

MAJORANOVI FERMIONI IN GUGALNIČNI MEHANIZEM

NEIL ČERNE

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Nevtrini so osnovni delci, za katere je dolgo veljalo, da so brezmasni. Takšne napove tudi Standardni model, trenutno splošno sprejeti teoretični okvir, ki opisuje osnovne delce in interakcije med njimi. Eksperimenti so potrdili, da nevtrini v resnici imajo maso, zaradi česar se je pojavila potreba po novih teorijah, ki bi lahko to maso razložile. V članku je predstavljena ena od možnih razširitev Standardnega modela, gugalnični mehanizem tipa I. Najprej so predstavljeni osnovni koncepti, potrebni za razumevanje Standardnega modela in njegovih razširitev. Sledi predstavitev Higgsovega mehanizma, ki razloži maso ostalih leptonov, na koncu pa je predstavljen gugalnični mehanizem, ki razloži maso nevtrinov. Spoznamo, da so lahko mase nevtrinov Diracovega ali Majoranovega tipa, slednja pri ostalih leptonih ni dovoljena. Če imajo nevtrini maso Majoranovega tipa, obstajajo procesi, ki bi kršili ohranitev leptonskega števila, kar se v moderni eksperimentalni fiziki osnovnih delcev aktivno išče.

MAJORANA FERMIONS AND THE SEESAW MECHANISM

Neutrinos are elementary particles that were long believed to be massless. This is also what the Standard Model — the widely accepted theoretical framework describing elementary particles and their interactions — predicts. However, experimental evidence has shown that neutrinos do, in fact, have nonzero mass. This discovery has led to the need for new theories capable of explaining the origin of that mass. This article focuses on the Type I seesaw mechanism, a proposed extension of the Standard Model that accounts for neutrino masses. First, some of the fundamental concepts necessary to understand the Standard Model and its possible extensions are introduced. This is followed by an explanation of the Higgs mechanism, which accounts for the masses of other fermions. Finally, the seesaw mechanism itself is presented. Neutrino masses can be either of the Dirac or Majorana type, with the latter being forbidden for other leptons. If neutrinos are Majorana particles, processes that violate lepton number conservation become possible — one of the key focuses of current experimental searches in particle physics.

1. Uvod

Osnovne delce opisujemo v teoretičnem okviru, imenovanem Standardni model [1–3]. To je splošno sprejeta teorija, ki temelji na uporabi simetrij za opis osnovnih delcev in interakcij med njimi. Združuje tri osnovne sile: močno, šibko in elektromagnetno, ter klasificira vse znane osnovne delce, kot prikazuje slika 1. Delce glede na spin razdelimo v dve družini: na fermione s pol-številskim spinom, ter na bozone s celoštevilskim spinom. Fermione lahko naprej razdelimo na leptone, ki lahko interagirajo elektromagnetno in šibko, ter na kvarke, ki interagirajo tudi preko močne interakcije.

Nevtrini, standardno jih označujemo z grško črko ν , so nenabiti leptoni. Odkril jih je Chadwick leta 1914, ko je izmeril zvezen spekter energij elektronov v razpadu β , kar z dvema delcema v končnem stanju zaradi ohranitve gibalne količine ni možno [5]. Da bi ohranitev zagotovil, je Pauli leta 1930 predlagal novi delec [6]. Poimenoval ga je nevtron, kasneje pa ga je Fermi z uporabo italijanske pomanjševalnice (-ino) preimenoval v nevtrino [7]. Dolgo časa je veljalo, da so nevtrini brezmasni delci. Leta 1988 pa je eksperiment SuperKamiokande razglasil prve dokaze, da so ti delci v resnici masivni [8–10].



Slika 1. Klasifikacija osnovnih delcev v Standardnem modelu, prirejeno po [4].

Leta 2015 je bila podeljena Nobelova nagrada za 'odkritje nevtrinskih oscilacij, ki kažejo na maso nevtrinov', kar nakazuje na pomembnost tega odkritja [11].

Standardni model predvideva brezmasne nevtrine, zato je očitno, da to ni popolna teorija. V članku bom predstavil gugalnični mehanizem tipa I, eno od možnih razširitev Standardnega modela, ki razloži maso nevtrinov. Spoznali bomo, da sta možna dva tipa mas: Diracov in Majoranov. Ostali poznani leptoni imajo maso Diracovega tipa. Ker so nevtrini nenabit, imajo lahko maso Majoranovega tipa. Kakšnega tipa je masa nevtrinov je eno izmed glavnih odprtih vprašanj moderne fizike osnovnih delcev [12–14].

1.1 Nekaj malega o grupah

V Standardnem modelu simetrije igrajo zelo pomembno vlogo, zato je pomembno, da jih dobro razumemo. Matematično jih opišemo z grupami¹. Elemente grupe lahko upodobimo z matrikami, kar pomeni, da vsakemu elementu grupe priredimo $n \times n$ matriko.

Primer grupe, ki jo vsi poznamo, so rotacije. Le-te tvorijo grupo, saj je kombinacija dveh rotacij zopet rotacija, rotiranje je asociativno, obstaja identiteta (ki je rotacija za kot 0) in seveda obstaja inverzna rotacija (rotacija za isti kot v nasprotni smeri). Rotacije v treh dimenzijah matematično tvorijo grupo $SO(3)$. Poiščimo lastnosti matrik, ki upodabljajo elemente rotacijske grupe v $\mathbb{R}^n$. Transformacija, ki jo razumemo kot rotacijo, ima dve glavni lastnosti: ohranja dolžino vektorjev ter orientacijo prostora. Označimo transformiran vektor $\mathbf{r}' = R\mathbf{r}$. Da se dolžina ohranja, mora veljati: $\|\mathbf{r}\|^2 = \|\mathbf{r}'\|^2 \implies \mathbf{r}^T \mathbf{r} = \mathbf{r}'^T \mathbf{r}' = (R\mathbf{r})^T (R\mathbf{r}) = \mathbf{r}^T R^T R \mathbf{r} = \mathbf{r}^T \mathbf{r} \implies R^T R = \mathbb{I}$. Matrike s to lastnostjo imenujemo ortogonalne matrike in tvorijo t.i. ortogonalno grupo $O(n)$. Če želimo, da se pri transformaciji ohranja tudi orientacija prostora, se omejimo na matrike s pozitivno determinanto (izvzamemo zrcaljenja) in dobimo grupo $SO(n)$, imenovano posebna ortogonalna grupa (ang. *special orthogonal group*).

Podoben koncept lahko splošimo tudi na kompleksna števila. Skalarni produkt ohranjajo matrike, za katere velja $U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{I}$ (spomnimo se, da je skalarni produkt v kompleksnem vektorskem prostoru definiran kot $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^\dagger \mathbf{v}$). Če se omejimo na matrike s pozitivno determinanto, dobimo posebno unitarno grupo $SU(n)$, pri čemer je n dimenzija prostora.

Pomemben primer unitarne grupe, ki jo bomo srečali tudi v nadaljevanju, je $U(1)$. Njeni elementi so kompleksna števila na enotski krožnici, torej $e^{i\phi}$, pri čemer je ϕ zvezen parameter, ki nam pove, kje na enotski krožnici se nahajamo.

1.2 Ponovitev posebne teorije relativnosti

Dinamika, s katero se bomo ukvarjali v članku je relativistična, zato ponovimo osnovne koncepte posebne teorije relativnosti [15].

V posebni teoriji relativnosti prostor in čas obravnavamo enakovredno ter ju povežemo v prostor-čas (ang. *spacetime*), ki ga matematično opišemo s t.i. prostorom Minkowskega. Vektorje spremenimo v četverce s komponentami (ct, x, y, z) , za skalarni produkt pa uporabimo metriko Minkowskega. V tem članku bom uporabljal metriko $\eta = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$. V indeksni notaciji označimo metriko $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$, kontravariantni četverec x^μ ter kovariantni četverec $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$, pri čemer ponovljeni indeksi pomenijo seštevanje (po Einsteinovi konvenciji). Skalarni produkt in norma, ki jo skalarni produkt inducira, sta definirana z metriko. Velja $\|x\|^2 = x^\mu x_\mu = x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$. To količino poimenujemo interval prostor-časa (oz. po angleško *spacetime interval*) in je analogna kvadratu dolžine vektorja v $\mathbb{R}^3$: $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

¹**Grupa** je množica (označimo jo z G), opremljena z binarno operacijo $(* : (x, y) \mapsto x * y)$, ki zadošča določenim aksiomom. To so: *zaprtost* (produkt elementov grupe je element grupe), *asociativnost* $(x * (y * z) = (x * y) * z)$ za vse $x, y, z \in G$, *obstoje identitete* ($\exists e \in G$, da je $e * x = x * e = x \quad \forall x \in G$) in *obstoje inverza* ($\forall x \in G \quad \exists x^{-1} \in G$, tako da velja $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$).

Lorentzove transformacije imajo v prostoru Minkowskega podobno vlogo kot rotacije v $\mathbb{R}^3$, saj ohranjajo dolžino četvercev². Ekvivalentno lahko rečemo, da ohranjajo metriko, torej velja $\Lambda^\mu_\rho \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma = \eta_{\rho\sigma}$.

Objektom, ki se transformirajo po Lorentzu (npr. x^μ), pravimo Lorentzovo kovariantni in se transformirajo kot $x^\mu \xrightarrow{L.T.} \Lambda^\mu_\rho x^\rho$. Objekte, ki se z Lorentzovo transformacijo ne spremenijo, imenujemo Lorentzovo invariantni in bodo v nadaljevanju imeli pomembno vlogo. Takšni so objekti, ki imajo vse indekse seštete, zato so skalarne količine (če bi kakšen indeks ostal prost, bi to pomenilo, da lahko količino transformiramo in tako dobimo drug objekt). Reprezentativen primer Lorentzove invariante je prostorsko-časovni interval $s^2 = x^\mu x_\mu$. Če transformiramo oba vektorja (torej se premaknemo v drug opazovalni sistem), se ta količina ne bo spremenila, saj velja: $x^\mu x_\mu = x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu \xrightarrow{L.T.} \Lambda^\mu_\rho x^\rho \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma x^\sigma = x^\rho \Lambda^\mu_\rho \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma x^\sigma = x^\rho \eta_{\rho\sigma} x^\sigma = x^\rho x_\rho$. Drugačni objekti (npr. spinorji, ki jih bomo srečali v nadaljevanju) se pod Lorentzom transformirajo drugače. Skonstruiramo lahko različne Lorentzovo invariantne količine s poljubnim številom objektov različnih dimenzij, pomembno je le, da je rezultat Lorentzov skalar.

2. Diracova enačba

V članku se primarno ukvarjam z nevtrini, ki so skoraj brezmasni. Posledično jih moramo obravnavati relativistično in potrebujemo relativistično enačbo gibanja. Od te točke dalje bom uporabljal prikladne naravne enote, v katerih velja $\hbar = c = 1$.

Za ta članek je pomembnejše razumevanje Diracove enačbe, kot njena izpeljava, zato bom tu le nakazal, kako do enačbe pridemo³. Če namesto klasične zveze med energijo in gibalno količino $E = p^2/(2m)$ uporabimo relativistično zvezo $E^2 = p^2 + m^2$ in upoštevamo, da sta p in E operatorja, podobno kot Schrödingerjevo izpeljemo Klein-Gordonovo enačbo [16, 17]: $(\partial^2 + m^2)\psi = 0$, kjer je $\partial^2 = \partial^\mu \partial_\mu = \partial_t^2 - \nabla^2$ d'Alembertov operator. Enačba je primerna za opis delcev s spinom 0 in maso m , vendar ima dva glavna problema: ne moremo definirati pozitivno definitne verjetnostne gostote, ima pa tudi stanja z negativno energijo, ki niso fizikalna. Da bi rešil te probleme, je Dirac želel enačbo, linearno v prostorsko-časovnih odvodih. Zapišimo najbolj splošno obliko z uporabo oznak, ki bodo kasneje dobile globlji pomen: $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$, kjer so komponente γ^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) in konstanta m še neznani parametri. Če nastavek pomnožimo s kompleksno konjugirano različico, dobimo $(\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu + m^2)\psi = 0$, kar se mora reducirati v Klein Gordonovo enačbo, če želimo ohraniti relativistično disperzijsko relacijo. Tako dobimo pogoj za konstante γ^μ :

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} , \quad (1)$$

kjer je $\{, \}$ antikomutator ($\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu$), $\eta^{\mu\nu}$ pa Minkowski metrični tenzor. Tako smo izpeljali Diracovo enačbo [18]:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 . \quad (2)$$

Objekt ψ , ki nastopa v enačbi, poimenujemo Diracov spinor, njegovo strukturo pa bomo spoznali v nadaljevanju.

Antikomutatorska relacija (1) ne more biti izpolnjena, če so γ^μ navadni skalarji, ki med sabo komutirajo. Najmanjši objekti, ki zadoščajo relaciji (1), so 4×4 matrike. Poimenujemo jih Diracove gama matrike. Na tem mestu je prikladno definirati še 5. gama matriko, $\gamma^5 := i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$, ki bo svoj smisel dobila v nadaljevanju. Matrike, ki se obnašajo kot γ^μ , imenujemo upodobitve teh objektov. Obstaja neskončno matrik, ki se obnašajo kot γ^μ , različnih dimenzij. Med upodobitvami

²Lorentzove transformacije tvorijo grupo $SO(1, 3)$. To je analog grup $SO(n)$, ki smo jih že spoznali. Oznaka (1, 3) poudari, da imamo normo, ki časovno dimenzijo obravnava drugače kot prostorske.

³Diracovo enačbo lahko izpeljemo tudi s teorijo upodobitev, direktno iz generatorjev Lorentzove grupe.

iste dimenzije lahko prehajamo z zamenjavo baze ($\gamma'^\mu = P^{-1}\gamma^\mu P$, kjer je P neka obrnljiva matrika). Pogosto je γ^μ bolje obravnavati kot objekte, za katere veljajo določene relacije, kot npr. (1), saj lahko tako računamo neodvisno od izbire upodobitve. Če upodobitev vseeno izberemo, izberemo tisto, ki najbolj odraža strukturo našega problema. Najbolj pogosto uporabljeni sta Weylova in Diracova upodobitev. V Weylovi upodobitvi velja:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{k=1,2,3} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

kjer so σ^k Paulijeve matrike. Gama matrike so v tej upodobitvi bločno antidiagonalne, kar pomeni, da Diracova enačba (2) v primeru, ko je $m = 0$, razpade na dve neodvisni enačbi:

$$i\sigma^\mu \partial_\mu \chi_R = 0 \quad \text{in} \quad i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_L = 0, \quad (4)$$

kjer sem označil $\sigma^\mu := (\mathbb{I}, \sigma^k)$ in $\bar{\sigma}^\mu := (\mathbb{I}, -\sigma^k)$. Enačbi (4) imenujemo Weylovi enačbi, dvo-komponentna spinorja χ_L in χ_R pa levo- oz. desno-ročni Weylov spinor.

Iz strukture gama matrik vidimo, da je ψ v tej upodobitvi 4-dimenzionalen⁴ in je zaradi bločne strukture sestavljen iz dveh neodvisnih komponent. Lahko zapišemo $\psi = (\chi_L, \chi_R)^T$. Ročnost (ang. *chirality*) je intrinzična (notranja) lastnost delca, analogno kot je naša leva roka 'levo-ročna', desna pa 'desno-ročna'. Pri brezmasnih delcih je ta lastnost enaka sučnosti (projekcija spina na smer gibanja), vendar pri masivnih delcih ni tako. Sučnost je konstanta gibanja, torej se s časom pri prostem delcu ne bo spreminjala, če ostanemo v istem koordinatnem sistemu. Ročnost je Lorentzovo invariantna količina in zato za nas bolj relevantna. Kot bomo kasneje videli, se komponente ročnosti pri masivnih delcih lahko mešajo.

S pomočjo prej definirane objekta γ^5 lahko definiramo projektorja: $P_{L,R} := \frac{1}{2}(\mathbb{I} \mp \gamma^5)$, ki ohranita le levo- oz. desno-ročno komponento Diracovega spinorja. Na ročnost lahko gledamo tudi drugače, neodvisno od izbire upodobitve. Levo- in desno-ročne spinorje lahko karakteriziramo kot lastna stanja operatorja γ^5 [19, 20].

3. Lagrangeov formalizem v kontekstu teorije polja

V 2. poglavju smo sledili Diracovemu razmisleku in izpeljali relativistično enačbo gibanja, ki naj bi razrešila probleme negativne verjetnosti in negativnih energijskih stanj. Diracova enačba sicer uspe definirati pozitivno definitno verjetnostno gostoto⁵, vendar problem negativnih energijskih stanj še vedno ostane. Da bi ga razrešili, moramo enačbo pravilno interpretirati. Diracova enačba (2) v resnici ne opisuje enega relativističnega delca, temveč polje tega delca. Ko to polje kvantiziramo, problem negativnih verjetnosti razrešimo. Za razliko od kvantne mehanike, kjer obravnavamo dinamiko delcev, pri kvantni teoriji polja obravnavamo dinamiko polj. Delci so vzbuditve teh polj. V tem članku delce opisujem s klasičnimi polji, obravnava v kvantni teoriji polja je analogna, le da polja promoviramo v operatorje.

V fiziki je polje funkcija, ki vsaki točki prostora oz. prostor-časa dodeli neko vrednost (npr. skalar, vektor). Primeri polj so (skalarno) temperaturno polje ali (vektorsko) električno polje. V nasprotju s klasično mehaniko, kjer smo se ukvarjali s končnim številom posplošenih koordinat $q_a(t)$, nas pri teoriji polja zanima dinamika polj $\psi_a(\mathbf{x}, t)$. V klasični mehaniki je položaj (npr. $\mathbf{x}$) dinamična spremenljivka, ki opisuje položaj delca v prostoru (in se s časom spreminja). V teoriji polja položaj ni dinamična spremenljivka, temveč oznaka za točko v prostoru. Dinamična spremenljivka je polje samo. Ne sledimo več delcu, sedaj nas zanima dinamika celotnega polja [22].

⁴To, da je dimenzija Diracovega spinorja enaka dimenziji prostora Minkowskega, je le naključje. Dimenzija ψ je določena z dimenzijo upodobitve Lorentzove grupe.

⁵Ohranjen verjetnostni tok, ki ga definira Diracova enačba, je $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ (kjer je $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$). Verjetnostna gostota je tako $j^0 = \psi^\dagger\psi$ in je pozitivno definitna.

Dinamiko polj lahko obravnavamo s Hamiltonovim ali Lagrangeovim formalizmom. Slednji je primernejši, saj lažje preverimo Lorentzovo invarianco in skonstruiramo Lorentzovo invariantne člene.

Podobno kot pri klasični mehaniki lahko definiramo akcijo S , ki jo želimo minimizirati: $S = \int dt L = \int dt \int d^3x \mathcal{L} = \int d^4x \mathcal{L}$, kjer je L Lagrangeova funkcija, $\mathcal{L}$ gostota Lagrangeove funkcije⁶, integral $\int d^4x$ pa integracija po prostor-času. Lagrangian $\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi)$ je funkcija polja in njegovih odvodov (analogno kot pri klasični mehaniki, kjer je bil $\mathcal{L}(q_a, \dot{q}_a)$ odvisen od posplošenih koordinat in njihovih odvodov). Z variacijo akcije izpeljemo Euler-Lagrangeove enačbe, ki določajo dinamiko polja [24]:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) = 0 . \quad (5)$$

Lagrangian Diracove enačbe je funkcija polja ψ in njegovega odvoda $\partial_\mu \psi$, zapišemo ga kot:

$$\mathcal{L}_D = i\bar{\psi}\partial_\mu \gamma^\mu \psi - m\bar{\psi}\psi , \quad \text{kjer je} \quad \bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0 . \quad (6)$$

Preko Euler-Lagrangeovih enačb (5) iz $\mathcal{L}_D$ dobimo Diracovo enačbo (2). Objekt $\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0$ se transformira z inverzno Lorentzovo transformacijo (kar dokažem v dodatku 9.), zato je $\mathcal{L}_D$ Lorentzovo invarianten. Člen v Lagrangianu, ki vsebuje odvod, imenujemo kinetični člen, člen z maso pa masni člen.

Izkoristimo dejstvo, da lahko Diracov spinor razdelimo na levo- in desno-ročni Weylov spinor: $\psi = (\chi_L, \chi_R)^T$. Tako lahko Diracov Lagrangian (6) zapišemo v dvokomponentni obliki (vsak Weylov spinor $\chi_{L,R}$ ima dve kompleksni komponenti):

$$\mathcal{L}_D = i(\chi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_L + \chi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \chi_R) - m(\chi_L^\dagger \chi_R + \chi_R^\dagger \chi_L) . \quad (7)$$

Ročnost ni konstanta gibanja za masivne delce, saj masni člen komponenti ročnosti meša.

Fizikalna stanja, ki se skozi čas promovirajo nespremenjena, imenujemo masna lastna stanja. V jeziku kvantne mehanike bi to bila lastna stanja Hamiltoniana. V masni lastni bazi (ki je v resnici kar Diracova baza) je masna matrika diagonalna, v Weylovi bazi pa velja:

$$m\bar{\psi}\psi = m\psi^\dagger \gamma^0 \psi = \begin{pmatrix} \chi_L^\dagger & \chi_R^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & m\mathbb{I} \\ m\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_R \end{pmatrix} . \quad (8)$$

Lastna stanja ročnosti niso masna lastna stanja, saj masna matrika ni diagonalna [12, 13].

3.1 Simetrije Lagrangiana

Če ima sistem, ki ga želimo opisati, neko simetrijo, ima isto simetrijo tudi $\mathcal{L}$. Tako se konstrukcije Lagrangiana lotimo na sledeč način: najprej izberemo simetrijo, ki jo želimo upoštevati, nato v Lagrangian zapišemo vse člene, ki so invariantni na to simetrijo, z nekimi neznanimi koeficienti. Te konstante določimo eksperimentalno. Simetrije Lagrangiana torej odražajo simetrije sistema, ki nakazujejo na ohranjene količine in ohranitev ustreznih kvantnih števil. Določajo nam tudi naravno izbiro baze za iskanje rešitve.

Simetrija Lagrangiana je lahko lokalna ali globalna. Pri lokalnih simetrijah je parameter transformacije odvisen od kraja, pri globalnih pa je konstanten. Za primer pogledjmo $U(1)$ simetrijo. Globalni $U(1)$ simetriji bi ustrezala transformacija $\psi \mapsto e^{i\alpha} \psi$, lokalni pa $\psi \mapsto e^{i\alpha(x^\mu)} \psi$. Oznaka x^μ nakazuje, da je parameter $\alpha(x^\mu)$ lahko odvisen od pozicije v prostor-času. Pri globalnih simetrijah je parameter α za cel prostor enak. Umeritvene simetrije so lokalne in so fundamentalnega pomena.

⁶Ker večinoma obravnavamo le gostoto Lagrangeove funkcije, besedo gostota velikokrat izpuščamo in $\mathcal{L}$ poimenujemo kar Lagrangeova funkcija ali Lagrangian.

Zagotovijo nam, da teorija ni odvisna od transformacij, ki na fiziko nimajo vpliva⁷. Primer je Lorentzova invarianca, kjer zahtevamo, da je teorija neodvisna od izbire koordinatnega sistema. Lokalne umeritvene simetrije zahtevamo zaradi opaženih zakonov narave. Globalne simetrije so lahko naključne, če je naš Lagrangian naključno invarianten na neko globalno transformacijo. Takšne simetrije se z lahkoto zlomi, saj lahko v Lagrangian samo dopišemo člen, ki na to globalno simetrijo ni invarianten (ta člen pa mora še vedno biti invarianten na vse prej določene umeritvene simetrije, drugače ga ne smemo zapisati).

Poglejmo si primer $U(1)$ simetrije na Diracovem Lagrangianu. Funkcija $\mathcal{L}_D = i\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$ je invariantna na globalno transformacijo $\psi \mapsto e^{iL\alpha}$ in $\bar{\psi} \mapsto e^{-iL\alpha}\bar{\psi}$. To je slučajna globalna simetrija, ki se jo lahko posploši na vse leptone. Če vsem leptonskim poljem dodamo fazo α , vsem antileptonskim poljem pa $-\alpha$, ostane Lagrangian nespremenjen. Ohranjen naboj, ki ga dobimo po Noetherinem teoremu, je leptonsko število L , ki ima vrednost 1 za leptone, -1 za antileptone in 0 za ostale delce. Če je Lagrangian invarianten na transformacijo leptonskega števila, se razlika med številom leptonov in antileptonov v interakcijah ohranja.

3.2 Majoranov masni člen

V Diracovem Lagrangianu nismo zapisali vseh členov, ki jih dovoljuje Lorentzova simetrija. Spomnimo se na rotacijsko grupo $SO(3)$. Pod rotacijami je invarianten skalarni produkt dveh vektorjev, prav tako pa tudi velikost njunega vektorskega produkta (ki je sorazmerna ploščini paralelograma, ki ga vektorja napenjata). V Lagrangianu je člen, analogen skalarnemu produktu, Diracov masni člen s parametrom m_D ($\mathbf{r}^T\mathbf{r} \sim \bar{\psi}\psi$). Tako lahko posumimo, da obstaja Lorentzovo invarianten člen, analogen vektorskemu produktu. Ettore Majorana je leta 1937 takšen člen zares zapisal [21]. Imenujemo ga Majoranov masni člen, ima pa naslednjo obliko:

$$\mathcal{L}_M^{mass} = -\frac{1}{2}m_M \left(\chi_R^T i\sigma_2 \chi_R - \chi_R^\dagger i\sigma_2 \chi_R^* \right). \quad (9)$$

Člen smo zapisali v dvokomponentni obliki, v njem pa nastopa le desno-ročni Weylov spinor. Lorentzovo invarianco Majoranovega masnega člena dokažem v dodatku 9.

Definirajmo spinor $\psi^c := -i\gamma^2\psi^*$. Če spinor ψ predstavlja polje nekega delca, potem ψ^c predstavlja polje ustreznega antidelca. Za Diracov spinor $\psi_D = (\chi_L, \chi_R)^T$ velja: $\psi_D^c = (-i\sigma_2\chi_R^*, i\sigma_2\chi_L^*)^T$. Komponenta $-i\sigma_2\chi_R^*$ se transformira kot levo-ročni spinor, komponenta $i\sigma_2\chi_L^*$ kot desno-ročni, očitno pa velja $\psi_D^c \neq \psi_D$. Uvedemo lahko t.i. Majoranova spinorja: $\psi_{M,L} = P_L\psi_D + P_R\psi_D^c = (\chi_L, i\sigma_2\chi_L^*)^T$ in $\psi_{M,R} = P_L\psi_D^c + P_R\psi_D = (-i\sigma_2\chi_R^*, \chi_R)^T$. Zanju velja $\psi_{M,L}^c = \psi_{M,L}$ in $\psi_{M,R}^c = \psi_{M,R}$, torej lahko opišeta nevtralna polja delcev, ki so sami sebi antidelci. Fermione tega tipa imenujemo Majoranovi fermioni. Spinor $\psi_{M,R}$ je popolnoma določen s komponento χ_R . Analogno je $\psi_{M,L}$ popolnoma določen s χ_L . Majoranov spinor ima tako pol manj prostostnih stopenj kot Diracov.

Majoranov masni člen lahko zapišemo tudi v 4-komponentni obliki:

$$\mathcal{L}_M^{mass} = -\frac{1}{2}m_M \bar{\psi}_{M,R} \psi_{M,R}. \quad (10)$$

Z upoštevanjem definicije $\psi_{M,R}$ lahko preverimo, da sta enačbi (9) in (10) ekvivalentni.

Spomnimo se na naključno globalno simetrijo leptonskega števila, ki jo vsebuje Lagrangian Diracove enačbe. Ta ostane nespremenjen, če poljem vseh leptonov dodamo fazo, torej $\psi \mapsto e^{iL\alpha}\psi$. Majoranov masni člen (9) to simetrijo zlomi. Če naredimo transformacijo $\chi_R \mapsto e^{iL\alpha}\chi_R$, dobimo: $\chi_R^T i\sigma_2 \chi_R \mapsto (e^{iL\alpha}\chi_R)^T i\sigma_2 e^{iL\alpha}\chi_R = e^{i2L\alpha}\chi_R^T i\sigma_2 \chi_R$, drugi člen v (9) se transformira analogno. Zaradi

⁷S podobnim konceptom smo se srečali že pri elektromagnetizmu. Tam imamo svobodo pri izbiri vektorskega potenciala $\mathbf{A}$ in skalarnega potenciala Φ , do umeritve. Maxwellove enačbe (in fizika) so invariantne na transformaciji $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla f$ in $\Phi \mapsto \Phi - \frac{\partial f}{\partial t}$. To so umeritvene simetrije klasičnega elektromagnetizma.

faktorja $e^{i2L\alpha}$ Majoranov masni člen zlomi leptonsko število za 2 enoti. To pomeni, da obstajajo procesi, v katerih se leptonsko število ne ohranja, temveč se spremeni za 2 enoti. To seveda velja le v primeru, da obstajajo delci z Majoranovo maso. Potencialni kandidati za to so nevtrini, kot bomo videli v nadaljevanju.

Majoranov masni člen (9) v resnici zlomi vsako $U(1)$ simetrijo. To ima pomembne posledice, saj navadno zahtevamo invarianco Lagrangiana pod umeritveno $U(1)$ simetrijo. Zaradi tega za večino polj Majoranovega masnega člena sploh ne smemo zapisati [12].

4. Umeritvene simetrije Standardnega modela in šibka interakcija

Umeritvene simetrije naše teorije modeliramo s t.i. umeritvenimi grupami. Poskušamo najti čim enostavnejšo grupo, s katero lahko naš sistem opišemo. Umeritvena grupa Standardnega modela je $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Grupi $SU(3)_C$ in $SU(2)_L$ opisujeta močno in šibko interakcijo, grupa $U(1)_Y$ pa t.i. hipernaboj, ki po spontanem zlomu simetrije skupaj s šibkim izospinom (kvantno število šibke interakcije) postane elektromagnetna interakcija. Indeks C ('color') predstavlja barvni naboj, indeks Y kvantno število hipernaboja, L pa nakazuje, da šibka interakcija sklaplja le levo-ročne delce (in desno-ročne antidelce).

Poskusimo intuitivno razumeti izbiro umeritvene grupe za šibko interakcijo, $SU(2)_L$. Šibka interakcija lahko pretvarja med določenimi delci. Pri razpadu beta se npr. kvark d v nevtronu spremeni v kvark u in pri tem izseva bozon W^- . Le-ta nato razpade na elektron in elektronski antinevtrino. To nam pove, da sta kvarka u in d pod šibko interakcijo povezana, prav tako tudi elektron in nevtrino. Za idejo, kako to matematično formulirati, se spomnimo na spin. Delce s $S = 1/2$ smo zapisali v spinski dublet, katerega komponenti sta predstavljali projekcijo spina $|\psi\rangle = (|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle)^T$. Na spinski dublet delujejo spinski operatorji, ki jih predstavimo s Paulijevimi matrikami σ^k . Če delec spina nima, tvori spinski singlet in nanj spinski operatorji ne delujejo, saj je v spinskem prostoru skalar. Podobno idejo uporabimo za opis šibke interakcije. Kvarka d in u zapišemo v dublet, da lahko z operatorji šibke interakcije med njima prehajamo. Analogno kot pri spinu, jima določimo neko kvantno število, ki ga poimenujemo šibki izospin. Oba kvarka imata vrednost šibkega izospina $1/2$, razlikujeta se v njegovi projekciji (kvark u ima projekcijo $+1/2$, kvark d pa $-1/2$). Bozon W^- deluje kot lestvični operator, ki kvarku d spremeni projekcijo izospina za 1, da postane kvark u . Iz beta razpada vemo, da šibka interakcija deluje le na levo-ročne delce in desno-ročne antidelce (kot so potrdili Wu et.al. [23]), zato v dublet pišemo le levo-ročne fermione, desno-ročne pa obravnavamo kot singlete, ker nanje šibka interakcija ne deluje.

Poleg kvarkovskih dubletov, ki smo jih spoznali, poznamo tudi leptonske dublete, ki so za našo obravnavo bolj pomembni. Elektron in elektronski nevtrino predstavimo v dubletu, enako velja tudi za mion z mionskim nevtrinom in delec τ s tauonskim nevtrinom. Zaradi preglednosti označimo spinorje, ki predstavljajo polje delca, z oznako tega delca, torej $\psi_e \rightarrow e = (e_L, e_R)^T$ in $\chi_{\nu,L} \rightarrow \nu_L$. Levo-ročni leptonski dublet elektrona in nevtrina zapišemo kot $L_L = (\nu_L, e_L)^T$, desno-ročni elektron e_R pa je pod šibko interakcijo singlet. Vemo, da nevtrini interagirajo le preko šibke interakcije. Ker je desno-ročni nevtrino singlet pod $SU(2)_L$, z znanimi interakcijami ne bi interagiriral. Zato ga v Standardnem modelu ne obravnavamo [24].

Oglejmo si še umeritveno grupo $U(1)_Y$. Kvantno število, ki ga pripišemo tej interakciji, imenujemo hipernaboj in ga označimo z Y . Polje ψ s hipernabojem Y se transformira kot $\psi \mapsto e^{i\alpha(x^\mu)Y}\psi$. Po spontanem zlomu simetrije, ki ga predstavim v nadaljevanju, se šibka interakcija ter hipernaboj združita v elektromagnetno interakcijo. Velja: $Q = T_3 + Y/2$, kjer je Q elektromagnetni naboj, I_3 tretja komponenta šibkega izospina, Y pa hipernaboj. Izračunajmo hipernaboj levo-ročnega nevtrina. Vemo, da je njegov EM naboj enak 0, tretja komponenta izospina pa $+1/2$, ker se nahaja v prvi komponenti leptonskega dubleta. Hipernaboj je tako $Y_{\nu_L} = 2(Q - T_3) = -1$ [24].

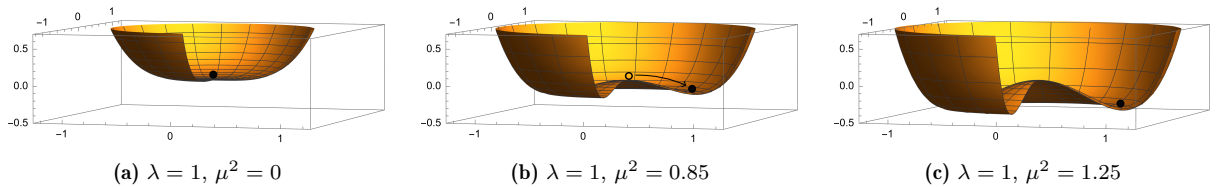
5. Higgsov mehanizem

Masni člen Diracovega Lagrangiana v dvokomponentni obliki (7) je invarianten na Lorentzove in $U(1)$ transformacije⁸. Sedaj dodajmo šibko interakcijo. Levo-ročni delci se transformirajo kot dubleti pod $SU(2)_L$ transformacijami. Levo-ročni elektron in nevtrino v Diracovem Lagrangianu namesto dveh ločenih polj (elektronskega $\chi_{e,L} = e_L$ in nevtrinskega $\chi_{\nu,L} = \nu_L$) postavimo v leptonski dublet $L_L = (\nu_L, e_L)^T$. Desno-ročni delci so singleti pod $SU(2)_L$, torej se s to transformacijo ne transformirajo. Kinetični člen v Lagrangianu z uporabo leptonskega dubleta posplošimo v: $\mathcal{L}_D^{kin} = i(L_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu L_L + e_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu e_R)$.

Težava se pojavi pri masnem členu, ki meša levo- in desno-ročna polja. Želeli bi napisati člen oblike $-m_D L_L^\dagger L_R$, ampak desno-ročnega dubleta zaradi narave šibke interakcije ne moremo zapisati (desno-ročni delci se pod šibko interakcijo transformirajo kot skalarji). Člen oblike $-m_D L_L^\dagger e_R$ prav tako ni invarianten pod $SU(2)_L$ transformacijami, saj se dublet transformira, singlet pa ne⁹. Ideja, ki jo je predlagal Steven Weinberg, je uvedba t.i. Higgsovega polja [25, 26].

Uvedimo polje H in pridobimo $SU(2)$ invarianco Lagrangiana s tem, da ga sklopimo z leptonskim dubletom v singlet oz. Lorentzov skalar. Analogno lahko dva delca s spinom $1/2$ združimo v singlet oz. stanje s spinom 0 . Ker želimo ohraniti Lorentzovo invarianco, mora biti to polje Lorentzov skalar. Ker pa želimo, da se novo polje pravilno sklopi z leptonskim dubletom, mora biti tudi H dublet pod $SU(2)_L$ transformacijami. Člen $-y L_L^\dagger H e_R$ je tako invarianten tudi pod $SU(2)_L$. Konstanta y je Yukawa sklopitev leptonskega dubleta s Higgsovim poljem. Pove nam, kako močno sta polji sklopljeni, določena je eksperimentalno.

Iz poglavja 3.1 vemo, da v Lagrangian zapišemo vse člene, dovoljene pod izbranimi simetrijami. Ko v naš sistem uvedemo novo polje, moramo zato zapisati vse dovoljene člene, ki to polje vsebujejo¹⁰. Izkaže se, da so pod izbranimi simetrijami dovoljeni še kinetični člen polja H (ki za našo obravnavo ni relevanten, zato ga ne bom navedel), ter potencialni člen $V(H) = -\mu^2 H^\dagger H + \lambda (H^\dagger H)^2$. Za naš opis si izberimo $\mu^2, \lambda > 0$. Ko se parameter μ^2 povečuje, se potencial spreminja, kot je prikazano na sliki 2. Minimum potenciala (ki mu pravimo vakuum) se premakne iz točke 0 na neko



Slika 2. Spontani zlom simetrije: z večanjem parametra μ^2 se minimum potenciala premakne na neničelno vrednost. Potencial je ves čas rotacijsko simetričen, če ga razvijemo v okolici minimuma pri $\mu^2 > 0$ pa ta simetrija ni več prisotna.

neničelno vrednost. Pravimo, da je vakuum pridobil pričakovano vrednost. Skalarno Higgsovo polje je definirano v vsaki točki prostor-časa: rečemo lahko, da prežema ves prostor. Po spontanem zlomu simetrije ima H v vsaki točki enako neničelno vrednost. Sistem se lahko ustali kjerkoli v minimumu, ki se nahaja pri $(\mu^2/(2\lambda))e^{i\theta}$ za poljuben θ . Zaradi rotacijske simetrije si lahko točko v minimumu izberemo in potencial razvijemo okoli te točke. Izberemo si realno vakuumsko pričakovano vrednost v in polje H parametriziramo kot $H = (\phi^+(x), [v + h(x) + iG(x)]/\sqrt{2})^T$. To, da ima prva

⁸Tako zapisan kinetični člen ni invarianten pod $U(1)$ simetrijami. Invarianco kinetičnega člena pridobimo z uvedbo kovariantnega odvoda.

⁹Člen oblike $-m_D L_L^\dagger e_R$ bi bil podoben Lorentzovemu členu, v katerem indeksi ne bi bili seštetni, npr. $ax^\mu c$, kjer sta a in c Lorentzova skalarja. To ni invariantna količina, saj se z Lorentzovo (oz. v našem primeru $SU(2)$) transformacijo spremeni.

¹⁰Poleg invariance pod simetrijami je pomembno tudi, da je naš Lagrangian renormalizabilen, kar v poenostavitvi pomeni, da nimamo neskončnosti. Renormalizabilnost je velika omejitev na možne člene v Lagrangianu.

komponenta nabojev $+1$, druga pa je nenabita, sledi iz zahteve, da so členi v Lagrangianu nevtralni. Ko se naš sistem premakne v minimum potenciala in se simetrija spontano zlomi, Higgsov dublet postane: $\langle H \rangle = (0, v/\sqrt{2})^T$. Spontani zlom simetrije si lahko predstavljamo kot ustalitev našega sistema v minimumu energije. Analogen proces se zgodi v feromagnetih. Pri visokih temperaturah so dipolni momenti poljubno usmerjeni, saj je termična energija močnejša od interakcijske energije med magnetnimi dipoli. Material je takrat rotacijsko simetričen (nobena smer ni privilegirana). Pri nižjih temperaturah začne prevladovati interakcijska energija med dipolnimi momenti, zato se vsi poravnajo v neko smer. Material rotacijske simetrije nima več, zato rečemo, da se simetrija spontano zlomi.

Razpišimo masni člen, pri tem pa upoštevajmo le konstanten člen Higgsovega polja po spontanem zlomu simetrije. Lahko si predstavljamo, da smo se na sliki 2 postavili v minimum potenciala. Velja:

$$-y_e L_L^\dagger H e_R = -y_e \begin{pmatrix} \nu_L^\dagger & e_L^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e_R = -y_e \frac{v}{\sqrt{2}} e_L^\dagger e_R, \quad (11)$$

kjer je y_e parameter, ki predstavlja moč sklopitve s Higgsovim poljem in določa maso delca. Po spontanem zlomu simetrije smo dobili masni člen Diracovega tipa z $m_D = y_e v/\sqrt{2}$. V tako skonstruiranem Lagrangianu masnega člena za nevtrine brez desno-ročnega nevtrina ne moremo zapisati. Eksperimenti so pokazali, da nevtrini v resnici *imajo* maso, zato potrebujemo model, ki bi lahko to maso razložil [24].

6. Gugalnični mehanizem tipa I

Popularne razširitve Standardnega modela, ki razložijo maso nevtrinov so gugalnični mehanizmi [27–31]. Obstajajo trije tipi gugalničnih mehanizmov, v tem članku se bom posvetil tipu I.

V 5. poglavju smo spoznali, zakaj Standardni model napove brezmasne nevtrine. Samo z levo-ročnim nevtrinom masnega člena za nevtrine ne moremo zapisati. Glavna ideja gugalničnega mehanizma tipa I je, da uvedemo desno-ročni nevtrinski singlet in zapišemo dovoljene masne člene. Ker desno-ročni nevtrino ν_R z znanimi interakcijami ne interagira, ga pogosto imenujemo sterilen nevtrino.

Zapišimo najprej Diracov masni člen za nevtrine, analogen (11):

$$-y_\nu L_L^\dagger \tilde{H} \nu_R = -y_\nu L_L^\dagger i\sigma_2 H^* \nu_R = -y_\nu \begin{pmatrix} \nu_L^\dagger & e_L^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{v}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \nu_R = -y_\nu \frac{v}{\sqrt{2}} \nu_L^\dagger \nu_R, \quad (12)$$

kjer je $\tilde{H} := i\sigma_2 H^*$. Higgsovo polje H je enako kot v 5. poglavju. Edina razlika med H in $\tilde{H}$ po spontanem zlomu simetrije je (v izbrani parametrizaciji polja H) zamenjava komponent dubleta. Uvedba $\tilde{H}$ je potrebna, da (12) postane masni člen za nevtrine ter da ohranja kvantna števila. Da je člen invarianten pod $SU(2)_L$ transformacijami se mora $\tilde{H}$ transformirati kot dublet, kar dokažem v dodatku 10. Mase nevtrinov so lahko Diracovega tipa, kot jih predvidi Diracov masni člen (12). V primerjavi z masami drugih leptonov so izjemno majhne (vsaj šest redov velikosti manjše), kar bi pomenilo, da mora biti sklopitvena konstanta y_ν ustrezno manjša (ker je vakuumaska pričakovana vrednost v za vse leptone enaka). Za nevtrine pa je dovoljena tudi masa drugačnega tipa in ni razloga, da bi bila neničelna le Diracova masna komponenta.

Spomnimo se na vodilo za zapis členov v Lagrangianu: s polji, ki smo jih izbrali, zapišemo vse dovoljene člene, ki so invariantni pod Lorentzovo in umeritvenimi simetrijami. Izkaže se, da lahko pri nevtrinih zapišemo člen, ki je za ostale leptone prepovedan. Ker so desno-ročni nevtrini nenabiti pod $U(1)_Y$ (njihov hipernaboj je enak 0, zato se transformirajo kot singleti), lahko poleg Diracovega zapišemo tudi Majoranov masni člen, ne da bi zlomili $U(1)$ simetrijo. Za levo-ročne

nevtrine takšnega člena ne moremo zapisati, saj imajo neničeln hipernaboj. Najbolj splošen masni del Lagrangiana za nevtrine se tako glasi:

$$\mathcal{L}_\nu^{mass} = -m_D(\nu_L^\dagger \nu_R + \nu_R^\dagger \nu_L) - m_M(\nu_R^T i\sigma_2 \nu_R - \nu_R^\dagger i\sigma_2 \nu_R^*) , \quad (13)$$

kjer sem z $m_D = y_\nu v/\sqrt{2}$ označil Diracovo, z m_M pa Majoranovo maso. Če se izkaže, da je $m_M = 0$, dobimo masni člen Diracovega tipa (12). Zaradi narave desno-ročnega nevtrina obstaja potencialna možnost, da je to Majoranov fermion, torej ima maso Majoranovega tipa, lahko pa je njegova masa kombinacija obeh prispevkov.

Člene v Lagrangianu lahko zapisujemo v dvokomponentni obliki z Weylovimi spinorji, ali pa v štirikomponentni obliki z Diracovimi ali Majoranovimi spinorji. Zapisi so si ekvivalentni. Zapišimo enačbo (13) s 4-komponentnimi Majoranovimi spinorji, ki sem jih definiral v poglavju 3.2. Velja: $\psi_{M,L} = (\nu_L, i\sigma_2 \nu_L^*)^T$ in $\psi_{M,R} = (-i\sigma_2 \nu_R^*, \nu_R)^T$. Enačba (12) je ekvivalentna enačbi, ki jo lahko zapišemo tudi v matrični obliki¹¹:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\nu^{mass} &= -m_D \bar{\psi}_{M,L} \psi_{M,R} - \frac{m_M}{2} \bar{\psi}_{M,R} \psi_{M,R} + h.c. \\ &= -(\bar{\psi}_{M,L}, \bar{\psi}_{M,R}) \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & m_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{M,L} \\ \psi_{M,R} \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (14)$$

To je enačba v bazi ročnosti, imenovani tudi interakcijska baza, kjer so lastna stanja levo- in desno-ročni nevtrino, ν_L in ν_R . Izračuni v tej bazi so lažji zaradi narave šibke interakcije, ki sklaplja le levo-ročne delce. Vendar to ni baza, v kateri delce opazimo. Fizikalna baza je masna baza, v katero preidemo z diagonalizacijo matrike oziroma rotacijo lastnih stanj. Da dobimo masna stanja diagonalizirajmo matriko v enačbi (14):

$$\begin{vmatrix} -\lambda & m_D \\ m_D & m_M - \lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda_{1,2} = \frac{m_M}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{2m_D}{m_M} \right)^2} \right) . \quad (15)$$

V masni bazi imamo dve lastni stanji z masama λ_1 in λ_2 . Če predpostavimo $m_M \gg m_D$, lahko koren v enačbi (15) razvijemo in dobimo $\lambda_1 = M \approx m_M$, $\lambda_2 = m \approx m_D^2/m_M$. Fizikalna stanja, ki jih lahko opazimo, sta težki nevtrino z maso M in lahki nevtrino z maso m . Sedaj je jasno, zakaj to imenujemo gugalnični mehanizem. Če je masa M zelo velika, je m zelo majhna, če pa M zmanjšamo, se m poveča.

Da lahko razumemo, kako so masna lastna stanja povezana z levo- in desno-ročnim nevtrinom (to sta stanji v interakcijski bazi), izračunajmo prehodno matriko. Parametriziramo jo s parametrom θ , ki ga imenujemo mešalni kot. Ta nam pove, za kakšen kot so masna lastna stanja zarotirana glede na stanja v interakcijski bazi, oziroma koliko se ν_L in ν_R v masni bazi mešata. Velja:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & m_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \implies \tan 2\theta = \frac{2m_D}{m_M} . \quad (16)$$

V limiti, ko je $m_M \gg m_D$, lahko tangens razvijemo in dobimo $\theta \approx m_D/m_M \ll 1$. Težki nevtrino je torej večinoma desno-ročni, lahki pa približno levo-ročni.

Skala mas ostalih leptonov je določena z vakuumsko pričakovano vrednostjo v , saj je Diracov masni člen edini, ki ga lahko zapišemo. Mase se tako razlikujejo le zaradi različnih sklopitev s Higgsovim poljem. Pri nevtrinih pa je dovoljen tudi Majoranov masni člen. Ta dopušča nov parameter m_M , ki je neodvisen od v in določa svojo masno skalo. Ker sta oba tipa mas dovoljena, je vprašanje, kakšni sta vrednosti parametrov, zelo relevantno. Kot smo spoznali v poglavju 3.2,

¹¹Dodatni faktor 2 sem absorbiral v masi m_D in m_M .

neničelna Majoranova masa pomeni, da obstajajo procesi, v katerih leptonsko število ni ohranjeno. Primer takšnega procesa je breznevtrinski dvojni beta razpad [32, 33], pri katerem dva nevtrona razpadeta v protona, izsevata pa se dva elektrona. Pri tem se nevtrina ne izsevata, zaradi česar je leptonsko število kršeno za dve enoti. Eksperimenti takšen razpad aktivno iščejo [34–37], saj bi nam obstoj takšnih procesov zagotovil maso Majoranovega tipa [12, 24, 38, 39].

7. Zaključek

V članku smo spoznali, da znotraj Standardnega modela masnega člena za nevtrine zaradi odsotnosti desno-ročnega nevtrinskega singleta ne moremo zapisati. Če ga uvedemo, pa nam umeritvene simetrije dopuščajo dva tipa masnih členov: Diracov in Majoranov. V masni bazi tako obstajata lahki in težki nevtrino, ki sta približno ekvivalentna levo- in desno-ročnemu nevtrinu v interakcijski bazi. Spoznali smo, da masa Majoranovega tipa, ki je za desno-ročne nevtrine dovoljena, dovoljuje procese, ki leptonskega števila ne ohranjajo. Takšne procese eksperimentalni fiziki aktivno iščejo. Kakšnega tipa so nevtrinske mase, je pomembno vprašanje, ki pa zaenkrat ostaja še neodgovorjeno.

8. Zahvala

Rad bi se zahvalil mentorju, izr. prof. dr. Mihi Nemevšku, za izjemno podporo, pomoč in temeljite razlage, ki so mi poleg obravnavane snovi pomagale razumeti tudi širše matematično in fizikalno ozadje.

9. Dodatek: Lorentzova invarianca Diracovega in Majoranovega masnega člena

Spomnimo se, kako pri kvantni mehaniki zapišemo operatorja translacije in rotacije. Translacijo smo zapisali kot $U_{tr}(\mathbf{s}) = e^{-i\mathbf{s}\cdot\mathbf{P}}$, kjer je $\mathbf{s}$ parameter, ki pove smer in magnitudo transformacije, $\mathbf{P}$ pa t.i. generator translacije. Podobno smo rotacije zapisali kot $U_{rot}(\phi) = e^{-i\phi\cdot\mathbf{L}}$, kjer je ϕ vektor treh parametrov, $\mathbf{L}$ pa trije generatorji. Komponente vrtilne količine $\mathbf{L}$ zadoščajo relaciji $[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k$, kjer je $[\ , \]$ komutator [40]. Matematično transformacije U_{rot} tvorijo Liejevo grupo, generatorji te grupe so elementi Liejeve algebre, ki je definirana kot tangentni prostor na grupo pri identiteti. Komutatorska relacija med komponentami vrtilne količine nam pove, da tvorijo algebro $\mathfrak{su}(2)$, tako kot Paulijeve matrike σ_i . Na tej točki je pomembno le dejstvo, da lahko eksponentno preslikavo razvijemo, torej: $U_{rot}(\phi) \approx 1 - i\phi \cdot \mathbf{L}$, kar sledi iz teorije Liejevih grup.

Liejevo grupo tvorijo tudi Lorentzove preslikave, vendar je njena struktura rahlo drugačna. Poleg treh rotacij imamo na razpolago tudi tri potiske (ang. *boost-e*). Generatorje rotacij navadno označimo J_i , generatorje potiskov pa K_i . Generatorji Lorentzove grupe zadoščajo algebri $\mathfrak{so}(1, 3)$:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k, \quad [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}K_k. \quad (17)$$

Pomembna je ugotovitev, da algebra razpade na dva dela, če definiramo linearni kombinaciji: $J_{\pm i} := (1/2)(J_i \pm iK_i)$. Velja:

$$[J_{+i}, J_{+j}] = i\epsilon_{ijk}J_{+k}, \quad [J_{-i}, J_{-j}] = i\epsilon_{ijk}J_{-k}, \quad [J_{+i}, J_{-j}] = 0. \quad (18)$$

Pravimo, da je algebra $\mathfrak{so}(1, 3)$ izomorfna $\mathfrak{su}(2) \otimes \mathfrak{su}(2)$. Pri tem upodobitev $(1/2, 0)$ deluje na levo-ročni Weylov spinor, $(0, 1/2)$ pa na desno-ročnega. Baza $\mathfrak{su}(2)$ so Paulijeve matrike, zato je jasno, zakaj imajo γ matrike bločno strukturo ter zakaj bloki vsebujejo ravno matrike σ_i .

Poskusimo zapisati Lorentzovo transformacijo z eksponentno preslikavo. Standardno generatorje rotacij in potiskov zapišemo kot antisimetričen tenzor $\Sigma^{\mu\nu}$, parametre pa kot antisimetričen tenzor

$\omega^{\mu\nu}$ s šestimi neodvisnimi realnimi komponentami. Lorentzovo transformacijo Λ lahko zapišemo kot:

$$\Lambda = e^{i\Sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}}, \quad \text{kjer je} \quad \Sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{4i}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (19)$$

Tako se 4-komponentni Diracov spinor ψ transformira kot $\psi \xrightarrow{L.T.} \Lambda\psi$ [12, 19].

Dokažimo, da za $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ velja $\bar{\psi} \xrightarrow{L.T.} \bar{\psi} \Lambda^{-1}$. Ker so $\gamma^{i=1,2,3}$ antihermitske, γ^0 pa hermitska, in ker med seboj antikomutirajo, velja: $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$. Sledi:

$$\begin{aligned} (\Sigma^{\mu\nu})^\dagger &= \left(\frac{1}{4i}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\right)^\dagger = -\frac{1}{4i}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)^\dagger = -\frac{1}{4i}(\gamma^0 \gamma^\nu \gamma^0 \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 - \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^0 \gamma^\nu \gamma^0) \\ &= -\frac{1}{4i} \gamma^0 (\gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^\nu) \gamma^0 = -\frac{1}{4i} \gamma^0 [\gamma^\nu, \gamma^\mu] \gamma^0 = \gamma^0 \frac{1}{4i} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \gamma^0 = \gamma^0 \Sigma^{\mu\nu} \gamma^0. \end{aligned}$$

Preverimo sedaj, kako se transformira $\bar{\psi}$. Vemo že, da velja $\psi \xrightarrow{L.T.} \Lambda\psi$, torej:

$$\bar{\psi} \xrightarrow{L.T.} (\Lambda\psi)^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger \Lambda^\dagger \gamma^0.$$

Če velja $\Lambda^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \Lambda^{-1} (= \gamma^0 e^{-i\Sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}})$, smo dokazali, da se $\bar{\psi}$ transformira z inverzno Lorentzovo transformacijo. Razvijmo in razpišimo izraz:

$$\begin{aligned} \Lambda^\dagger \gamma^0 &\approx (1 + i\Sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu})^\dagger \gamma^0 = (1 - i(\Sigma^{\mu\nu})^\dagger \omega_{\mu\nu}) \gamma^0 = (\gamma^0 - i\gamma^0 \Sigma^{\mu\nu} \gamma^0 \gamma^0 \omega_{\mu\nu}) = \gamma^0 (1 - i\Sigma^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu}) \\ &\approx \gamma^0 e^{-i\Sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}} = \gamma^0 \Lambda^{-1}. \end{aligned}$$

Glede na pravkar dokazano je Lorentzova invarianca Diracovega masnega člena $-m_D \bar{\psi} \psi$ očitna, saj:

$$-m_D \bar{\psi} \psi \xrightarrow{L.T.} -m_D \bar{\psi} \Lambda^{-1} \Lambda \psi = -m_D \bar{\psi} \psi. \quad (20)$$

Preverimo še Lorentzovo invarianco Majoranovega masnega člena $-m_M \chi_R^T i\sigma_2 \chi_R$. V tem primeru je lažje delati kar z dvokomponentnimi spinorji, ki se transformirajo z elementi ene od grup $SU(2)$ (generatorji so iz ene od algeber $\mathfrak{su}(2)$). Levo- in desno-ročni Weylov spinor se transformirata kot: $\chi_{L,R} \xrightarrow{L.T.} e^{i\frac{\sigma}{2} \cdot (\theta \pm i\phi)}$, kjer je $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T$ vektor Paulijevih matrik, θ in ϕ pa vektorja parametrov za rotacije in potiske. Velja:

$$-m_M \chi_R^T i\sigma_2 \chi_R \xrightarrow{L.T.} \chi_R^T \left(e^{i\frac{\sigma}{2} \cdot (\theta - i\phi)} \right)^T i\sigma_2 \left(e^{i\frac{\sigma}{2} \cdot (\theta - i\phi)} \right) \chi_R.$$

Dovolj je torej preveriti, da velja $\left(e^{i\frac{\sigma}{2} \cdot (\theta - i\phi)} \right)^T i\sigma_2 \left(e^{i\frac{\sigma}{2} \cdot (\theta - i\phi)} \right) = i\sigma_2$. Vemo, da velja $\sigma_{1,2}^T = \sigma_{1,2}$, $\sigma_2^T = -\sigma_2$, ter da Paulijeve matrike med sabo antikomutirajo. Označimo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T = \theta - i\phi$. Velja:

$$\begin{aligned} \left(e^{i\frac{\sigma}{2} \cdot \alpha} \right)^T i\sigma_2 \left(e^{i\frac{\sigma}{2} \cdot \alpha} \right) &\approx \left(1 + i\frac{\alpha_1}{2} \sigma_1^T + i\frac{\alpha_2}{2} \sigma_2^T + i\frac{\alpha_3}{2} \sigma_3^T \right) i\sigma_2 \left(1 + i\frac{\alpha_1}{2} \sigma_1 + i\frac{\alpha_2}{2} \sigma_2 + i\frac{\alpha_3}{2} \sigma_3 \right) \\ &= (i\sigma_2 + i^2 \frac{\alpha_1}{2} \sigma_1 \sigma_2 - i^2 \frac{\alpha_2}{2} \sigma_2 \sigma_2 + i \frac{\alpha_3}{2} \sigma_3 \sigma_2) \\ &= (i\sigma_2 - i^2 \frac{\alpha_1}{2} \sigma_2 \sigma_1 - i^2 \frac{\alpha_2}{2} \sigma_2 \sigma_2 - i \frac{\alpha_3}{2} \sigma_2 \sigma_3) \\ &= i\sigma_2 (1 - i \frac{\alpha_1}{2} \sigma_1 - i \frac{\alpha_2}{2} \sigma_2 - i \frac{\alpha_3}{2} \sigma_3) (1 + i \frac{\alpha_1}{2} \sigma_1 + i \frac{\alpha_2}{2} \sigma_2 + i \frac{\alpha_3}{2} \sigma_3) \\ &\approx i\sigma_2 \left(e^{-i\frac{\sigma}{2} \cdot \alpha} \right) \left(e^{i\frac{\sigma}{2} \cdot \alpha} \right) \\ &= i\sigma_2. \end{aligned}$$

Tako smo dokazali tudi Lorentzovo invarianco Majoranovega masnega člena.

10. Dodatek: Transformacija $\tilde{H}$ pod $SU(2)$

Ker se $L_L^\dagger$ transformira z inverzno $SU(2)$ transformacijo ($U^{-1} = U^\dagger$, po definiciji), se mora $\tilde{H}$ transformirati kot dublet, če želimo, da je člen $-y_\nu L_L^\dagger \tilde{H} e_R$ $SU(2)$ invarianten. Generatorji grupe $SU(2)$ so Paulijeve matrike, zato lahko splošno transformacijo zapišemo kot $U = e^{i\frac{\sigma}{2}\cdot\alpha}$, kjer je α vektor treh realnih parametrov, ki določajo transformacijo. Vemo, da se H pod $SU(2)$ transformira kot dublet, torej $H \xrightarrow{SU(2)} UH$. Preverimo, ali se tako transformira tudi $\tilde{H} = i\sigma_2 H^*$. Velja:

$$\tilde{H} \xrightarrow{SU(2)} i\sigma_2(UH)^* = i\sigma_2 U^* H^* .$$

Ker Paulijeve matrike med sabo antikomutirajo in velja $(i\sigma_{1,2})^* = -i\sigma_{1,2}$, $(i\sigma_2)^* = i\sigma_2$, sledi:

$$\begin{aligned} i\sigma_2 U^* H^* &\approx i\sigma_2 \left(1 + i\frac{\alpha_1}{2}\sigma_1 + i\frac{\alpha_2}{2}\sigma_2 + i\frac{\alpha_3}{2}\sigma_3\right)^* H^* \\ &= i\sigma_2 \left(1 - i\frac{\alpha_1}{2}\sigma_1 + i\frac{\alpha_2}{2}\sigma_2 - i\frac{\alpha_3}{2}\sigma_3\right) H^* \\ &= (\sigma_2 - i^2\frac{\alpha_1}{2}\sigma_2\sigma_1 + i^2\frac{\alpha_2}{2}\sigma_2\sigma_2 - i^2\frac{\alpha_3}{2}\sigma_2\sigma_3) H^* \\ &= (\sigma_2 + i^2\frac{\alpha_1}{2}\sigma_1\sigma_2 + i^2\frac{\alpha_2}{2}\sigma_2\sigma_2 + i^2\frac{\alpha_3}{2}\sigma_3\sigma_2) H^* \\ &= (1 + i\frac{\alpha_1}{2}\sigma_1 + i\frac{\alpha_2}{2}\sigma_2 + i\frac{\alpha_3}{2}\sigma_3) i\sigma_2 H^* \\ &= U i\sigma_2 H^* \\ &= U \tilde{H} . \end{aligned}$$

Vidimo, da se tudi $\tilde{H}$ pod $SU(2)$ transformira kot dublet, kar smo želeli dokazati.

LITERATURA

- [1] S.L. Glashow, *Partial-symmetries of weak interactions*, Nuclear Physics **22** (1961), 579–588.
- [2] S. Weinberg, *A Model of Leptons*, Physical Review Letters **19** (1967), 1264–1266.
- [3] A. Salam, *Weak and Electromagnetic Interactions*, Conf. Proc. C **680519** (1968), 367–377.
- [4] Avtorji Wikipedije, *Standard Model of Elementary Particles (slika)*. https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/00/Standard_Model_of_Elementary_Particles.svg. Dostopano: 4.5.2025.
- [5] J. Chadwick, *The intensity distribution in the magnetic spectrum of β particles from radium ($B + C$)*, Verh. Phys. Gesell. **16** (1914), 383–391.
- [6] W. Pauli, *Dear radioactive ladies and gentlemen*, Phys. Today **31N9** (1978), 27.
- [7] E. Fermi, *Tentativo di una teoria dell'emissione dei raggi beta*, Ric. Sci. **4** (1933), 491–495.
- [8] Y. Fukuda et al., *Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos*, Phys. Rev. Lett. **81** (1998), 1562–1567.
- [9] Q.R. Ahmad et al., *Measurement of the rate of $\nu_e + d \rightarrow p + p + e^-$ interactions produced by 8B solar neutrinos at the Sudbury Neutrino Observatory*, Phys. Rev. Lett. **87** (2001), 071301.
- [10] Q.R. Ahmad et al., *Direct Evidence for Neutrino Flavor Transformation from Neutral-Current Interactions in the Sudbury Neutrino Observatory*, Phys. Rev. Lett. **89** (2002), 011301.
- [11] The Nobel Committee, *The Nobel Prize in Physics 2015*, <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2015/summary/>. Dostopano: 23.7.2025.
- [12] M. Nemevšek, *Lectures on Neutrino Mass*, Zapiski iz poletne šole v Vipavi, 2016.
- [13] D. Tong, *The Standard Model*, Lecture notes, University of Cambridge, 2019, <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/standardmodel.html>. Dostopano: 21.3.2025
- [14] A. Strumia in F. Vissani, *Neutrino masses and mixings and...*, arXiv:hep-ph/0606054v3 (2006).
- [15] A. Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen Phys. **322** (1905), 891–921.
- [16] O. Klein, *Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity*, Z. Phys. **37** (1926), 895–906.
- [17] W. Gordon, *Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen Theorie*, Z. Phys. **40** (1926), 117–133.
- [18] P.A.M. Dirac, *The quantum theory of the electron*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **117** (1928), 610–624.
- [19] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton University Press, 2003.
- [20] H. Liu, *Relativistic Quantum Field Theory 1*, Massachusetts Institute of Technology, 2023, <https://ocw.mit.edu/courses/8-323-relativistic-quantum-field-theory-i-spring-2023/>. Dostopano: 6.1.2025

- [21] E. Majorana, *Teoria simmetrica dell'elettrone e del positrone*, Nuovo Cim. **14** (1937), 171–184.
- [22] D. Tong, *Quantum Field Theory*, University of Cambridge, 2006, <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft.html>. Dostopano: 21.3.2025
- [23] C. S. Wu et al., *Experimental Test of Parity Conservation in β Decay*, Phys. Rev. **105** (1957), 1413–1414.
- [24] M.D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*, Cambridge University Press, 2014.
- [25] S. Weinberg, *A Model of Leptons*, Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 1264–1266.
- [26] P. W. Higgs, *Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons*, Phys. Rev. Lett. **13** (1964), 508–509.
- [27] P. Minkowski, *$\mu \rightarrow e\gamma$ at a Rate of One Out of 10^9 Muon Decays?*, Phys. Lett. B **67** (1977), 421–428.
- [28] R.N. Mohapatra in G. Senjanović, *Neutrino Mass and Spontaneous Parity Nonconservation*, Phys. Rev. Lett. **44** (1980), 912.
- [29] T. Yanagida, *Horizontal gauge symmetry and masses of neutrinos*, Conf. Proc. C **7902131** (1979), 95–99.
- [30] S.L. Glashow, *The future of Elementary Particle Physics*, NATO Sci. Ser. B **61** (1980), 687.
- [31] M. Gell-Mann, P. Ramond in R. Slansky, *Complex Spinors and Unified Theories*, Conf. Proc. C **790927** (1979), 315–321.
- [32] G. Racah, *On the symmetry of particle and antiparticle*, Nuovo Cim. **14** (1937), 322–328.
- [33] W.H. Furry, *Note on the Theory of the Neutral Particle*, Phys. Rev. **54** (1938), 56–67.
- [34] M. Agostini et al., *Final Results of GERDA on the Search for Neutrinoless Double- β Decay*, Phys. Rev. Lett. **125** (2020), 252502.
- [35] J.B. Albert et al., *Search for Neutrinoless Double-Beta Decay with the Upgraded EXO-200 Detector*, Phys. Rev. Lett. **120** (2018), 072701.
- [36] A. Gando et al., *Search for Majorana Neutrinos near the Inverted Mass Hierarchy Region with KamLAND-Zen*, Phys. Rev. Lett. **117** (2016), 082503.
- [37] D.R. Artusa et al., *Searching for neutrinoless double-beta decay of ^{130}Te with CUORE*, Adv. High Energy Phys. **2015** (2015), 879871.
- [38] V. Brdar, A.J. Helmboldt, S. Iwamoto in K. Schmitz, *Type-I Seesaw as the Common Origin of Neutrino Mass, Baryon Asymmetry, and the Electroweak Scale*, arXiv:1905.12634 [hep-ph], 2019.
- [39] E.K. Akhmedov, *Neutrino Physics*, arXiv:hep-ph/0001264, 2000.
- [40] A. Ramšak, *Kvantna mehanika*, Založba Univerze v Ljubljani, 2023.