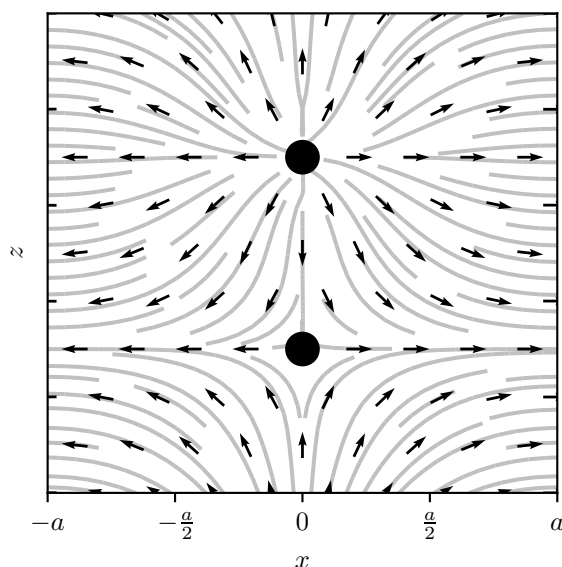
V obeh primerih par defektov od daleč dobi obliko defekta 0, torej brezdefektne rešitve. Razlog je, da se ovojni števili defektov v obeh primerih seštejeta v 0.

Za nematike je energijsko ugodno, da so lokalno poravnani, zato se ukrivljenost silnic minimizira. Za para defektov ± 1 in $\pm 1/2$ ukrivljenost silnic narašča z medsebojno razdaljo, zato defekta občutita privlačno silo. Če defektov ne pritrdimo, se začneta zblíževati in se uničita. Podobno lahko zaradi fluktuacij tekočih kristalov v brezdefektnem mediju nastane par defekt-antidefekt. Na protiznačna defekta zato lahko gledamo kot antidelca – v obeh primerih obravnavamo točkasto in stabilno anomalijo v polju, ki ima dolgorazsežne učinke na celotno polje.

Podobno par istoznačnih defektov občuti odbojno silo. Par defektov $+1$ zaradi seštevanja ovojnih števil od daleč izgleda kot $+2$ defekt. Majhna motnja lahko povzroči, da se defekt $+2$ razcepi na dva defekta $+1$, ki se zaradi odbojne sile ločita. Prav tako se defekt $+1$ lahko loči na dva defekta $+1/2$.

Pri domeni oblike dolgega valja smo za robni pogoj $\hat{\mathbf{n}}|_{\partial D} = \hat{\boldsymbol{\rho}}$ dobili pobeg iz ravnine. Nastopil je, ker se zrcalna simetrija vzdolž osi $\hat{\mathbf{z}}$ zaradi labilne lege rešitve $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\boldsymbol{\rho}}$ spontano zlomi v enega izmed pobegov. Fizikalno se to zgodi zaradi lokalnih fluktuacij tekočerkristalnih molekul, lokalni zlom simetrije pa ravna vedno bolj oddaljene dele nematika. Pri zlomu simetrije se značilno zgodi, da se v enem delu valja simetrija zlomi v eno smer, v drugem pa v drugo. Na stičišču domen zato dobimo torazsežne točkaste defekte, kar vidimo na sliki 12.

Na sliki 12 opazimo, da je zgornji defekt radialne oblike, na osi pa direktor kaže navzven, zato je topološki naboj defekta $q = 1$. Spodnji defekt zavzame hiperbolično obliko, na osi pa direktor



Slika 12. Pobeg iz ravnine. Simetrija se zlomi spontano, zato se direktor nekje obrne v eno smer, nekje v drugo, na mejah pa nastanejo točkasti defekti. Vidimo stik $+\hat{z}$, $-\hat{z}$, $+\hat{z}$ ter zato dva defekta. Prirejeno po [2]

kaže navznoter, zato zanj velja $q = -1$.

Za trirazsežne točkaste defekte velja, podobno kot za črtaste, da se istoznačna defekta odbijata, protiznačna pa privlačita in uničita. Podobno tudi defekti z večjimi topološkimi naboji q razpadejo na manjše, kjer za elementarni defekt velja $q = \pm 1$.

Za polceloštevilski črtasti defekt, npr. $+1/2$, velja, da moramo pri obravnavi direktorja kot vektorja prostor prerezati s polravnino, ki sega do defekta. Če to ravnino prečkamo, se direktorju obrne smer in zato tudi predznak q . Točkasti defekt se z enojnim obhodom črtastega defekta preobrazi v sebi nasproten defekt, topološki naboj q pa tako ni več dobro definiran – samo do predznaka natančno. Posledica te ugotovitve je, da lahko eden izmed para istoznačnih defektov obide polceloštevilski črtasti defekt, pri tem zamenja predznak in se nato z drugim defektom uniči [3].

Naj ima nematik številne črtaste in točkaste defekte. Celoštevilski črtasti defekti lahko razpadejo na $+1/2$ črtaste defekte. Nekateri izmed njih se lahko združijo v ± 1 defekte in pobegnejo iz ravnine ter tako tvorijo črtaste solitone. Pri tem na krajiščih ustvarijo točkaste defekte. Ta krajišča ter ostali točkasti defekti se med seboj na polceloštevilskih črtastih uničujejo. Ko črtastem solitonu odstranimo točkasto krajišče, tudi ta razpade. Po množičnem uničenju v nematiku praviloma ostane največ en točkasti defekt in največ en črtasti defekt.

5. Zaključek

S teorijo homotopij in homotopskih grup smo spoznali, kako izgleda direktorsko polje v raznih domenah in robnih pogojih. Izvedeli smo, katere količine opisujejo črtaste in točkaste defekte ter kakšna je interakcija med njimi. Ugotovili smo, da je ta podobna interakciji delcev in antidelcev. To pravilno namiguje na dejstvo, da je topološka obravnava sistemov ključna v številnih na videz nepovezanih področjih fizike.

6. Zahvala

Zahvaljujem se mentorju doc. dr. Simonu Čoparju za nazorno razlago tekočih kristalov s topološkega vidika.

LITERATURA

- [1] E. A. Matsumoto in R. D. Kamien G. P. Alexander, B. G. Chen, *Colloquium: Disclination loops, point defects, and all that in nematic liquid crystals*, Rev. Mod. Phys. **84** (2012), 497.
- [2] M. Kleman in O. D. Lavrentovich, *Topological point defects in nematic liquid crystals*, Philos. Mag. **86** (2006), 4117.
- [3] N. Mermin, *The topological theory of defects in ordered media*, Rev. Mod. Phys. **51** (1979), 591.
- [4] S. Čopar in Ž. Kos, *Many-defect solutions in planar nematics: interactions, spiral textures and boundary conditions*, Soft Matter **20** (2024), 6894.