UPORABA OPTIMALNEGA ČASA USTAVLJANJA NA ZAVAROVALNIŠKIH PRODUKTIH

MAŠA ORELJ

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Teorija optimalnega časa ustavljanja nam pomaga odgovoriti na vprašanje, v katerem trenutku je pričakovana korist zaustavitve slučajnega procesa maksimalna. Uporablja se na številnih področjih, v članku pa se osredotočimo na uporabo na zavarovalniških produktih z garancijo. Pri ponudbi takšnih produktov so zavarovalnice izpostavljene tveganju, pred katerim se morajo ustrezno zaščititi. Na začetku članka v splošnem predstavimo matematično podlago teorije, definiramo pojem Snellove ovojnice in predstavimo njeno uporabo. Sledi aplikacija teorije, kjer predstavimo dve varovalni strategiji zavarovalnice. Ena od teorij temelji na iskanju najbolj ustreznega časa za nakup prodajne opcije, ki ob izteku pogodbe zagotavlja zadostna sredstva za izplačilo zavarovanca. Strategiji primerjamo glede na porazdelitev končne izgube, rezultati pa so podprti tudi s kratko simulacijo.

THE USE OF OPTIMAL STOPPING TIME IN INSURANCE PRODUCTS

The theory of optimal stopping time helps us answer the question, at what point in time the expected benefit of stopping a random process is maximized. Although the theory is applicable in many fields, this article will focus on its application in insurance products with guarantees. The risk arising from such products must be hedged by suitable investments. At the beginning of the article we give a general introduction to the mathematical basis of the theory, define the concept of Snell envelope and present its applicability. This is followed by a practical use of the theory, where we present two hedging strategies of an insurance company. One of the theories is based on finding the most appropriate time to buy a put option, which, at the expiry of the contract, provides sufficient funds to pay out the guaranteed amount. The two strategies are compared with respect to the insurer's ultimate loss distribution, and the results are supported by a short simulation.

1. Uvod

Teorija optimalnega časa ustavljanja je veja teorije verjetnosti, ki se je začela razvijati ob analiziranju iger na srečo. V središče zanimanja ni bilo postavljeno vprašanje, kakšna je verjetnost zmage igralca, ampak kdaj naj ta igro zapusti, da bo njegov dobiček čim večji. V grobem se torej teorija optimalnega časa ustavljanja ukvarja z ugotavljanjem najboljšega časa za prekinitev nekega od naključij odvisnega dogodka, z namenom maksimiziranja pričakovane koristi. Ob tem se na vsakem koraku vprašamo, ali bo vrednost na novo pridobljenih informacij pretehtala ceno njihovega pridobivanja.

Časovni horizont opazovanja slučajnega procesa je lahko zvezen ali diskreten, končen ali neskončen, pri čemer se bomo v nadaljevanju osredotočili na problem v diskretnem končnem času, torej $t \in \{0, 1, 2, \ldots, T\}$. Uporaba optimalnega časa ustavljanja se je v današnjem času razširila tudi na druga področja, kot so statistika, ekonomija in matematične finance. Slednje bo osrednje zanimanje članka.

V prvem poglavju bo predstavljen osnovni matematični okvir, s katerim lahko probleme te narave natančno formuliramo in v nekaterih primerih tudi eksplicitno rešimo. Obstajajo številni različni pristopi k reševanju problema optimalnega časa ustavljanja, pri čemer bo v nadaljevanju podrobneje predstavljen in nato tudi uporabljen martingalski pristop, kjer je ključna uporaba Snellove ovojnice. V drugem poglavju bomo teorijo optimalnega časa ustavljanja aplicirali na uporabo na binomskem modelu finančnega trga, sledila pa bo še podrobnejša analiza strategije pri zavarovalniških produktih z garancijo. Predstavljena bo zaščitna strategija, ki temelji na uporabi Snellove ovojnice, s katero želimo določiti najboljši čas za nakup ustrezne evropske prodajne opcije. Strategijo bomo primerjali s strategijo varovanja brez izvedenih finančnih instrumentov in opazovali obe porazdelitvi končne izgube zavarovalnice.

2. Teorija optimalnega časa ustavljanja

Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T, P)$ končni verjetnostni prostor, pri čemer je Ω množica stanj ekonomije, P verjetnost teh stanj in $\mathcal{F} : \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_T$ informacijska struktura, predstavljena z naraščajočim zaporedjem σ-algeber. Na definiranem verjetnostnem prostoru opazujemo nek prilagojen slučajni proces $(X_t)_{t=0}^T$, tj. X_t je slučajna spremenljivka merljiva glede na $\mathcal{F}_t$ za vsak $t \in \{0, 1, 2, \ldots, T\}$. Pri tem se v vsakem času t odločimo, ali bomo proces nadaljevali, ali pa ga ustavili in tako prejeli vrednost X_t.

Kot smo omenili v uvodu, bomo problem optimalnega časa ustavljanja reševali z martingalskim pristopom. S tem namenom definiramo martingal in supermartingal.

Definicija 1. Naj bo $(X_t)_{t=0}^T$ slučajni proces, ki je prilagojen informacijski strukturi $(\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$. Potem je $(X_t)_{t=0}^T$ glede na $(\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$

- **martingal**, če velja $X_t = E(X_{t+1}|\mathcal{F}_t)$ za vsak $t \in \{0, 1, 2, \ldots, T-1\}$,
- **supermartingal**, če velja $X_t \geq E(X_{t+1}|\mathcal{F}_t)$ za vsak $t \in \{0, 1, 2, \ldots, T-1\}$.

2.1 Čas ustavljanja

Odločitev o izstopu iz slučajnega procesa ob času $t \in \{0, 1, 2, \ldots, T\}$ je odvisna izključno od informacij, ki so nam na voljo do vključno tega trenutka, iz česar sledi definicija časa ustavljanja.

Definicija 2. Naj bo τ slučajna spremenljvka na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T, P)$. Potem je slučajna spremenljivka τ glede na $\mathcal{F}_t$

$$\tau : \Omega \to \{0, 1, 2, \ldots, T\}$$

čas ustavljanja, če za vsak $t \in \{0, 1, 2, \ldots, T\}$ velja:

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

oziroma (v primeru diskretnega časovnega modela):

$$\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t.$$

V nadaljevanju bomo s $S_{t,T}$ označevali množico vseh časov ustavljanja, za katere velja $t \leq \tau \leq T$.

Vpeljimo še koncept ustavljenega procesa. Ob nekem času ustavljanja $t = \tau$ se torej lahko odločimo, da bomo iz slučajnega procesa izstopili. Pri tem definiramo nov slučajni proces, ki se z opazovanim slučajnim procesom ujema do časa τ, naprej pa so njegove vrednosti konstantne, enake vrednosti procesa v času zaustavitve.

Definicija 3. Naj bo dan slučajni proces $(X_t)_{t=0}^T$, ki je prilagojen informacijski strukturi $\mathcal{F}$ in τ čas ustavljanja. Potem ustavljeni proces glede na τ označimo s $(X_t^\tau)_{t=0}^T$ in definiramo kot

$$X_t^\tau = \begin{cases} X_t \ ; \ t \leq \tau \\ X_\tau \ ; \ t > \tau \end{cases}$$

za vse $t \in \{0, 1, 2, \ldots, T\}$.

Očitno velja $X_0^\tau = X_0$ in $X_T^\tau = X_\tau$.

Za definirani ustavljeni proces veljajo naslednje lastnosti.

Trditev 1. *Naj bo* $(X_t)_{t=0}^T$ *prilagojen slučajni proces in* τ *čas ustavljanja. Potem je tudi ustavljeni proces* $(X_t^\tau)_{t=0}^T$ *prilagojen. Naprej, če je proces* $(X_t)_{t=0}^T$ *napovedljiv, tj. če je slučajna spremenljivka* X_t *merljiva glede na* $\mathcal{F}_{t-1}$ *za vsak* $t \in \{0, 1, 2, \ldots, T\}$*, je napovedljiv tudi* $(X_t^\tau)_{t=0}^T$.

Izrek 2 (Doobov izrek). *Naj bo* $(X_t)_{t=0}^T$ *prilagojen slučajni proces in* τ *čas ustavljanja. Če je* $(X_t)_{t=0}^T$ *martingal (supermartingal), je tudi ustavljeni proces* $(X_t^\tau)_{t=0}^T$ *martingal (supermartingal).*

Dokaz (Ideja). Za dokaz zgornje trditve in izreka izhajamo iz dejstva, da za poljuben $t \in \{0, 1, 2, \ldots, T\}$ lahko ustavljeni proces definiramo kot

$$X_t^\tau = X_0 + \sum_{i=1}^{t} (X_i - X_{i-1}) \mathbb{1}_{\{i \leq \tau\}}. \tag{1}$$

Z upoštevanjem zgornjih definicij in lastnosti martingalov hitro pridemo do zgornjih ugotovitev. Za podrobnejši dokaz glej [1].

2.2 Optimalni čas ustavljanja

Naš cilj je poiskati čas ustavljanja za opazovan slučajni proces, pri katerem bo pričakovana korist, glede na dostopne informacije, največja. S tem namenom definiramo pojem optimalnega časa ustavljanja.

Definicija 4. Čas ustavljanja τ^* imenujemo **optimalni čas ustavljanja** za prilagojen slučajni proces $(X_t)_{t=0}^T$, če velja

$$E_P(X_{\tau^*} \mid \mathcal{F}_0) = \sup_{\tau \in S_{0,T}} E_P(X_\tau \mid \mathcal{F}_0).$$

Definicija nam pove, da izmed vseh možnih strategij želimo izbrati tisto, ki optimizira pričakovano vrednost, pri čemer so razpoložljive strategije ponazorjene s časi ustavljanja. Ob tem se moramo zavedati, da v nekem času t lahko prihodnjo korist napovemo le s pričakovano vrednostjo, saj je dejanska končna korist odvisna od naključij.

2.3 Snellova ovojnica

Osnovno orodje za iskanje optimalne strategije izdajatelja in nosilca ameriške opcije je Snellova ovojnica. Gre za poseben slučajni proces, ki ga označimo z $(U_t)_{t=0}^T$ in je podan s predpisom:

$$\begin{cases} U_T = Z_T \\ U_t = \max(Z_t, E_P(U_{t+1} \mid \mathcal{F}_t)) \ ; \qquad \text{za } t \leq T-1, \end{cases}$$

pri čemer je $(Z_t)_{t=0}^T$ nek slučajni proces prilagojen informacijski strukturi $\mathcal{F}$.

Izrek 3. *Snellova ovojnica za slučajni proces* $(Z_t)_{t=0}^T$ *je najmanjši supermartingal, ki dominira ta slučajni proces. To pomeni, da velja*

$$U_t \geq Z_t \qquad \text{in} \qquad U_t \geq E_P(U_{t+1} | \mathcal{F}_t)$$

za vsak $t \in \{0, 1, 2, \ldots, T\}$.

Dokaz. Dominacija je očitna, saj Snellova ovojnica $(U_t)_{t=0}^T$ na vsakem koraku zavzame vrednost, ki je večja ali enaka vrednosti $(Z_t)_{t=0}^T$. Velja tudi

$$U_t = \max(V_t, E_P(U_{t+1} \mid \mathcal{F}_t)) \geq E_P(U_{t+1} \mid \mathcal{F}_t),$$

torej je definirani slučajni proces res supermartingal.

Opomba 1. Snellovo ovojnico lahko na končnem časovnem horizontu definiramo za vsak slučajni proces $(X_t)_{t=0}^T$ in poljubno verjetnost P, za katero velja $E_P(\max_{t\leq T}|X_t|) < \infty$. Njena konstrukcija izvira iz ocenjevanja poštene vrednosti ameriških opcij in s primerjavo teh vrednosti z vrednostmi na trgu služi kot pomemben vir informacij za vlagatelje.

Snellovo ovojnico z iskanjem optimalnega časa ustavljanja povežemo z naslednjim izrekom, ki je ključen za razvoj strategije v naslednjem poglavju.

Izrek 4. *Naj bo $(Z_t)_{t=0}^T$ slučajni proces. Potem velja, da je čas ustavljanja $\tau \in \{0, \ldots, T\}$ optimalen natanko takrat, ko velja:*

1. *ustavljena Snellova ovojnica $(U_t^\tau)_{t=0}^T$ je martingal,*
2. *$U_\tau = Z_\tau$.*

Dokaz. Naj velja $U_\tau = Z_\tau$ in naj bo ustavljena Snellova ovojnica $(U_t^\tau)_{t=0}^T$ martingal. Potem velja

$$U_0 = U_0^\tau = E_P(U_T^\tau|\mathcal{F}_0) = E_P(U_\tau|\mathcal{F}_0) = E_P(Z_\tau|\mathcal{F}_0).$$

Naprej po izreku 3 vemo, da je Snellova ovojnica slučajnega procesa $(Z_t)_{t=0}^T$ najmanjši supermartingal, ki dominira ta slučajni proces. Po Doobovem izreku potem velja, da je tudi ustavljena Snellova ovojnica $(U_t^\sigma)_{t=0}^T$ supermartingal za poljuben čas ustavljanja $\sigma \in S_{0,T}$. Sledi

$$E_P(Z_\sigma|\mathcal{F}_0) = E_P(Z_T^\sigma|\mathcal{F}_0) \leq E_P(U_T^\sigma|\mathcal{F}_o) \leq U_0^\sigma = U_0 = E_P(Z_\tau|\mathcal{F}_0).$$

Iz zgornje neenakosti sklepamo, da je $E_P(Z_\tau|\mathcal{F}_0) = \sup_{\sigma\in S_{0,T}} E_P(Z_\sigma|\mathcal{F}_0)$ in zato je τ res optimalen čas ustavljanja.

Za dokaz v obratni smeri si oglejmo čas ustavljanja τ' definiran s predpisom

$$\tau' = \inf(t \geq 0 | U_t = Z_t).$$

Za ustavljeni proces $(U_t^{\tau'})_{t=0}^T$ velja, da lahko razliko dveh zaporednih slučajnih spremenljivk ob upoštevanju (1) zapišemo kot

$$U_{t+1}^{\tau'} - U_t^{\tau'} = (U_{t+1} - U_t)\mathbb{1}_{\{t+1\leq\tau'\}}.$$

Naprej velja $U_t = \max(Z_t, E_P(U_{t+1}|\mathcal{F}_t))$, pri čemer vemo, da na množici dogodkov $\{t+1 \leq \tau'\}$ po definiciji velja $U_t > Z_t$. Na zgornji enakosti uporabimo pogojno matematično upanje in upoštevamo $U_t = E_P(U_{t+1}|\mathcal{F}_t)$. Tako dobimo izraz

$$E_P(U_{t+1}^{\tau'} - U_t^{\tau'}|\mathcal{F}_t) = \mathbb{1}_{\{t+1\leq\tau'\}} E_P((U_{t+1} - E_P(U_{t+1}|\mathcal{F}_t))|\mathcal{F}_t).$$

Pri tem smo še dodatno upoštevali $\{\tau' \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, iz česar sledi $\{\tau' \leq t\}^C = \{t+1 \leq \tau'\} \in \mathcal{F}_t$.

Očitno velja $E_P(U_{t+1}^{\tau'}|\mathcal{F}_t) = U_t^{\tau'}$, torej je ustavljena Snellova ovojnica martingal, iz česar sledi $U_0 = E_P(Z_{\tau'}|\mathcal{F}_0)$.

Po drugi strani velja, da je ustavljena Snellova ovojnica za poljuben čas ustavljanja $\tau'' \in S_{(0,T)}$ supermartingal. To sledi iz preprostega razmisleka, da dominacija slučajnega procesa $(X_i)_{i=0}^T$ nad procesom $(Y_i)_{i=0}^T$ implicira dominacijo ustavljenega procesa $(X_i^\tau)_{i=0}^T$ nad ustavljenim procesom $(Y_i^\tau)_{i=0}^T$ za poljuben čas ustavljanja τ. Velja torej

$$U_0 = U_0^{\tau''} \geq E_P(U_T^{\tau''}|\mathcal{F}_0) = E_P(U_{\tau''}|\mathcal{F}_0) \geq E_P(Z_{\tau''}|\mathcal{F}_0).$$

Sledi

$$U_0 = E_P(Z_{\tau'}|\mathcal{F}_0) = \sup_{\tau''\in S_{(0,T)}} E_P(Z_{\tau''}|\mathcal{F}_0), \tag{2}$$

kar potrjuje tudi optimalnost τ'.

Sedaj predpostavimo, da je τ poljuben optimalen čas ustavljanja. Po enakosti (2) velja

$$U_0 = E_P(Z_\tau|\mathcal{F}_0) \leq E_P(U_\tau|\mathcal{F}_0).$$

Iz supermartingalske lastnosti $(U_t)_{t=0}^T$ sledi

$$U_0 = U_0^\tau \geq E_P(U_t^\tau|\mathcal{F}_0) \geq E_P(U_\tau|\mathcal{F}_0).$$

Torej je

$$E_P(Z_\tau|\mathcal{F}_0) = E_P(U_\tau|\mathcal{F}_0)\ , \tag{3}$$

pri čemer je enakost zaradi končnosti slučajnih spremenljivk in relacije $U_\tau \geq Z_\tau$ mogoča le, če velja $U_\tau = Z_\tau$.

Naprej, za dokaz, da je $(U_t^\tau)_{t=0}^T$ martingal, izpeljemo

$$\begin{aligned} U_0 = U_0^\tau &\geq E_P(U_t^\tau|\mathcal{F}_0) \geq E_P(E_P(U_{t+1}^\tau|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_0) = E_P(U_{t+1}^\tau|\mathcal{F}_0) \\ &\geq E_P(E_P(U_T^\tau|\mathcal{F}_{t+1})|\mathcal{F}_0) = E_P(U_T^\tau|\mathcal{F}_0) = E_P(U_\tau|\mathcal{F}_0) = U_0\ , \end{aligned}$$

kjer smo upoštevali enakost (3) in supermartingalske lastnosti ustavljene Snellove ovojnice $(U_t^\tau)_{t=0}^T$. Ker smo neenakost navzgor in navzdol ocenili z vrednostjo U_0, lahko vse neenačaje zamenjamo z enačaji.

Oglejmo si enakost $E_P(U_t^\tau|\mathcal{F}_0) = E_P(E_P(U_{t+1}^\tau|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_0)$. Zaradi lastnosti supermartingala velja $U_t^\tau \geq E_P(U_{t+1}^\tau|\mathcal{F}_t)$ in slučajni spremenljivki sta končni. Torej je enakost mogoča le ob pogoju

$$U_t^\tau = E_P(U_{t+1}^\tau|\mathcal{F}_T)$$

in velja za vsak $t \in \{0, 1, 2, \ldots, T\}$. Ustavljena Snellova ovojnica $(U_t^\tau)_{t=0}^T$ je res martingal.

Trditev 5. *Najmanjši optimalni čas ustavljanja za prilagojen slučajni proces $(Z_t)_{t=0}^T$ je podan s predpisom*

$$\tau_{\min} = \begin{cases} \inf\{t;\ Z_t = U_t\}, & \{t;\ Z_t = U_t\} \neq \emptyset \\ T, & \{t;\ Z_t = U_t\} = \emptyset. \end{cases}$$

Pri tem je $(U_t)_{t=0}^T$ Snellova ovojnica slučajnega procesa $(Z_t)_{t=0}^T$.

Dokaz. Očitno velja, da je $\tau_{\min}$ čas ustavljanja, saj sta Z_t in U_t prilagojena, torej $Z_t, U_t \in \mathcal{F}_t$. Naprej razmislimo, da je $\tau_{\min}$ res optimalni čas ustavljanja. Po izreku **??**snellova ovojnica je dovolj dokazati, da velja enakost $U_{\tau_{\min}} = Z_{\tau_{\min}}$, kar sledi že iz same definicije. Dodatno velja, da je ustavljena Snellova ovojnica $(U_t^{\tau_{\min}})_{t=0}^T$ martingal, kar smo že utemeljili v dokazu izreka 3. Da gre res za najmanjši optimalni čas ustavljanja sledi iz dejstva, da je potreben pogoj za optimalnost $U_{\tau_{\min}} = Z_{\tau_{\min}}$, ki pa ni izpolnjen za noben $t < \tau_{\min}$.

3. Teorija optimalnega ustavljanja na zavarovalniških produktih z garancijo

Teorija optimalnega časa ustavljanja se uporablja na različnih področjih financ, kot so trgovanje z vrednostnimi papirji, določanje časa izvršitve opcij, upravljanje portfelja, ocenjevanje vrednosti sredstev, uravnavanje tveganj in podobno. V naslednjem poglavju se bomo podrobneje posvetili aplikaciji teorije na zavarovalniških produktih z garancijo.

3.1 Zavarovalniški produkti z garancijo

Zavarovalniški produkti z garancijo (GMxB produkti) so variabilna zavarovanja, pri katerih se zavarovanec lahko pred investicijskim tveganjem ali tveganjem prezgodnje smrti zavaruje z garantiranim minimalnim izplačilom oziroma garancijo. Glavni cilj takšnih produktov je zagotoviti investitorjem raven varnosti in zaščite pred izgubami, hkrati pa ohranjati možnost doseganja željene stopnje donosa. Pogosto so oblikovani kot kombinacija naložbenega sklada, ki ponuja potencial za rast, in zavarovalne komponente, ki omejuje izgube ali zagotavlja določen minimalni donos.

S takšnimi produkti zavarovalnice v zameno za višjo premijo prevzamejo večji del tveganja nase. V letih pred epidemijo COVID-19 je zanimanje za zavarovanja z garancijo močno naraslo, leta 2020 pa se je situacija spremenila. Zaradi povečane nestabilnosti na trgu so zavarovalnice utrpele prehudo izgubo, cene skladov so padale in GMxB produkti so bili ponekod spremenjeni ali umaknjeni iz ponudbe. Vseeno pa se v prihodnosti pričakuje ponoven porast njihove uporabe, saj gre za dinamične investicije, ki so varne in enostavne za uporabo. Poleg tega se produkti z garancijo uporabjajo tudi za namen pokojninskega varčevanja, zavarovalniški produkti pa so zaradi trenutnih demografskih razmer vedno bolj zaželjeni.

Vpeljimo pojem produkta z garancijo še bolj formalno, pri čemer se bomo v nadaljevanju osredotočili na produkte, ki se nanašajo na izplačilo zneska po koncu neke akumulacijske dobe. Naj bo P višina premije vplačane ob sklenitvi zavarovanja, $T \geq 0$ čas konca akumulacijske dobe in S_t vrednost zavarovančevega računa v času $t \in \{0, \dots, T\}$, ki je odvisna od razvoja sklada, v katerega je zavarovalnica investirala njegovo premijo P. Ob izteku akumulacijske dobe je investitorjevo izplačilo b enako večji vrednosti izmed trenutne vrednosti njegovega računa in neke vnaprej določene garantirane vrednosti (garancije) G

$$b = \max(S_T, G).$$

Strukture garancij G so zelo raznolike. Lahko so konstantne, odvisne od časa, gibanja portfelja, garantirane obrestne mere in podobno. V našem primeru se bomo za lažjo obravnavo osredotočili na eno obliko garancije, ki jo bomo predstavili kasneje. V nadaljevanju nas bo zanimalo, kakšna je optimalna strategija zavarovalnice, da bo lahko s prejeto premijo zagotovila garantirano izplačilo zavarovancu, hkrati pa utrpela čim manjšo izgubo.

3.2 Optimalni čas ustavljanja in binomski model trga

Preden se lahko lotimo iskanja strategije, je potrebno poudariti še nekaj predpostavk o trgu, na katerem bomo strategijo predstavili.

3.2.1 Binomski model

Binomski model je model v diskretnem času, pri katerem na trgu opazujemo dva finančna instrumenta: varčevalni račun in delnico. Vrednost varčevalnega računa v času $t \in \{0, \dots, T\}$ označimo z B_t in definiramo kot

$$B_0 = 1,$$
$$B_t = (1 + r)^t,$$

kjer je r konstantna obrestna mera. Vrednost delnice v času $t \in \{0, \dots, T\}$ označimo s S_t in je odvisna od razvoja trga. V vsakem trenutku se trg lahko razvije ugodno ali neugodno. Ob ugodnem razvoja trga se S_t pomnoži s faktorjem u, ob neugodnem razvoju trga pa s faktorjem d. Vrednost S_t v času t zato definiramo kot

$$S_0 = s,$$
$$S_t = S_{t-1} \cdot Z_{t-1},$$

kjer so $(Z_t)_{t\geq 0}$ Bernoullijeve slučajne spremenljivke, ki so neodvisne in porazdeljene kot

$$Z_t \backsim \begin{pmatrix} u & d \\ p & q \end{pmatrix}.$$

Verjetnost p predstavlja verjetnost ugodnega in $q = 1-p$ verjetnost neugodnega razvoja trga. Pogoj

$$d \leq (1+r) \leq u$$

je zadosten in potreben pogoj, da na trgu ni arbitraže, kar bomo v nadaljevanju predpostavili. Poleg tega je binomski trg poln finančni trg, kar pomeni, da je izplačilo finančnega instrumenta dosegljivo.

3.3 Vrednotenje opcij v binomskem modelu

Kot smo že omenili, bo v nadaljevanju predstavljena alternativna zaščitna strategija zavarovalnice za produkte z garancijo, ki bo temeljila na ustreznem času nakupa evropske prodajne opcije. V ta namen bomo evropske prodajne opcije podrobneje predstavili in opisali postopek njihovega vrednotenja.

Opcija je izveden finančni instrument, ki zagotavlja nosilcu (kupcu) opcije pravico do prodaje ali nakupa osnovnega premoženja po določeni izvršilni ceni K v zameno za plačano premijo.

Evropska opcija je vrsta opcije, ki jo lahko nosilec izvrši le ob nekem vnaprej določenem času zapadlosti T. Evropska prodajnja opcija nosilcu ob času T omogoča, da enoto osnovnega premoženja (v našem primeru sklada ali delnice) z vrednostjo S_T proda po izvršilni ceni K, pri tem pa je njegovo izplačilo enako

$$X = \max(K - S_T, 0).$$

Zanima nas, kako naj pravično določimo ceno opcije v binomskem modelu. Omenili smo že, da je binomski model poln, torej lahko izplačilo evropske prodajne opcije X repliciramo z ustrezno strategijo samofinanciranja. Vrednosti te strategije v času označimo s slučajnim procesom $(V_t)_{t=0}^T$, za katerega velja $V_T = X$ z verjetnostjo 1. Če imamo v poljubnem trenutku t v lasti sredstva v višini V_t, lahko zagotovo do časa zapadlosti opcije proizvedemo sredstva v višini njenega izplačila. Torej mora veljati, da je cena opcije enaka V_t za vsak $t \in \{0, \ldots, T\}$. V nasprotnem primeru bi lahko na trgu dosegli arbitražo, kar se ne sklada z našimi predpostavkami.

Da bomo izračunali pošteno ceno opcije, moramo določiti le še vrednosti strategije samofinanciranja $(V_t)_{t=0}^T$, kar izvedemo rekurzivno z binomskim algoritmom:

$$V_T = X,$$
$$V_t = \frac{1}{1+r} E_Q(V_{t+1}|V_t) = \frac{1}{1+r}(q_u V_{t+1}^u + q_d V_{t+1}^d).$$

Pri tem V_{t+1}^u označuje vrednost strategije v času $t+1$, pri čemer je bil razvoj trga od časa t do $t+1$ ugoden, in V_{t+1}^d vrednost, ko je bil razvoj neugoden. Oznaki q_u in q_d predstavljata enolično določeni martingalski verjetnosti definirani kot

$$q_u = \frac{1+r-d}{u-d},$$
$$q_d = \frac{u-1-r}{u-d}.$$

Ustreznost algoritma lahko utemeljimo z indukcijo tako, da se pomikamo iz časa T proti času 0. Prva enakost je očitna. Druga enakost izvira iz dejstva, da mora na trgu za neobstoj arbitraže veljati $V_t = \frac{1}{1+r} E_Q(V_{t+1}|V_t)$. Ob upoštevanju opisanih oznak je to enako zapisu $\frac{1}{1+r}(q_u V_{t+1}^u + q_d V_{t+1}^d)$.

Opomba 2. Martingalskim verjetnostim in njihovi enoličnosti se v članku ne bomo posebej posvečali, več o tem si lahko preberete v [1].

3.3.1 Snellova ovojnica na binomskem modelu

Binomski model za čas $t \in \{0, 1, 2, \ldots, T\}$ lahko ponazorimo s korenskim drevesom $D = (V, E)$ z globino T, pri čemer množica vozlišč predstavlja možna stanja trga skozi čas, množica povezav pa prehode med temi stanji obtežene z ustreznimi verjetnostmi. Recimo, da na trgu opazujemo gibanje nekega slučajnega procesa $(X_t)_{t=1}^T$, ki predstavlja naključni sprehod po binomskem drevesu. Njegovo vrednost za vsak t predstavimo kot $Y_t = f(X_t)$, pri čemer je $f : V \to \mathbb{R}$ funkcija, ki vsakemu vozlišču priredi pripadajočo vrednost slučajnega procesa $(X_t)_{t=0}^T$. Ta je enaka vrednosti, ki jo slučajni proces zavzame ob času t in stanju trga, ki ga to vozlišče ponazarja. Če torej slučajni proces v neki točki zaustavimo, je naša korist enaka vrednosti vozlišča, v katerem se nahajamo. Definiramo diskontirani slučajni proces

$$\overline{Y_t} = (1 + r)^{-t} Y_t$$

za $t \in \{0, \ldots, T\}$, za katerega iščemo optimalni čas ustavljanja. Zanima nas torej čas ustavljanja τ, ko bo pričakovana vrednost $E((1 + r)^{-t} Y_\tau)$ maksimalna. Problem lahko rešimo z uporabo trditve **??**th:minimalni cas ustavljanja, torej proces zaustavimo v prvem trenutku, ko je njegova vrednost večja ali enaka pričakovani vrednosti v prihodnosti ($U_\tau = \overline{Y_\tau}$).

Zgled 1. Recimo, da na binomskem modelu trga s parametri $T = 3,\ p = 0.45,\ q = 0.55,\ r = 0.05,$ $u = 1.3$ in $d = 0.8$ opazujemo gibanje vrednosti izvedenega finančnega instrumenta. Problem ponazorimo z binomskim drevesom, kjer slučajni proces $(\overline{Y_t})_{t=0}^T$ predstavlja diskontirane vrednosti izvedenega finančnega instrumenta v vozliščih. Zanima nas obnašanje Snellove ovojnice za opazovani slučajni proces.

Za izračun uporabljamo martingalsko verjetnost, ki jo določimo po zgoraj omenjenih formulah

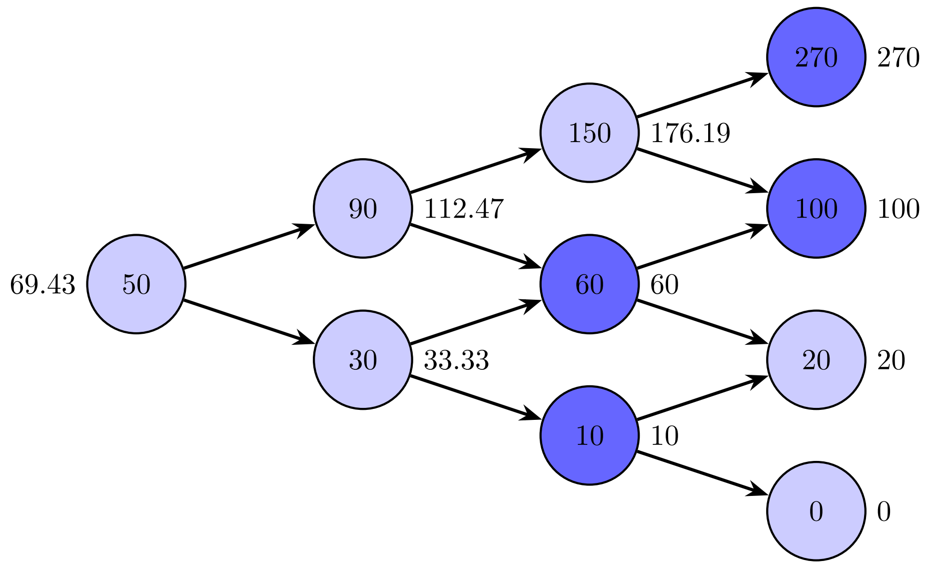
$$\begin{aligned} q_u &= \frac{1 + r - d}{u - d} = 0.5, \\ q_d &= \frac{u - 1 - r}{u - d} = 0.5. \end{aligned}$$

Snellovo ovojnico nato določimo rekurzivno od časa T ($U_T = \overline{Y_T}$) do časa 0. Vrednosti v vozliščih na grafu predstavljajo vrednosti slučajnega procesa $(\overline{Y_t})_{t=0}^T$, vrednosti Snellove ovojnice pa so zapisane ob njih.

Proces zaustavimo, ko naletimo na prvi optimalni čas ustavljanja. To se zgodi v vozliščih, ko je Snellova ovojnica enaka vrednosti finančnega instrumenta (glej temno modra vozlišča na sliki **??**fig:M1). Vidimo, da se v primeru dvojnega ugodnega razvoja trga splača z izplačilom čakati do časa T, medtem ko v vseh drugih primerih proces zaustavimo že korak pred koncem.

3.4 Strategija z optimalnimi preskoki

Ob naložbenih produktih z garancijo vezanimi na akumulacijsko dobo mora zavarovalnica zagotoviti minimalno garantirano izplačilo ob izteku nekega časovnega obdobja. S pomočjo teorije optimalnega časa ustavljanja bi radi poiskali strategijo, ki bi zavarovalnici zagotavljala ustrezno količino sredstev za izplačilo zavarovanca, hkrati pa bi minimizirala njeno izgubo. Predpostavimo, da opazujemo gibanje nekega vzajemnega sklada $(S_t)_{t=0}^T$ na binomskem modelu trga s konstantno obrestno mero r, verjetnostjo ugodnega razvoja trga p in faktorjema u ter d. Verjetnost p je določena s strani zavarovalnice in se lahko razlikuje od martingalske verjetnosti. Zavarovalnice namreč dogajanje na trgu pogosto ocenjujejo bolj previdno, z manjšo verjetnostjo ugodnega razvoja. Predpostavimo, da velja že omenjena neenakost $d < (1 + r) < u$, ki zagotavlja, da na trgu ni arbitraže. Naj velja, da m ljudi sklene naložbeno zavarovanje z garancijo G in koncem akumulacijske dobe T. Vsak



Slika 1. Uporaba Snellove ovojnice za ugotavljanje optimalnega časa ustavljanja na binomskem drevesu.

zavarovanec ob nakupu produkta plača enkratno premijo, s katero zavarovalnica kupi enoto sklada, torej ima skupno v lasti m enot. Ob izteku akumulacijske dobe je tako zavarovancu zagotovljeno izplačilo

$$b = \max(G, (1-c)S_T),$$

pri čemer c predstavlja delež vrednosti sklada, ki pripada zavarovalnici ob ugodnem gibanju trga. Kot smo že omenili, so lahko garancije zelo raznolike, v našem primeru pa se bomo osredotočili na konstantno garancijo, ki jo bomo definirali kot $G = (1+r)^T S_0$.

V nadaljevanju bomo predstavili stategijo s preskokom, ki temelji na določanju optimalnega časa za nakup evropske prodajne opcije in jo primerjali s strategijo Δ-varovanja. V teoriji bomo rezultat predstavili s porazdelitvijo končne izgube označene z L, za nazornejši prikaz pa bomo omenili še preprosto simulacijo.

Strategija Δ-varovanja je strategija brez uporabe izvedenih finančnih instrumentov, ki v vsakem trenutku od zavarovalnice zahteva zadostna sredstva za pokritja razlike med trenutno vrednostjo sklada in sedanjo vrednostjo garantiranih izplačil. Torej mora zavarovalnica za vsak čas t skupno zagotoviti sredstva v višini

$$\Delta_t = \max\left(m\frac{1}{(1+r)^{T-t}}(1+r)^T S_0 - S_t, 0\right) = \max\left(m(1+r)^T S_0 - S_t, 0\right),$$

kjer je m število zavarovancev. Končna izguba zavarovalnice za Δ-zavarovanje je ob času T

$$L = \begin{cases} m(1+r)^T S_0 - mS_T\ ; & (1+r)^T S_0 \geq (1-c)S_T \\ -mcS_T\ ; & (1+r)^T S_0 \leq (1-c)S_T, \end{cases}$$

pri čemer negativna vrednost predstavlja dobiček. Končna izguba je, ob upoštevanju vseh predpostavk, enaka za vsako strategijo, kjer ne uporabljamo izvedenih finančnih instrumentov.

Naš glavni predmet zanimanja je alternativna strategija s preskoki. Ideja temelji na dejstvu, da zavarovalnica v nekem trenutku preskoči iz Δ-varovanja na varovanje z evropsko prodajno opcijo. V nadaljevanju privzamemo, da so na trgu v vsakem trenutku na voljo prodajne opcije s poljubnimi izvršnimi cenami in poljubnimi ročnostmi. Glavna ideja temelji na iskanju optimalnega časa nakupa m evropskih prodajnih opcij s časom zapadlosti T in izvršilno ceno $K = (1+r)^T S_0$. Vrednost posamezne opcije je torej ob času T enaka

$$X = \max(K - S_T, 0) = \max(b - S_T, 0).$$

Druga enakost sledi iz definicije b

$$\begin{aligned}
\max(b - S_T, 0) &= \begin{cases} \max((1+r)^T S_0 - S_T, 0)\ ; & (1+r)^T S_0 \geq (1-c) S_T \\ \max((1-c) S_T - S_T, 0)\ ; & (1+r)^T S_0 \leq (1-c) S_T \end{cases} \\
&= \begin{cases} \max(K - S_T, 0)\ ; & (1+r)^T S_0 \geq (1-c) S_T \\ 0\ ; & (1+r)^T S_0 \leq (1-c) S_T \end{cases} \\
&= \begin{cases} \max(K - S_T, 0)\ ; & (1+r)^T S_0 \geq (1-c) S_T \\ \max(K - S_T, 0)\ ; & (1+r)^T S_0 \leq (1-c) S_T \end{cases} \\
&= \max(K - S_T, 0).
\end{aligned} \tag{4}$$

Z M_t označimo skupno ceno m opcij v času t. V T je torej $M_T = \max(mb - mS_T, 0)$, za ostale čase $t \in 0, \ldots, T-1$ pa skupno ceno izračunamo rekurzivno z uporabo martingalskih verjetnosti, kot je opisano v **??**sec:vrednotenje opcij . Očitno je, da se lahko zavarovalnica ustrezno zaščiti že z nakupom m opcij v času $t = 0$, saj si s tem zagotovi zadostno količino sredstev za izplačilo obveznosti. Zanima nas, ob katerem času nakupa bo pričakovana izguba zavarovalnice čim manjša, torej iščemo optimalni čas preskoka.

Naj bo L_t slučajna spremenljivka, ki predstavlja diskontirani primankljaj zavarovalnice ob času t brez uporabe izvedenih finančnih instrumentov. Primankljaj opazujemo kot pozitivno izgubo, pri čemer nas dobiček zavarovalnice ne zanima. Zato L_t definiramo kot

$$L_t = \max\left(\frac{1}{(1+r)^{T-t}}(mb - mS_T), 0\right),$$

kar je po razmisleku (**??**eq:enakost) enako

$$L_t = \max\left(\frac{1}{(1+r)^{T-t}}(m(1+r)^T S_0 - mS_T), 0\right).$$

Če slučajno spremenljivko pogojimo na $\mathcal{F}_t$ in vpeljemo novo binomsko slučajno spremenljivko $Y \mapsto Bin(T-t, p)$, je njena porazdelitev enaka porazdelitvi

$$L_t^* = \max\left(\frac{1}{(1+r)^{T-t}}(m(1+r)^T S_0 - mS_0 u^{k+Y} d^{(t-k)+T-t-Y}), 0\right).$$

Pogojevanje na $\mathcal{F}_t$ nam namreč zagotovi poznavanje razvoja trga do časa t. Parameter k je število ugodnih razvojev do časa t, parameter $t-k$ pa število neugodnih razvojev. Vrednost $S_t = S_0 u^k d^{t-k}$ je torej neko znano realno število.

Na tem mestu je ključno poudariti, da bi bila z upoštevanjem martingalske verjetnosti pričakovana izguba zavarovalnice vedno enaka ceni ustreznega izvedenega finančnega instrumenta, ki izravna tveganje. Pri sprejemnaju odločitev pa izračuni zavarovalnice pogosto ne temeljijo na tej verjetnosti, pač pa zavarovalnica upošteva lastno ekspertno oceno. Ta je odvisna od analize tveganj, ekonomskih in političnih dejavnikov, ocene tržnih razmer ter izbire strategije, pri čemer nižja ocena verjetnosti pogosto nakazuje bolj previdno in preudarno obnašanje zavarovalnice, višja pa bolj agresivno in tveganju naklonjeno obnašanje.

V naslednjem koraku tako izračunamo pogojno pričakovano vrednost primankljaja glede na verjetnosti P, ki je določena s strani zavarovalnice:

$$E_P(L_t^*) = \frac{1}{(1+r)^{T-t}} \sum_{y=0}^{T-t} \max((m(1+r)^T S_0 - mS_0 u^{k+y} d^{T-k-y}), 0) \binom{T-t}{y} p^y (1-p)^{T-t-y}.$$

Doslej smo definirali vse ustrezne pojme, potrebujemo le še kriterij, ki bo odločil o času nakupa opcije. Snellova ovojnica nam služi kot orodje iskanja optimalnega časa za ustavitev nekega slučajnega procesa, ki maksimizira njegovo pričakovano vrednost. Tako je smiselno opazovani slučajni proces definirati kot razliko med pričakovano izgubo in ceno opcije, pri čemer nas zanima trenutek, v katerem je njuna razlika čim večja. Slučajno spremenljivko Z_t torej definiramo kot diskontirano razliko

$$Z_t = \frac{1}{(1+r)^t}(E_P(L_t^*) - M_t)$$

za $t \in \{0, \dots, T\}$ in z $(U_t)_{t=0}^T$ označimo njegovo Snellovo ovojnico. S trditvijo 2 lahko sedaj določimo najmanši čas ustavljanja τ, za katerega je sedanja pričakovana vrednost razlike med pričakovano vrednostjo primankljaja in ceno opcij $(E_P(Z_t))$ maksimalna.

Končna izguba zavarovalnice za strategijo s preskokom je ob času T enaka

$$L = \begin{cases} M_\tau\ ; & (1+r)^T S_0 \geq (1-c)S_T \\ M_\tau - mcS_T\ ; & (1+r)^T S_0 \leq (1-c)S_T. \end{cases}$$

3.5 Simulacija

Zgoraj smo prikazali, kakšna je razporeditev končne izgube za zavarovalnico v obeh primerih, sedaj pa bomo za lažje razumevanje učinka strategij prikazali simulacijo na točno določenih parametrih. Prikazani rezultati simulacije so bili navedeni v doktorski nalogi [2], sama te rezultate povzamem v tabeli **??**tab:simulacija s preskokom.

V simulaciji so uporabljene vrednosti parametrov, podane v tabeli **??**tab:parametri.

p	u	d	r	T	S_0	c	m
0.49	1.05	0.98	0.015	30	1	0.1	1000

Tabela 1. Določene vrednosti parametrov

Simulacija služi kot odličen prikaz učinka obeh strategij na pričakovano vrednost in standardni odklon izgube. Simulacija je bila ponovljena $n = 10^6$-krat, skupni rezultati pa so prikazani v tabeli **??**tab:simulacija s preskokom.

	Δ-varovanje	Strategija s preskokom
Pričakovana vrednost	73.53	-49.16
Standardni odklon	221.57	84.35

Tabela 2. Pričakovana vrednost in standardni odklon obeh strategij za določene vrednosti parametre

Vidimo, da strategija s preskokom kaže veliko boljšo pričakovano vrednost izgube, poleg tega pa so rezultati tudi bolj stabilni.

Z enakimi parametri smo simulacijo izvedli še za strategijo, kjer m ustreznih opcij kupimo že ob času $t = 0$. Kot smo omenili že zgoraj, se s tem ustrezno zaščitimo, ampak ne minimiziramo pričakovane izgube, kar kažejo tudi rezultati v tabeli **??**tab:simulacija nakupa na zacetku

	Strategija z nakupom opcij ob času $t = 0$
Pričakovana vrednost	44.49
Standardni odklon	73.28

Tabela 3. Pričakovana vrednost in standardni odklon strategije nakupa opcij ob času $t = 0$

4. Zaključek

V članku smo predstavili teorijo optimalnega ustavljanja in jo uporabili za iskanje ustrezne zaščitne strategije zavarovalnice pri produktih z garancijo. V drugem poglavju smo predstavili matematični okvir problema, definicijo optimalnega časa ustavljanja, koncept Snellove ovojnice ter zadosten in potreben pogoj za iskanje najmanjšega optimalnega časa ustavljanja. Glavno zanimanje članka je bilo usmerjeno v zavarovalniške produkte z garancijo, pri čemer smo želeli poiskati ustrezno zaščitno strategijo za zavarovalnico s čim manjšo pričakovano izgubo. Na binomskem modelu trga brez arbitraže smo opazovali m ljudi z enakimi pogodbami, ki so imele enako zapadlost in garantirano izplačilo. Skonstruirali smo strategijo s preskokom, ki določi optimalni čas menjave strategije Δ-varovanja za varovanje z evropskimi prodajnimi opcijami. Pri tem smo opazovali slučajni proces, ki je prikazoval razliko med pričakovano vrednostjo izgube ter ceno m opcij. Zanj smo s povratno indukcijo definirali Snellovo ovojnico in poiskali minimalni optimalni čas ustavljanja. Opisano strategijo smo primerjali s strategijo Δ-varovanja, najprej le v teoriji preko porazdelitve izgube, nato pa še s simulacijo. Ta je pokazala opazno razliko v prid strategiji s preskoki, pri čemer se je ta izkazala tudi za mnogo bolj stabilno. Preizkusili smo tudi, kakšne rezultate dobimo, če zavarovalnica kupi delnice v času $t = 0$, kjer smo dobili podoben odklon kot pri strategiji s preskokom, razlika pa je opazna v povečani pričakovani izgubi.

Članek prikazuje preprost vpogled v uporabo diskretnega časa ustavljanja v zavarovalništvu. Model bi lahko posplošili na bolj kompleksne scenarije, recimo na anuitetno vplačilo premij ali drugačne oblike garancij, lahko bi vanj vpeljali smrtnost in tako dalje. Vseeno pa so predstavljene ugotovitve uporabne, saj bi se strategija ob nekaj prilagoditvah lahko uporabljala v praksi.

5. Viri

LITERATURA

[1] D. Lamberton, B. Lapeyre, *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance* (Chapman & Hall, 1996), p. 1-25.

[2] A. Zalokar (2018), *Optimalno upravljanje s tveganji pri naložbenih zavarovanjih z garancijami* [Doktorska disertacija, Univerza na primorskem, fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije], p. 13-42, Repozitorij Univerze na Primorskem - RUP.

[3] Y. S. Chow, H. Robbins, D. Siegmund, *The Theory of Optimal Stopping*, (Dover Publications, 1991).