

KOZMOLOŠKI UČINKI NA RAZDALJO KOTNE VELIKOSTI V MODELU RAVNEGA VESOLJA

VID KAVČIČ

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Zaradi širjenja vesolja se razdalja med zelo oddaljenimi nebesnimi telesi s časom povečuje, zato je treba pri merjenju razdalj na velikih skalah upoštevati kozmološke učinke. Slednji vplivajo tudi na navidezno kotno velikost nebesnih teles, ki se z razdaljo in rdečim premikom za zelo oddaljena telesa nepričakovano spreminja. V članku je predstavljena izpeljava zveze med razdaljo kotne velikosti in rdečim premikom v posebnih modelih ravnega vesolja.

COSMOLOGICAL EFFECTS ON THE ANGULAR DIAMETER DISTANCE IN A FLAT COSMOLOGICAL MODEL

Due to the expansion of the universe, the distance between very distant celestial objects increases over time, and cosmological effects therefore need to be taken into account when measuring distances on large scales. These effects also influence the apparent angular size of celestial objects, which, for objects at high redshift, varies with distance and redshift in a non-intuitive manner. This article presents the derivation of the relation between angular diameter distance and redshift within specific models of a flat universe.

1. Uvod

Ko v vsakdanjem življenju opazujemo predmete okoli sebe, lahko na podlagi njihove kotne velikosti sklepamo, kako daleč so od nas. Na primer, jabolko na okenski polici se zdi večje kot jabolko na sosedovi jablani. Podobno lahko astronomi z meritvami kotne velikosti θ nebesnih teles, če poznajo njihovo fizično velikost l , izračunajo njihovo oddaljenost d . Pri razmeroma majhnih kotih θ velja preprosta zveza

$$\theta = \frac{l}{d}.$$

Na kozmoloških razsežnostih pa zveza med kotno velikostjo in oddaljenostjo ni tako preprosta. Zaradi širjenja vesolja se namreč razdalja med zelo oddaljenimi nebesnimi telesi s časom povečuje, zato moramo pri računanju upoštevati tudi kozmološke učinke.

V članku bomo preučili kozmološke učinke na zvezo med kotno velikostjo oddaljene galaksije (ali drugega razsežnega nebesnega telesa) in njeno oddaljenostjo. Uporabili bomo model ravnega vesolja, ki vključuje snov in temno energijo, saj ta najbolj natančno opisuje vesolje, v katerem živimo danes. Za razumevanje teh pojavov bomo najprej preleteli ključne osnove kozmologije, potrebne za obravnavo.

2. Osnove kozmologije

Kozmologija je veja astronomije, ki se ukvarja z nastankom, razvojem in zgradbo vesolja kot celote. Kozmološke teorije so osnovane na **kozmoškem načelu**, ki pravi, da je v povprečju na dovolj velikih razsežnostih vesolje **homogeno** in **izotropno**. To pomeni, da je na takšnih razsežnostih vesolje povsod enako, poleg tega pa je za vse opazovalce tudi videti enako v vseh smereh. Posledica tega načela je, da v vesolju na razdaljah, večjih od okoli 100 Mpc, ni odlikovanega položaja ali odlikovane smeri [2].

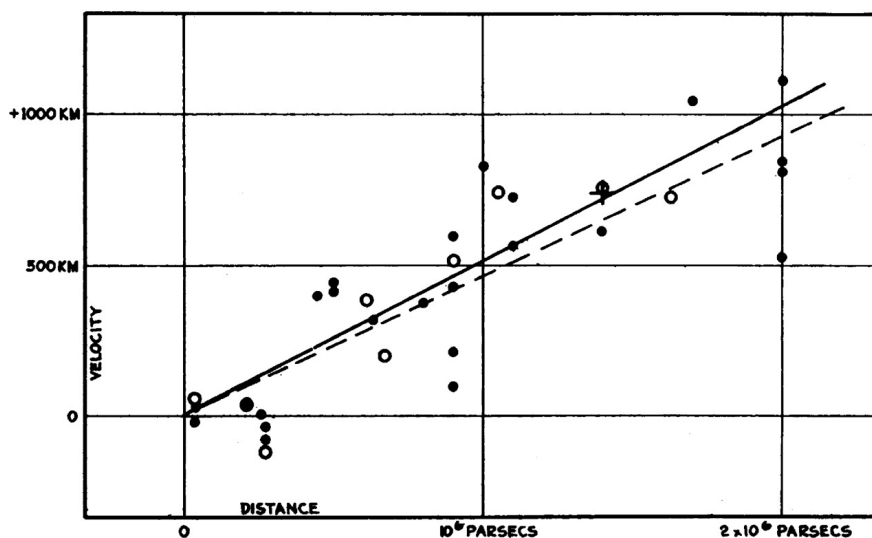
2.1 Hubble-Lemaîtreov zakon in kozmološki rdeči premik

V prvi polovici dvajsetega stoletja sta ameriški astronom Edwin Hubble in belgijski astronom Georges Lemaître neodvisno prišla do ugotovitve (slika 1), da je rdeči premik z galaksij sorazmeren z njihovo oddaljenostjo d . Velja

$$z = \frac{H_0 d}{c}, \quad (1)$$

kjer je c hitrost svetlobe v praznem prostoru in $H_0 \approx 70 \text{ (km/s)/Mpc}$ **Hubbleova konstanta**. Zvezi pravimo **Hubble-Lemaîtreov zakon**.

Premik spektralnih črt sta pripisala Dopplerjevemu pojavu, saj sta vesolje obravnavala klasično in predpostavila, da se galaksije v statičnem prostoru dejansko oddaljujejo od nas. V resnici je treba vesolje obravnavati v sklopu Einsteinove splošne teorije relativnosti, ki poenoti prostor in čas. Oddaljevanje galaksij ni posledica njihove lastne hitrosti, temveč raztezanja prostora. Izmerjeni rdeči premik je tako v resnici posledica širjenja vesolja.



Slika 1. Originalni graf Edwina Hubbla, ki prikazuje navidezno hitrost oddaljevanja galaksij (navpična os) v odvisnosti od oddaljenosti (vodoravna os). Vir: [3].

Izmerjenemu rdečemu premiku, ki je posledica širjenja vesolja, pravimo **kozmoški rdeči premik**. Definiramo ga kot

$$z = \frac{\lambda_{\text{pr}} - \lambda_{\text{odd}}}{\lambda_{\text{odd}}}, \quad (2)$$

kjer je λ_{odd} valovna dolžina svetlobe, ki jo odda npr. oddaljena galaksija, in λ_{pr} valovna dolžina te svetlobe, kot jo izmerimo mi [2].

Linearna zveza med rdečim premikom z in oddaljenostjo d , ki jo opisuje Hubble-Lemaîtreov zakon, zato velja le za bližnja telesa. Pri večjih kozmoloških rdečih premikih $z \gtrsim 0,2$ pa moramo za izračun oddaljenosti poznati sestavo vesolja ter ustrezen kozmološki model.

2.2 Skalirni faktor

Širjenje vesolja opišemo s **skalirnim faktorjem** $a(t)$. Razdaljo med dvema telesoma ob nekem času t zapišemo kot

$$d(t) = a(t) r, \quad (3)$$

kjer razdalji d pravimo **prava razdalja**, razdalji r pa **sogibajoča razdalja**. Grafično ponazoritev skalirnega faktorja prikazuje slika 2. Dogovorimo se, da je skalirni faktor danes (ob času t_0) enak $a(t_0) = 1$. Iz tega sledi, da je v današnjem času sogibajoča razdalja enaka pravi razdalji danes, $d(t_0) = r$ [2].

Sorazmernostni koeficient H_0 v Hubble-Lemaîtrevem zakonu (1) velja le za današnje vesolje. V preteklosti je bila vrednost te konstante drugačna, zato v splošnem vpeljemo časovno odvisen **Hubbllov parameter** $H(t)$. Definiramo ga kot

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (4)$$

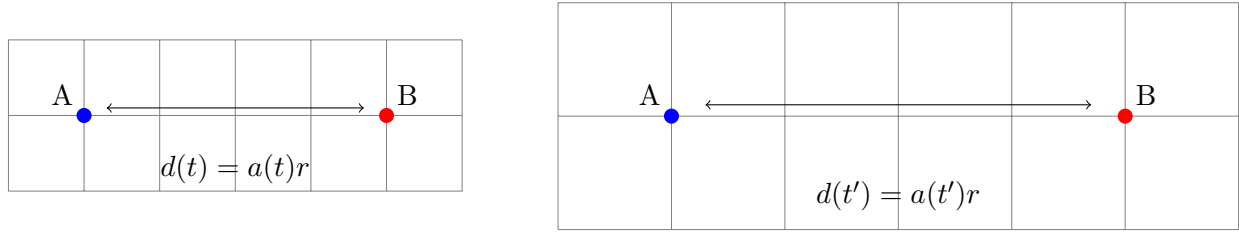
Hubblova konstanta H_0 je tako le današnja vrednost Hubblovega parametra, kar zapišemo kot $H_0 = H(t_0)$.

S širjenjem vesolja se razteza tudi valovna dolžina svetlobe. Od tod gre izpeljati, da za kozmološki rdeči premik v splošnem velja zveza

$$\frac{a(t_{\text{pr}})}{a(t_{\text{odd}})} = \frac{\lambda_{\text{pr}}}{\lambda_{\text{odd}}} = 1 + z, \quad (5)$$

kjer sta $a(t_{\text{odd}})$ in $a(t_{\text{pr}})$ skalirna faktorja ob časih t_{odd} oziroma t_{pr} , ko je bila svetloba oddana oziroma prejeta, ter λ_{odd} in λ_{pr} valovni dolžini oddane oziroma prejete svetlobe. Če upoštevamo, da je $t_{\text{pr}} = t_0$ in da je $a(t_0) = 1$, lahko zvezo med skalirnim faktorjem a in kozmološkim rdečim premikom z za poljuben čas v preteklosti zapišemo kot

$$a = \frac{1}{1 + z}. \quad (6)$$



Slika 2. Mreža sogibajočih koordinat r ob času t , ko je prava razdalja med galaksijama enaka $d(t)$, skalirni faktor pa $a(t)$. Ob kasnejšem času t' se sogibajoča razdalja med galaksijama A in B (število kvadratkov) ni spremenila, kljub temu pa se je prava razdalja povečala na $d(t')$, ker se je vesolje razširilo. Skalirni faktor se je povečal na $a(t')$. Prirejeno po [1].

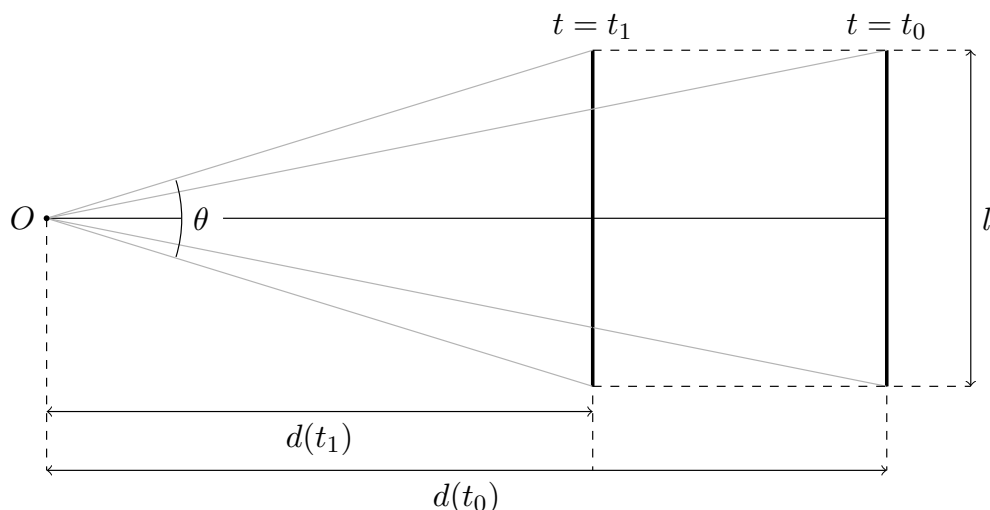
2.3 Razdalja kotne velikosti

Razdalja, ki jo v kozmologiji dobimo z merjenjem, pogosto ne sovpada niti s pravo razdaljo niti s sogibajočo razdaljo. V tem razdelku bomo spoznali, kako lahko razdaljo, ki jo izračunamo iz meritev kotne velikosti θ oddaljenega nebesnega telesa, povežemo s pravo razdaljo d .

Zamislimo si nebesno telo s fiksno velikostjo l , na primer oddaljeno galaksijo. Takoj na začetku naj posebej poudarimo, da se vrednost l s časom zaradi širjenja vesolja ne spreminja. Denimo, da izmerimo, da je kotna velikost galaksije na našem nebu enaka θ . **Razdaljo kotne velikosti** (angl. *angular diameter distance*) s tem v zvezi definiramo kot

$$d_A = \frac{l}{\theta}. \quad (7)$$

Denimo, da se galaksija z velikostjo l nahaja na sogibajoči razdalji r in da je svetlobo, ki jo opazujemo danes, oddala ob času $t = t_1$. To svetlobo nato opazovalka na Zemlji zazna ob času $t = t_0$ pri sogibajoči koordinati $r = 0$. Poenostavljen oris pojava prikazuje slika 3. Če želimo izraziti velikost l galaksije z izmerjeno kotno velikostjo θ , moramo v izračunu torej upoštevati oddaljenost galaksije v trenutku, ko je galaksija oddala svetlobo, ki jo opazujemo danes [5].



Slika 3. Poenostavljena skica medsebojnega položaja opazovalke (O) in galaksije ob času $t = t_1$ in ob času $t = t_0$. Skica prikazuje spremembo relativnega položaja galaksije glede na opazovalko.

Če predpostavimo, da v vesolju velja običajna evklidska geometrija (tj. ravno vesolje, glej stran 6), lahko velikost l nebesnega telesa zapišemo kot

$$l = \theta \cdot d(t_1) = \theta \cdot a(t_1)r,$$

kjer smo z $a(t_1)$ označili skalirni faktor ob času t_1 . Če upoštevamo enačbo (6), lahko razdaljo kotne velikosti izrazimo kot

$$d_A = \frac{l}{\theta} = a(t_1)r = \frac{r}{1+z}.$$

Povzamemo, da razdaljo kotne velikosti d_A in sogibajočo razdaljo r , ki je v ravnem vesolju po definiciji enaka današnji vrednosti prave razdalje $d(t_0)$, povezuje enačba

$$d_A = \frac{d(t_0)}{1+z}. \quad (8)$$

Ker je $z > 0$, to pomeni, da je današnja vrednost prave razdalje $d(t_0) = r$ do galaksije v resnici za faktor $(1+z)$ večja od razdalje d_A , ki jo določimo iz meritve kotne velikosti galaksije. Enačbo lahko veliko lažje interpretiramo, če izrazimo kotno velikost

$$\theta = \frac{l}{d_A} = \frac{l}{d(t_0)}(1+z). \quad (9)$$

Od tod je jasno, da so zaradi kozmoloških učinkov galaksije videti večje, kot bi bile, če se vesolje ne bi širilo [5], kar je razvidno tudi s slike 3.

2.4 Sestava vesolja

Da bi lahko obravnavali odvisnost razdalje kotne velikosti od rdečega premika, moramo poiskati današnjo pravo razdaljo $d(t_0)$ do galaksije v odvisnosti od kozmološkega rdečega premika z . Ker je širjenje vesolja odvisno od njegove sestave, se moramo seznaniti še s tem, kako na širjenje vesolja vplivajo **snov**, **sevanje** in **temna energija**.

Med snov spada tako običajna barionska snov kot tudi temna snov. Ker se prostornina povečuje s tretjo potenco skalirnega faktorja, se gostota snovi ρ_m s skalirnim faktorjem a spreminja kot

$$\rho_m \propto a^{-3}. \quad (10)$$

Ker se s širjenjem vesolja razteza tudi valovna dolžina svetlobe in velja $\lambda \propto a$, se gostota sevanja ρ_r z naraščanjem skalirnega faktorja manjša še hitreje kot gostota snovi. Velja

$$\rho_r \propto a^{-4}. \quad (11)$$

Temna energija je posledica **kozmoške konstante** v osnovnih enačbah relativnosti in pojasni pospešeno širjenje vesolja. Razumemo jo lahko kot energijo praznega prostora, čeprav njena fizikalna narava danes še ni znana. Značilnost temne energije je, da je njena gostota ρ_Λ neodvisna od časa. Velja

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}, \quad (12)$$

kjer količino Λ imenujemo **kozmoška konstanta**.

Od velikega poka do okoli 47 000 let po velikem poku je v vesolju prevladovalo sevanje, sledilo je prevladovanje snovi vse do okoli 9,8 milijarde let po velikem poku [4]. Od takrat naprej do danes vse bolj prevladuje temna energija. Spreminjanje gostote posameznih sestavin vesolja in obdobja, ko prevladujejo posamične sestavine, prikazuje slika 4.

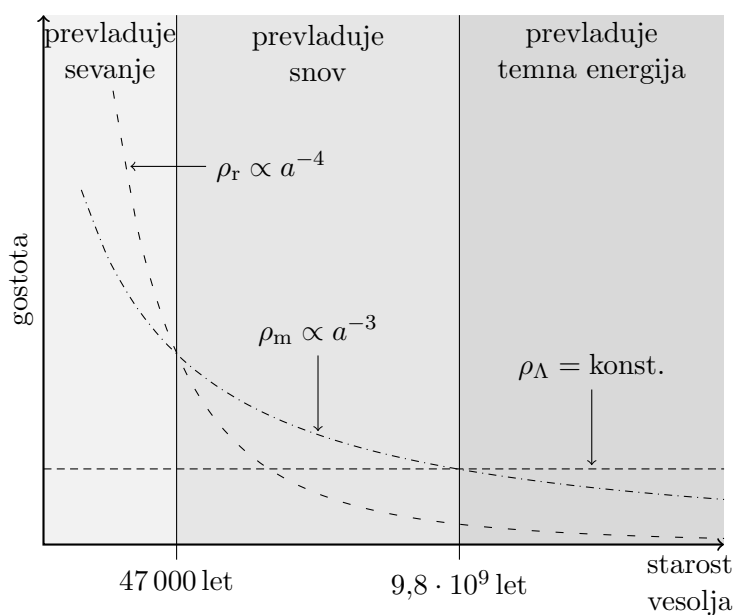
2.5 Opis širjenja vesolja

Pri opisu modelov vesolja nas zanima, kako se skalirni faktor $a(t)$ spreminja s časom oziroma kako se vesolje širi. V ta namen uporabljamo Friedmannove enačbe [5, 7], ki izhajajo iz Einsteinovih enačb splošne teorije relativnosti ter opisujejo razvoj homogenega in izotropnega vesolja.

Osnova teh enačb je **Friedmann-Lemaître-Robertson-Walkerjeva (FLRW) metrika**, ki določa geometrijo vesolja. V sfernih koordinatah jo zapišemo kot

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right]. \quad (13)$$

Parameter k določa **ukrivljenost** prostora. Če je $k > 0$, je vesolje zaprto in pozitivno ukrivljeno (2D analogija je površina krogle). Če je $k < 0$, pa je vesolje odprto in negativno ukrivljeno (2D



Slika 4. Spreminjanje gostote snovi ρ_m , gostote sevanja ρ_r in gostote temne energije ρ_Λ skozi čas. Vir: [2].

analogija je sedlo). V splošnem je parameter ukrivljenosti k neodvisen od časa. Sodobne meritve kažejo, da je naše vesolje ravno ($k = 0$).

Iz Einsteinovih enačb lahko izpeljemo Friedmannove enačbe, ki opisujejo dinamiko širjenja vesolja. Pri tem se v okviru članka omejimo na prvo Friedmannovo enačbo, ki jo lahko v poenostavljeni sliki razumemo kot posplošitev Newtonovega zakona v kozmološkem kontekstu. Prvo Friedmannovo enačbo zapišemo kot

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}, \quad (14)$$

kjer je $H = \dot{a}/a$ **Hubbleov parameter**, $\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda$ skupna gostota snovi, sevanja in temne energije, G gravitacijska konstanta, c hitrost svetlobe v praznem prostoru in k parameter ukrivljenosti. Prva Friedmannova enačba torej povezuje hitrost širjenja vesolja z zastopanostjo posameznih sestavin kot tudi z geometrijo prostora.

Ravno vesolje ($k = 0$) ima **kritično gostoto** ρ_c , ki jo iz prve Friedmannove enačbe (14) izrazimo kot

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (15)$$

Kritična gostota nam služi za naravno skalo gostote vesolja. Na podlagi primerjave s kritično gostoto uvedemo parametre gostote snovi, gostote sevanja, gostote temne energije in gostote ukrivljenosti:

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c}, \quad \Omega_r = \frac{\rho_r}{\rho_c}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c}, \quad \Omega_k = -\frac{kc^2}{a^2 H^2}. \quad (16)$$

S tem lahko prvo Friedmannovo enačbo zapišemo v elegantnejši obliki

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1. \quad (17)$$

Kozmološke parametre smo torej definirali tako, da je njihova vsota v vsakem trenutku enaka 1. Ker se tako kozmološki parametri kot tudi Hubbleov parameter H spreminjajo s časom, prvo Friedmannovo enačbo včasih raje zapišemo z današnjimi vrednostmi parametrov $\Omega_{m,0}$, $\Omega_{r,0}$, $\Omega_{k,0}$, $\Omega_{\Lambda,0}$, H_0 in s skalirnim faktorjem a :

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \frac{\Omega_{k,0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda,0} \right). \quad (18)$$

Izmerjene vrednosti parametrov v današnjem vesolju so $\Omega_{m,0} = 0,315 \pm 0,007$, $\Omega_{r,0} \sim 10^{-4}$, $\Omega_{k,0} \simeq 0$ in $\Omega_{\Lambda,0} = 0,685 \pm 0,007$ [9]. Ti rezultati pomenijo, da je naše vesolje ravno in da je sestavljeno iz okoli 68 % temne energije in 32 % snovi, prispevek sevanja in ukrivljenosti pa je zanemarljiv. Od snovi je 27 % nebarionske ali temne snovi in 5 % barionske ali običajne snovi. Medtem ko sestavo slednje že dokaj dobro poznamo, sta temna snov in temna energija še vedno uganki [4, 7].

3. Razdalja kotne velikosti v različnih modelih ravnega vesolja

V tem razdelku bomo analitično izpeljali zvezo med razdaljo kotne velikosti in rdečim premikom v posebnih modelih ravnega vesolja. Najprej bomo obravnavali model ravnega vesolja, v katerem je prisotna samo snov, nato pa še model ravnega vesolja, v katerem je prisotna samo temna energija. V primeru našega vesolja, kjer moramo upoštevati obe sestavini, analitične rešitve ni, zato bomo rešitev poiskali numerično in jo nato predstavili grafično.

3.1 Model ravnega vesolja s prevladujočo snovjo

Poiščimo odvisnost razdalje kotne velikosti $d_A(z)$ od kozmološkega rdečega premika z za enega od enostavnejših kozmoloških modelov. Obravnavajmo model ravnega vesolja ($k = 0$), v katerem je prisotna samo snov.

3.1.1 Izpeljava izraza za skalirni faktor

Preden se lotimo izračuna razdalje kotne velikosti, moramo poiskati rešitev $a(t)$ prve Friedmannove enačbe za to vesolje. V tem primeru iz enačbe (18) sledi

$$H^2 = H_0^2 \Omega_{m,0} a^{-3}. \quad (19)$$

Če upoštevamo definicijo Hubblovega parametra $H = \dot{a}/a$ in $\dot{a} = da/dt$, lahko enačbo (19) zapišemo kot

$$a^{1/2} da = H_0 \sqrt{\Omega_{m,0}} dt.$$

Izraz na levi strani enačbe integriramo v mejah od 0 do $a(t)$, izraz na desni pa v mejah od 0 do t . Od tod sledi

$$\frac{2}{3} a(t)^{3/2} = H_0 \sqrt{\Omega_{m,0}} t,$$

iz česar izrazimo

$$a(t) = \sqrt[3]{\frac{9}{4} \Omega_{m,0} H_0^2} t^{2/3}.$$

Pridelali smo zvezo med skalirnim faktorjem in starostjo vesolja v modelu ravnega vesolja s prevladujočo snovjo. Zvezo pogosteje zapišemo kot sorazmerje v obliki

$$a(t) \propto t^{2/3}. \quad (20)$$

Izpeljimo tudi, kolikšna je današnja starost t_0 vesolja v tem modelu. Zapišimo definicijo Hubblovega parametra in upoštevajmo enačbo (20). Sledi

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{2}{3} \frac{t^{-1/3}}{t^{2/3}} = \frac{2}{3} \frac{1}{t}. \quad (21)$$

Danes velja $t = t_0$, s tem pa tudi $H(t_0) = H_0$. Iz enačbe (21) sledi, da lahko starost vesolja t_0 v tem modelu izrazimo kot

$$t_0 = \frac{2}{3} \frac{1}{H_0}. \quad (22)$$

3.1.2 Izpeljava izraza za pravo razdaljo

Zamislimo si oddaljeno galaksijo, ki ji izmerimo rdeči premik z . Želimo izraziti njeno oddaljenost d . Spomnimo se FLRW-metrike (13), ki opisuje prostorsko homogeno in izotropno vesolje. Za svetlobni žarek, ki se giblje radialno, velja $ds = 0$, $d\theta = 0$ in $d\phi = 0$. V primeru ravnega vesolja ($k = 0$) tako dobimo zvezo

$$c dt = a(t) dr. \quad (23)$$

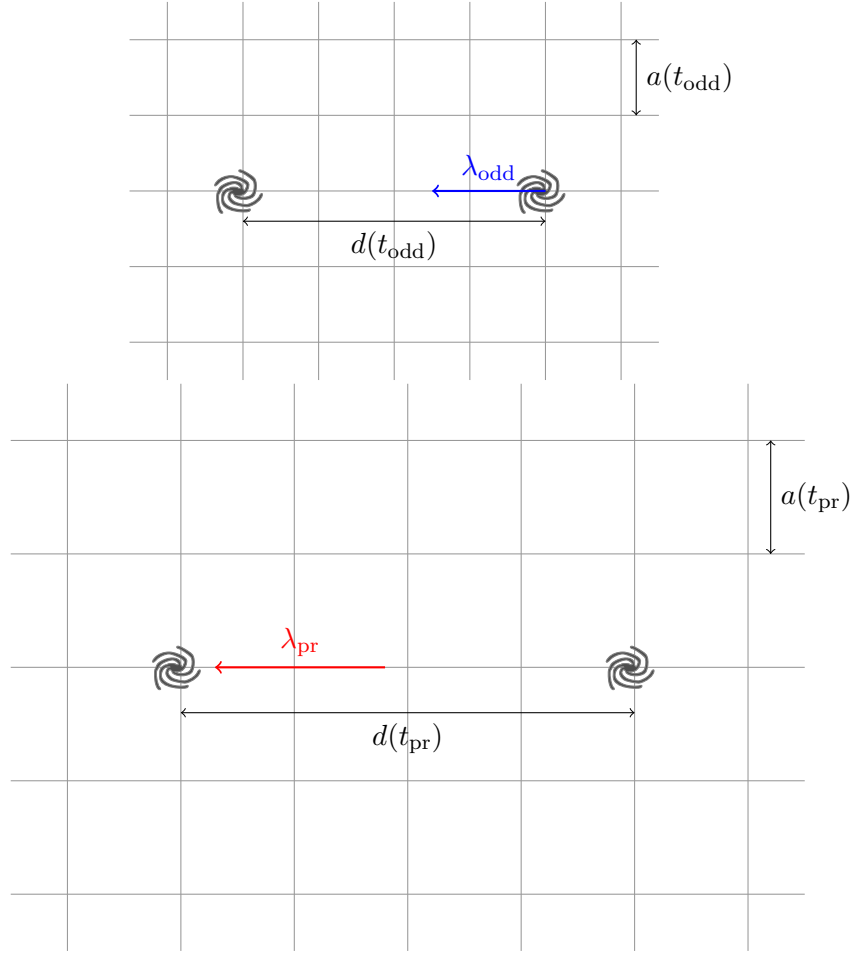
Iz enačbe izrazimo dr in upoštevamo, da v modelu s prevladujočo snovjo velja zveza $a(t) = (t/t_0)^{2/3}$. Dobimo

$$dr = \frac{c dt}{a(t)} = \frac{c dt}{(t/t_0)^{2/3}}. \quad (24)$$

Diferencialno enačbo 24 rešimo tako, da integriramo vsako stran enačbe posebej. Meje levega integrala tečejo med 0 in r , meje desnega pa od časa t_{odd} , ko je galaksija svetlobo oddala, do današnjega časa $t_{\text{pr}} = t_0$, ko svetlobo zaznamo na Zemlji (slika 5).

Integral na levi strani je trivialen, zato lahko sogibajčo razdaljo r , ki je enaka današnji vrednosti prave razdalje $d(t_0)$, izrazimo kot

$$r = d(t_0) = ct_0^{2/3} \int_{t_{\text{odd}}}^{t_0} \frac{dt}{t^{2/3}} = 3ct_0^{2/3} (t_0^{1/3} - t_{\text{odd}}^{1/3}) = 3ct_0 \left(1 - \left(\frac{t_{\text{odd}}}{t_0} \right)^{1/3} \right).$$



Slika 5. Galaksija ob času t_{odd} , ko je skalirni faktor vesolja $a(t_{\text{odd}})$, odda svetlobni pulz z valovno dolžino λ_{odd} . V tem trenutku je bila razdalja med galaksijama enaka $d(t_{\text{odd}}) = a(t_{\text{odd}})r$. Svetlobo zaznamo ob času t_{pr} , ko je skalirni faktor vesolja $a(t_{\text{pr}}) = 1$. Valovna dolžina svetlobe je tedaj λ_{pr} , razdalja med galaksijama pa je $d(t_{\text{pr}}) = a(t_{\text{pr}})r = r$. Prirejeno po [1].

Ponovno upoštevamo, da velja $a(t_{\text{odd}}) = (t_{\text{odd}}/t_0)^{2/3}$, in dobimo

$$r = 3ct_0 \left(1 - a^{1/2}\right).$$

Spomnimo se še, da lahko skalirni faktor a z rdečim premikom izrazimo kot $a = 1/(1+z)$ in da za starost t_0 v modelu s prevladujočo snovjo v skladu z enačbo (22) velja $t_0 = 2/(3H_0)$. Ker je današnja oddaljenost galaksije enaka sogibajoči razdalji, $d(t_0) = r$, sledi končni izraz

$$d(z) = \frac{2c}{H_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right). \quad (25)$$

Dobili smo enačbo za današnjo oddaljenost telesa s kozmološkim rdečim premikom z v modelu vesolja s prevladujočo snovjo. Preverimo, kakšna je odvisnost oddaljenosti, ko je $z \ll 1$. Če v enačbi (25) upoštevamo prvi netrivialni red Taylorjevega razvoja, $(1+z)^{-1/2} \simeq 1 - z/2$, dobimo

$$d(z) = \frac{cz}{H_0}.$$

Pri majhnih rdečih premikih se zapletena zveza za oddaljenost poenostavi v Hubble-Lemaîtreov zakon (1), ki opisuje linearno zvezo med oddaljenostjo in rdečim premikom. Omenili smo že, da Hubble-Lemaîtreov zakon velja pri majhnih rdečih premikih, zato je rezultat povsem smiseln in pričakovan.

3.1.3 Izpeljava izraza za razdaljo kotne velikosti

V prejšnjem razdelku smo izpeljali izraz za oddaljenost $d(z)$ telesa v odvisnosti od kozmološkega rdečega premika za model s prevladujočo snovjo. V skladu z enačbo (8) lahko razdaljo kotne velikosti v tem modelu zapišemo kot

$$d_A(z) = \frac{d(z)}{1+z} = \frac{2c}{H_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right) \frac{1}{1+z}. \quad (26)$$

Odvisnost je vsekakor videti zelo zanimiva in jo z modro krivuljo grafično predstavimo na sliki 6. Na grafu opazimo, da ima funkcija $d_A(z)$ lokalni maksimum. Izračunajmo, pri kateri vrednosti z se ta ekstrem pojavi. V ta namen odvajamo funkcijo po rdečem premiku in odvod postavimo na nič. Dobimo

$$\frac{dd_A}{dz} = \frac{2c}{H_0} \left(-\frac{1}{(1+z)^2} + \frac{3}{2} \frac{1}{(1+z)^{5/2}} \right) = 0,$$

iz česar izračunamo, da ima krivulja vrh pri $z = 1,25$. Med galaksijami enake velikosti bo torej na našem nebu najmanjša videti tista, ki leži na rdečem premiku $z = 1,25$.

Za lažjo predstavo izpeljanih zvez si oglejmo konkreten številski zgled, ki izhaja iz članka [8]. Če opazujemo kompaktno telo s fizično velikostjo $l \simeq 10$ pc in mu izmerimo rdeči premik $z = 1,42$, bi v modelu ravnega vesolja s prevladujočo snovjo pričakovali vrednosti $d_A = 1260$ Mpc in $\theta = 1,64$ mas.

Rezultat velja za model ravnega vesolja, v katerem prevladuje snov. Ker vesolje danes poleg snovi ($\Omega_{m,0} \simeq 0,3$) sestavlja tudi temna energija ($\Omega_{\Lambda,0} \simeq 0,7$), nas zanima še, kako se razdalja kotne velikosti obnaša v drugem skrajnem primeru, torej v modelu s prevladujočo temno energijo.

3.2 Model ravnega vesolja s prevladujočo temno energijo

Zdaj, ko smo obravnavali model s prevladujočo snovjo, želimo preveriti, do kakšnih rezultatov pridemo v drugem skrajnem primeru, ko je v vesolju prisotna samo temna energija. Prvo Friedmannovo enačbo (18) za model ravnega vesolja s samo temno energijo zapišemo kot

$$H^2 = H_0^2 \Omega_{\Lambda,0}. \quad (27)$$

Iz enačbe takoj vidimo, da je v tem modelu vesolja Hubblov parameter H konstanten. Če ponovno upoštevamo definicijo Hubblovega parametra, lahko enačbo (27) zapišemo kot

$$\frac{\dot{a}}{a} = H,$$

iz česar po integraciji sledi

$$a(t) \propto e^{Ht}. \quad (28)$$

Ugotovili smo, da je v modelu vesolja s prevladujočo temno energijo skalirni faktor eksponentno odvisen od časa. Podobno kot v enačbi (24) lahko diferencial sogibajoče razdalje dr zapišemo kot

$$dr = \frac{c dt}{a(t)} = \frac{c dt}{e^{H(t-t_0)}}. \quad (29)$$

Enačbo integriramo in dobimo

$$r = \int_{t_{\text{odd}}}^{t_0} e^{-H(t-t_0)} dt = \frac{c}{H} \left(e^{-H(t_{\text{odd}}-t_0)} - 1 \right).$$

Če upoštevamo še, da je

$$e^{-H(t-t_0)} = \frac{1}{a} = 1+z$$

in $d(t_0) = r$, lahko današnje pravo razdaljo $d(z)$ v odvisnosti od rdečega premika z v tem modelu izrazimo kot

$$d(z) = \frac{cz}{H}.$$

Prišli smo do naravnost čudovite ugotovitve. Zveza nas spominja na Hubble-Lemaîtreov zakon (1), za katerega že vemo, da velja pri razmeroma majhnih rdečih premikih. Toda v modelu s prevladujočo temno energijo je zveza med pravo razdaljo in rdečim premikom linearna za vsak z . S tem rezultatom lahko izrazimo še razdaljo kotne velikosti v tem modelu. Velja

$$d_A(z) = \frac{d(z)}{1+z} = \frac{c}{H} \frac{z}{1+z}. \quad (30)$$

V nasprotju z izrazom (8) za razdaljo kotne velikosti v modelu s prevladujočo snovjo, razdalja kotne velikosti (30) v modelu s prevladujočo temno energijo strogo narašča z rdečim premikom, kar lahko vidimo na grafu na sliki 6 (rdeča krivulja).

Spomnimo se številskega zgleda, ki smo ga naredili pri modelu ravnega vesolja s snovjo. Obravnavali smo kompaktno telo s fizično velikostjo $l \simeq 10$ pc in s kozmološkim rdečim premikom $z = 1,42$. V modelu ravnega vesolja, v katerem je samo temna energija, bi za razdaljo kotne velikosti oziroma za kotno velikost dobili $d_A = 2510$ Mpc in $\theta = 0,82$ mas. Opazimo, da bi bila v tem modelu galaksija z enakim rdečim premikom videti manjša kot v modelu vesolja, v katerem je samo snov.

3.3 Model ravnega vesolja s snovjo in temno energijo

V prejšnjih razdelkih smo posebej obravnavali model ravnega vesolja, v katerem je samo snov, in model ravnega vesolja, v katerem je prisotna samo temna energija. Omenili smo že, da današnje vesolje dobro opišemo s kozmološkima parametroma $\Omega_{m,0} \simeq 0,3$ in $\Omega_{\Lambda,0} \simeq 0,7$.

Vsled tega obravnavajmo model ravnega vesolja s snovjo in temno energijo. Prva Friedmannova enačba (18) se v tem primeru poenostavi v

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0}. \quad (31)$$

Če upoštevamo definicijo Hubblovega parametra $H(t) = \dot{a}/a$, lahko enačbo (31) prepišemo v

$$\frac{\sqrt{a} da}{\sqrt{1 + \frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}} a^3}} = H_0 \sqrt{\Omega_{m,0}} dt.$$

Enačbo rešimo tako, da integriramo vsako stran posebej. Integral na levi teče v mejah med 0 in $a(t)$, integral na desni pa v mejah med 0 in t . Velja

$$\int_0^{a(t)} \frac{\sqrt{a} da}{\sqrt{1 + \frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}} a^3}} = H_0 \sqrt{\Omega_{m,0}} \int_0^t dt.$$

Medtem ko je integral na desni trivialen, je tisti na levi nekoliko večji zalogaj. Ugonobimo ga lahko s prebrisano substitucijo $\sinh^2 x = \Omega_{\Lambda,0} a^3 / \Omega_{m,0}$. Substitucija je smiselna, saj je a nenegativna količina. V tem primeru lahko enačbo prepišemo v

$$\frac{2}{3} \sqrt{\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}}} \int_0^b dx = H_0 \sqrt{\Omega_{m,0}} t,$$

kjer je

$$b = \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}}} a^{3/2} \right) = \ln \left(\sqrt{\frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}}} a^{3/2} + \sqrt{\frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}}} a^3 + 1 \right).$$

Po integraciji dobimo zvezo

$$\frac{2}{3} \sqrt{\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}}} \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}}} a^{3/2} \right) = H_0 \sqrt{\Omega_{m,0}} t,$$

iz česar izrazimo skalirni faktor

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{1/3} \sinh^{2/3} \left(\frac{3}{2} H_0 \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}} t \right). \quad (32)$$

Dobili smo odvisnost skalirnega faktorja od časa v modelu ravnega vesolja s snovjo in temno energijo. Zveza je razmeroma zapletena. Ovrednotimo enačbo tako, da preverimo dva mejna primera. V zgodnjem vesolju, ko velja $t \rightarrow 0$, se zveza (32) poenostavi v

$$a(t) \propto t^{2/3},$$

kar ustreza zvezi med skalirnim faktorjem in časom za model ravnega vesolja, v katerem prevladuje snov. Rezultat je smiseln, saj v zgodnjem vesolju res prevladuje snov. S tem v zvezi posebej poudarimo, da v tem primeru obravnavamo vesolje brez sevanja. V primeru starega vesolja, ko velja $t \rightarrow \infty$, se enačba (32) poenostavi v

$$a(t) \propto e^{H_0 \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}} t},$$

kar nas spominja na rešitev za model s prevladujočo temno snovjo. Na videz se zdi, da se izraza razlikujeta, in sicer za faktor $\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}$ v eksponentu. V resnici sta izraza povsem enakovredna. Vrednost Hubblovega parametra se namreč spreminja, H_0 pa je samo vrednost Hubblovega parametra danes. Iz enačbe (31) lahko preberemo, da je vrednost Hubblovega parametra v tem vesolju pri velikih časih (in s tem pri velikih skalirnih faktorjih) enaka

$$H(t \rightarrow \infty) = \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}} H_0.$$

Tako lahko zvezo prepišemo v

$$a(t) \propto e^{H(t \rightarrow \infty) t},$$

kar ustreza rešitvi za vesolje s temno energijo.

Zdaj, ko smo se prepričali, da je rešitev modela smiselna, lahko na podlagi definicije Hubblovega parametra izrazimo še starost vesolja v tem modelu:

$$t_0 = \frac{1}{3H_0 \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}}{1 - \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}} \right). \quad (33)$$

Če upoštevamo, da je v današnjem vesolju $\Omega_{\Lambda,0} = 0,7$, izračunamo, da je starost vesolja v tem modelu 13,4 milijarde let, kar je blizu prave vrednosti 13,8 milijarde let.

Razdaljo $d(z)$ do telesa z izmerjenim kozmološkim rdečim premikom z v tem modelu izrazimo podobno kot v prejšnjih razdelkih. Velja

$$d(z) = \int_{t_{\text{od}}}^{t_{\text{pr}}} \frac{c dt}{a(t)} = c \left(\frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}} \right)^{1/3} \int_{t_{\text{od}}}^{t_{\text{pr}}} \frac{dt}{\sinh^{2/3} (3/2 H_0 \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}} t)}.$$

Dobljeni integral ni analitično rešljiv, zato moramo rešitve iskati numerično za določene vrednosti kozmoloških parametrov. Pred tem se poslužimo prikladne substitucije, tako da namesto po času integriramo po rdečem premiku. S tem lahko razdaljo kotne velikosti $d_A(z)$, ki jo pravzaprav iščemo, izrazimo kot

$$d_A(z) = \frac{c}{H_0 \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}} \frac{1}{1+z} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}} (1+z')^3 + 1}} dz'. \quad (34)$$

Nekaj rešitev integrala pri različnih vrednostih kozmoloških parametrov prikazuje graf na sliki 6.

3.3.1 Številski zgled

Preden komentiramo splošno odvisnost $d(z)$, na konkretnem primeru predstavimo, kolikšne so vrednosti d_A in θ . Eden od načinov za testiranje kozmoloških modelov je analiza kompaktnih radijskih virov, ki imajo značilno fizikalno velikost in jih lahko uporabimo za določanje $d_A(z)$. Če predpostavimo, da imajo kompaktni radijski kvazarji značilno velikost $l \simeq 10$ pc [8], potem je lahko izmerjena kotna velikost $\theta(z)$ odvisna od kozmoloških parametrov. Vrednosti d_A in θ , ki jih pričakujemo pri rdečem premiku npr. $z = 1,42$, prikazuje tabela 1.

model	d_A [Mpc]	θ [mas]
samo snov ($\Omega_{m,0} = 1, \Omega_{\Lambda,0} = 0$)	1260	1,64
standardni model ($\Omega_{m,0} = 0,3, \Omega_{\Lambda,0} = 0,7$)	1550	1,13
samo temna energija ($\Omega_{m,0} = 0, \Omega_{\Lambda,0} = 1$)	2510	0,82

Tabela 1. Razdalja kotne velikosti in pričakovana kotna velikost kompaktnih radijskih virov pri $z = 1,42$ v različnih kozmoloških modelih. Meritev iz članka [8] pri rdečem premiku $z = 1,42$ ustreza vrednosti $\theta = 1,14$ mas, kar se sklada z napovedjo v tabeli.

Opazimo, da je kotna velikost radijskih izvorov večja v vesolju, kjer prevladuje snov, in manjša v vesolju, kjer prevladuje temna energija. Če bi izmerili kompaktne izvore pri $z = 1,42$ in ugotovili, da imajo povprečno kotno velikost okoli 1,13 mas, bi to podprlo standardni model s temno energijo ($\Omega_{m,0} = 0,3, \Omega_{\Lambda,0} = 0,7$).

3.3.2 Odvisnost razdalje kotne velikosti od rdečega premika v različnih kozmoloških modelih

Na grafu na sliki 6 sta poleg rešitev za model s prevladujočo snovjo in za model s prevladujočo temno energijo izrisani še dve rešitvi pri različnih vrednostih kozmoloških parametrov. Opazimo, da ti rešitvi ležita med grafoma za vesolje s samo snovjo in vesolje s samo temno energijo.

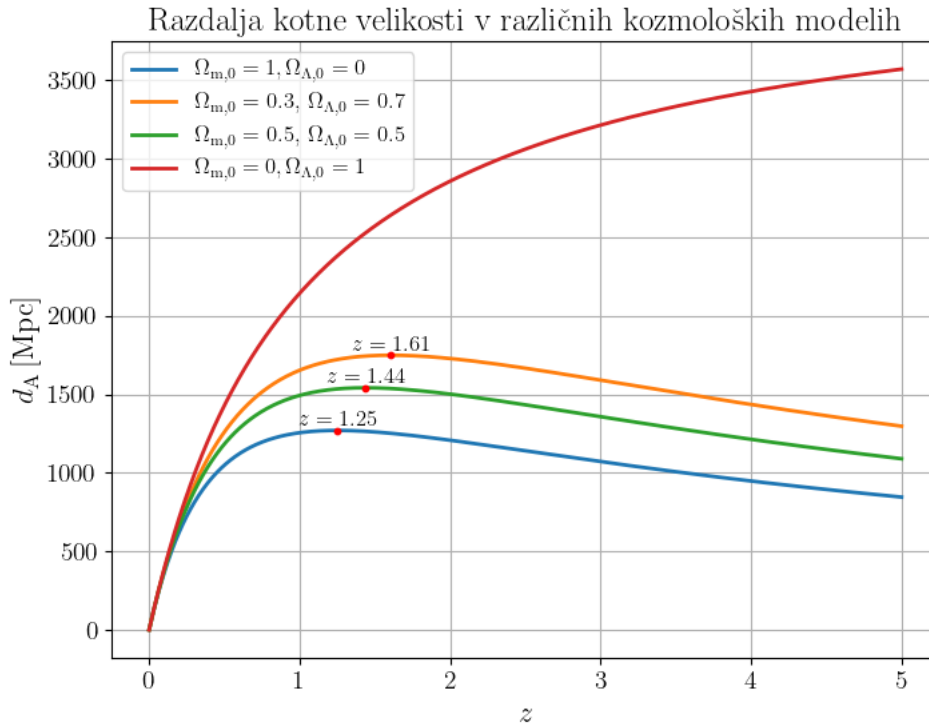
Opazimo tudi, da ima imajo vse rešitve, razen tiste samo s temno energijo, globalni maksimum. To pomeni, da v vseh modelih s prisotnostjo snovi velja, da obstaja rdeči premik, pri katerem je razdalja kotne velikosti največja oziroma je kotna velikost nebesnega telesa najmanjša. V modelu s prevladujočo snovjo je vrednost tega rdečega premika $z = 1,25$. V modelih z mešanico snovi in temne energije se ta rdeči premik povečuje s povečevanjem prisotnosti temne energije: v modelu, kjer je $\Omega_{m,0} = 0,5$ in $\Omega_{\Lambda,0} = 0,5$, krivulja doseže maksimum pri rdečem premiku $z = 1,44$, v modelu, kjer je $\Omega_{m,0} = 0,3, \Omega_{\Lambda,0} = 0,7$, pa pri $z = 1,61$.

4. Sklep

Spoznali smo, da razdalja, ki jo izračunamo iz kotne velikosti θ nebesnega telesa, v splošnem ne sovпада s pravo razdaljo do nebesnega telesa. To razdaljo imenujemo razdalja kotne velikosti d_A , pri izračunu prave razdalje d pa moramo upoštevati še kozmološke učinke.

Izpeljali smo, kako je razdalja kotne velikosti odvisna od kozmološkega rdečega premika. V modelih s prevladujočo snovjo in s prevladujočo temno energijo, smo znali poiskati analitično rešitev. Rešitve za nekaj modelov, v katerih upoštevamo tako snov kot tudi temno energijo, smo poiskali numerično in predstavili na grafu.

Ugotovili smo, da v vseh modelih, z izjemo modela s prevladujočo temno energijo, funkcija $d_A(z)$ doseže globalni maksimum. To pomeni, da obstaja rdeči premik, pri katerem je za galaksije enake fizične velikosti razdalja kotne velikosti največja. Z drugimi besedami, to pomeni, da obstaja rdeči premik, pri katerem je galaksija videti najmanjša. Za vesolje s snovjo smo izračunali, da ta rdeči premik znaša $z = 1,25$. Pri modelih, ki poleg snovi vključujejo še temno energijo, je ta številka večja.



Slika 6. Odvisnost razdalje kotne velikosti d_A od kozmološkega rdečega premika z v različnih kozmoloških modelih ravnega vesolja: prevladuje snov (modra krivulja), prevladuje temna energija (rdeča krivulja), različna prisotnost snovi in temne energije (zeleni krivulja, $\Omega_{m,0} = 0,5$ in $\Omega_{\Lambda,0} = 0,5$; oranžna krivulja $\Omega_{m,0} = 0,3$ in $\Omega_{\Lambda,0} = 0,7$). V treh primerih je z rdečo piko označen tudi rdeči premik, pri katerem je vrednost d_A največja.

V opazovalni astrofiziki se odvisnost razdalje kotnega premera od rdečega premika uporablja za določanje kozmoloških parametrov. Ker je vrh krivulje $d_A(z)$ odvisen od sestave vesolja, se astronomske meritve osredotočajo na rdeče premike med 0,6 in 2,6. Astronomi v ta namen uporabljajo na primer izjemno kompaktne radijske izvore (jedra oddaljenih kvazarjev), ki imajo dovolj velik izsev, da jih lahko opazujejo na visokih rdečih premikih. Kotno velikost jeder kvazarjev določajo z radijsko interferometrijo. Take meritve predstavljajo neodvisen način določanja vrednosti kozmoloških parametrov in so skladne z uveljavljenim modelom vesolja [8].

LITERATURA

- [1] A. Gomboc, *Osnove astronomije*, Univerza v Novi Gorici, 2025. Dostopno na: <https://books.ung.si/astronomija/>.
- [2] A. Guštin, D. Fabjan, V. Kavčič in S. Bukovšek, *Zbirka nalog z astronomskih tekmovanj 2009–2024: teorija in rešene naloge za srednje šole*, Fakulteta za matematiko in fiziko, 2024, 145–152.
- [3] E. Hubble, *A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae*, Proc. Natl. Acad. Sci. **15** (1929), 168–173.
- [4] H. Karttunen, *Fundamental Astronomy*, Springer Berlin Heidelberg, 2007, 422–443.
- [5] A. R. Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology*, 2. izdaja, John Wiley & Sons, 2003, 134–136.
- [6] B. W. Carroll in D. A. Ostlie, *An Introduction to Modern Astrophysics*, 2. izdaja, Cambridge University Press, 2017, 359–368.
- [7] D. Maoz, *Astrophysics in a Nutshell*, 2. izdaja, Princeton University Press, 2016, 215–255.
- [8] J. C. Jackson in A. L. Jannetta, *Legacy data and cosmological constraints from the angular-size/redshift relation for ultracompact radio sources*, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics **11** (2006), 002.
- [9] N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. J. Banday, R. B. Barreiro, N. Bartolo, S. Basak, R. Battye, K. Benabed, J. P. Bernard, M. Bersanelli, P. Bielewicz, J. J. Bock, J. R. Bond, J. Borrill, F. R. Bouchet et al., *Planck 2018 results: VI. Cosmological parameters*, Astronomy and Astrophysics **641** (2020), A6.