KOPULE IN ASIMETRIJA PAROV SLUČAJNIH SPREMENLJIVK

TILEN HUMAR

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Kopule so v zadnjem času postale uporabne predvsem za proučevanje odvisnosti in korelacije slučajnih spremenljivk, dodatno pa omogočajo tudi modeliranje porazdelitev slučajnih vektorjev preko ocen za njihove robne porazdelitve. V tem članku so predstavljeni osnovni koncepti teorije kopul, nato pa je vpeljan tudi pojem asimetrije parov slučajnih spremenljivk. V zadnjem delu sledi še obravnava različnih razredov kopul glede na pripadajočo zgornjo mejo asimetrije.

COPULAS AND ASYMMETRY OF PAIRS OF RANDOM VARIABLES

Recently copulas have become useful mainly for the study of the dependence and correlation of random variables, but additionally they allow for modelling of distributions of random vectors via estimates for their marginal distributions. In this article, the basic concepts of Copula theory are summarised, followed by the introduction of the notion of asymmetry of pairs of random variables. In the final part, different classes of copulas are examined according to their upper limit of asymmetry.

1. Uvod

Beseda kopula izhaja iz latinščine in pomeni „povezava” oziroma „vez”, s čimer je izražen pomen tega matematičnega objekta, saj so kopule funkcije, ki povezujejo porazdelitve večrazsežnih slučajnih vektorjev z njihovimi enodimenzionalnimi robnimi porazdelitvami. V zadnjih letih se uporabljajo predvsem za proučevanje odvisnosti in korelacije slučajnih spremenljivk, dodatno pa zaradi svoje vloge vezi omogočajo modeliranje porazdelitev slučajnih vektorjev preko ocen za njihove robne porazdelitve. Kopule in študij le-teh imajo tako pomembno vlogo na različnih področjih, kot so ekonomija, statistika in kvantitativne finance, posebej uporabne pa so za modeliranje tveganj in pri portfeljski optimizaciji. Vredno je omeniti, da je študij kopul razmeroma mlad in vsebuje še mnogo odprtih vprašanj.

V članku se bomo omejili samo na študij parov slučajnih spremenljivk in posledično dvodimenzionalnih kopul, potrebno pa je dodati, da je celotno področje kopul možno razširiti na več (poljubno mnogo) dimenzij, pri čemer pa težavnost z večanjem dimenzij precej naraste.

Članek je razdeljen na dva dela. V prvem so predstavljene kopule in njihove glavne značilnosti, nato pa se osredotočimo na pojem asimetrije slučajnih spremenljivk in obravnavamo različne razrede kopul glede na pripadajočo zgornjo mejo asimetrije. Bolj podrobno so v članku podane zgornje meje asimetrije za kvadrantno odvisne, semilinearne ter stohastično padajoče kopule.

Z namenom lažje predstave novega pojma si v zaključku uvoda poglejmo še enostaven zgled kopule.

Zgled 1. Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki, porazdeljeni v skladu s porazdelitvenima funkcijama F in G. Velja torej $F(x) = P(X \leq x)$ in $G(y) = P(Y \leq y)$. Radi bi poiskali kakšno povezavo C med porazdelitveno funkcijo slučajnega vektorja (X, Y) in njegovima komponentama X ter Y.

Ideja je, da porazdelitev slučajnega vektorja poizkusimo zapisati s porazdelitvama slučajnih spremenljivk. Tako najprej po definiciji navedemo porazdelitveno funkcijo H slučajnega vektorja in upoštevamo neodvisnost slučajnih spremenljivk. Hitro dobimo naslednje

$$H(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y) = F(x)G(y) = C(F(x), G(y)).$$

Iskana vez oziroma kopula je torej funkcija $(x, y) \mapsto xy$, ki jo označimo s črko C.

2. Kopule in njihove osnove lastnosti

Za pravo definicijo kopul najprej potrebujemo dve splošni lastnosti dvorazsežnih funkcij. Še prej pa se domenimo, da $\mathbb{R}$ označuje običajno realno os $(-\infty, \infty)$, $\overline{\mathbb{R}}$ razširjeno realno os $[-\infty, \infty]$, $\mathbb{I}$ pa zaprti interval $[0, 1]$.

Prvi pojem, ki ga bomo spoznali, je 2-naraščanje. To lastnost lahko razumemo kot posplošitev naraščanja funkcij ene spremenljivke na dve dimenziji.

Definicija 1. Naj bosta S_1 in S_2 neprazni podmnožici $\overline{\mathbb{R}}$ in naj bo $A = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ pravokotnik, ki ima vsa oglišča v množici $S_1 \times S_2$. Dalje naj bo H funkcija dveh spremenljivk z definicijskim območjem $D_H = S_1 \times S_2$. *H-prostornina pravokotnika* A je definirana z izrazom

$$V_H(A) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1).$$

Funkcija H je *2-naraščajoča*, če je H-prostornina pravokotnika A nenegativna za vsak pravokotnik A z oglišči v D_H.

Druga temeljna lastnost kopul je prizemljenost. Definirajmo še ta pojem, pri čemer so predpostavke glede definicijskega območja enake tistim v definiciji 1.

Definicija 2. Naj obstajata vsaj en $a_1 \in S_1$ in vsaj en $a_2 \in S_2$. Funkcija H je *prizemljena*, če za vse pare $(x, y) \in S_1 \times S_2$ velja $H(x, a_2) = 0 = H(a_1, y)$.

Preden se zares posvetimo kopulam, navedimo še eno lemo, ki 2-naraščajočim, prizemljenim funkcijam zagotavlja posebno lepo lastnost, ki bo v nadaljevanju v veliko pomoč.

Lema 1. *Naj bo funkcija dveh spremenljivk H 2-naraščajoča in prizemljena. Potem je H nepadajoča v vsakem argumentu. Torej za vsak $x \in S_1$ in $y \in S_2$ velja*

$$H(x, y) \leq H(p, y) \text{ za vse } p \geq x \text{ iz } S_1,$$

$$H(x, y) \leq H(x, q) \text{ za vse } q \geq y \text{ iz } S_2.$$

Dokaz. Vzemimo funkcijo dveh spremenljivk H z domeno $D_H = S_1 \times S_2$. Naj bosta x_1 in x_2 elementa S_1 ter y_1 in y_2 elementa S_2, pri čemer je $x_1 \leq x_2$ in $y_1 \leq y_2$.

Po definiciji 2-naraščanja funkcije H velja

$$H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) \geq H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1).$$

Zdaj upoštevamo še prizemljenost funkcije H, tako da za x_1 oziroma y_1 izberemo tista elementa iz S_1 oziroma S_2, v katerih je vrednost funkcije enaka 0. Če izberemo $x_1 = a_1$, dobimo

$$H(x_2, y_2) \geq H(x_2, y_1),$$

za $y_1 \leq y_2$. Če pa izberemo $y_1 = a_2$, dobimo

$$H(x_2, y_2) \geq H(x_1, y_2),$$

za $x_1 \leq x_2$. ∎

Zdaj smo pripravljeni za definicijo kopul, ki jih bomo razumeli kot poseben razred prizemljenih 2-naraščajočih funkcij.

Definicija 3. *Dvodimenzionalna kopula* je funkcija C z lastnostmi:

1. $D_C = \mathbb{I}^2$.

2. C je 2-naraščajoča in prizemljena.

3. Za vsak u, v iz $\mathbb{I}$ velja
$$C(u,1) = u \text{ ter } C(1,v) = v.$$

Opomba 1. Prizemljenost za kopule pomeni $C(u,0) = C(0,v) = 0$ za vse $u, v \in \mathbb{I}$. Tako za vsako točko (u,v) v $\mathbb{I}^2$ velja $0 \leq C(u,v) \leq 1$, zato je zaloga vrednosti Z_C prav tako podmnožica $\mathbb{I}$.

Zdaj ko vemo, kaj kopule sploh so, se posvetimo še nekaterim njihovim lastnostim. Začnimo z izrekom, ki kopulam določa najboljšo spodnjo in zgornjo mejo.

Izrek 2 (Omejenost kopul). *Naj bo C kopula. Potem za vsak par (u,v) v enotskem kvadratu $\mathbb{I}^2$ velja*
$$W(u,v) \leq C(u,v) \leq M(u,v),$$
kjer je $W = \max\{u+v-1, 0\}$ in $M = \min\{u,v\}$.

Funkciji W in M sta prav tako kopuli, imenujemo pa ju Fréchet-Hoeffdingova spodnja in zgornja meja.

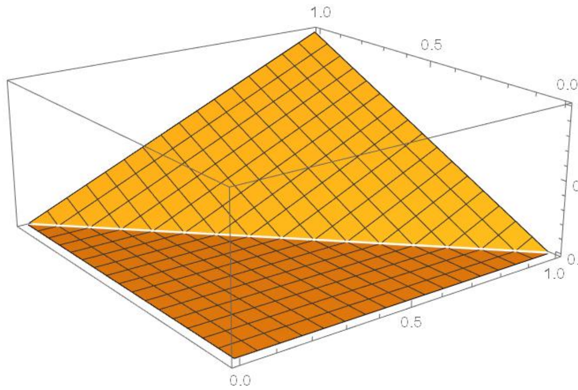
Dokaz. Po definiciji kopul si pri dokazu lahko pomagamo z lemo 1. Za dokaz zgornje meje poglejmo vrednost kopule v poljubni točki (u,v) na enotskem kvadratu. Zaradi nepadanja v drugem argumentu velja
$$C(u,v) \leq C(u,1) = u.$$
Analogno dobimo še
$$C(u,v) \leq C(1,v) = v,$$
iz česar res sledi desna neenakost v izreku.

Za dokaz spodnje meje upoštevamo 2-naraščanje kopul. Za vsaka u, v iz $\mathbb{I}$ velja
$$V_C([u,1] \times [v,1]) \geq 0,$$
zato
$$\begin{aligned} & C(1,1) - C(1,v) - C(u,1) + C(u,v) \geq 0 \\ \iff & 1 - v - u + C(u,v) \geq 0 \\ \iff & C(u,v) \geq u + v - 1, \end{aligned}$$
kar skupaj z upoštevanjem zaloge vrednosti kopul da še levo neenakost. ■

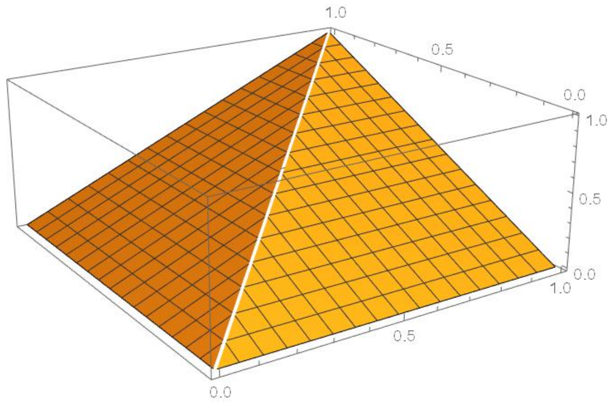
V članku bomo posebej izpostavili tri kopule. Poleg že omenjenih Fréchet-Hoeffdingovih mej omenimo še produktno kopulo Π, s predpisom $\Pi(u,v) = uv$, ki smo jo srečali že v uvodnem zgledu. Grafi naštetih kopul so prikazani na slikah 1, 2 ter 3.

Naslednja lastnost kopul, ki nas zanima, so njihovi prerezi. Ti nam bodo v nadaljevanju pomagali pri karakterizaciji različnih razredov kopul.

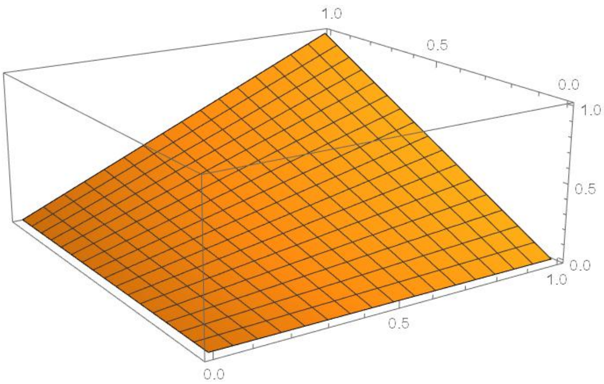
Definicija 4. Naj bo C kopula in a poljubno število v $\mathbb{I}$.
Vodoravni prerez kopule C pri a je funkcija, ki slika iz $\mathbb{I}$ v $\mathbb{I}$, dana s predpisom $t \mapsto C(t,a)$.
Navpični prerez kopule C pri a je funkcija, ki slika iz $\mathbb{I}$ v $\mathbb{I}$, dana s predpisom $t \mapsto C(a,t)$.
Diagonalni prerez kopule C je funkcija δ_C, ki slika iz $\mathbb{I}$ v $\mathbb{I}$, dana s predpisom $t \mapsto C(t,t)$.



Slika 1. Graf kopule W.



Slika 2. Graf kopule M.



Slika 3. Graf kopule Π.

3. Sklarov izrek

Najpomembnejši rezultat v teoriji kopul, na katerem temelji njihova uporabnost v statistiki, je Sklarov izrek. Z njim je prikazana prej omenjena vloga vezi, ki jo kopule igrajo med večrazsežnimi slučajnimi vektorji in njihovimi enorazsežnimi robnimi porazdelitvami.

Najprej se spomnimo definicij eno- in dvorazsežne porazdelitvene funkcije, potem pa se bomo posvetili Sklarovemu izreku in njegovim posledicam. Samega izreka zaradi zahtevnosti ne bomo dokazovali. Podroben dokaz je podan v knjigi [1].

Definicija 5. *Porazdelitvena funkcija* je funkcija F z definicijskim območjem $D_F = \overline{\mathbb{R}}$, za katero velja:

1. F je nepadajoča.
2. $F(-\infty) = 0$ in $F(\infty) = 1$.

Definicija 6. *Dvorazsežna porazdelitvena funkcija* je funkcija H z definicijskim območjem $D_H = \overline{\mathbb{R}}^2$, za katero velja:

1. H je 2-naraščajoča.
2. $H(x, -\infty) = H(-\infty, y) = 0$ za vsaka x, y iz $\overline{\mathbb{R}}$ ter $H(\infty, \infty) = 1$.

Dalje ima H *robni porazdelitvi* F in G, definirani s predpisoma $F(x) = H(x, \infty)$ in $G(y) = H(\infty, y)$, ki sta prav tako porazdelitveni funkciji.

Izrek 3 (Sklarov izrek). *Naj bo H dvorazsežna porazdelitvena funkcija z robnima porazdelitvama F in G. Potem obstaja taka kopula C, da za vse x, y v $\overline{\mathbb{R}}$ velja*

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)).$$

Dalje, če sta F in G zvezni, je C enolično določena, sicer je enolično določena na množici $Z_F \times Z_G$.

Obratno, če je C kopula ter sta F in G porazdelitveni funkciji, potem je funkcija H, definirana z zgornjo enakostjo, dvorazsežna porazdelitvena funkcija z robnima porazdelitvama F in G.

Posledica 4. *S primerno razširitvijo definicijskega območja na $\overline{\mathbb{R}}^2$ je vsaka kopula dvorazsežna porazdelitvena funkcija, ki ima robne porazdelitve porazdeljene enakomerno na $\mathbb{I}$.*

Poglejmo si to podrobneje. Recimo, da je C kopula. Definirajmo funkcijo H_C z definicijskim območjem $\overline{\mathbb{R}}^2$ in predpisom

$$H_C(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ ali } y < 0, \\ C(x, y), & (x, y) \in \mathbb{I}^2, \\ x, & y > 1, x \in \mathbb{I}, \\ y, & x > 1, y \in \mathbb{I}, \\ 1, & x > 1 \text{ in } y > 1. \end{cases}$$

Enostavno lahko pokažemo, da je H_C res dvorazsežna porazdelitvena funkcija, ki ima robni porazdelitvi očitno porazdeljeni enakomerno na $\mathbb{I}$. Tako lahko kopule razumemo tudi kot skrčitve dvorazsežnih porazdelitvenih funkcij z robnima porazdelitvama $U_{[0,1]}$ na $\mathbb{I}^2$.

Na tem mestu lahko v dosedanji študij kopul vpeljemo pojem slučajnih spremenljivk, kjer lete razumemo kot neko količino, katere vrednosti določa kakšna porazdelitvena funkcija. Najprej definirajmo porazdelitveno funkcijo dvorazsežnega slučajnega vektorja.

Definicija 7. *Porazdelitvena funkcija dvorazsežnega slučajnega vektorja* (X, Y) je funkcija H, podana s predpisom

$$H(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y),$$

kjer sta X in Y slučajni spremenljivki.

Opomba 2. Hitro lahko pokažemo, da je porazdelitvena funkcija dvorazsežnega slučajnega vektorja (X, Y) 2-naraščajoča. Za poljubne x_1, x_2, y_1, y_2 iz $\overline{\mathbb{R}}$, kjer je $x_1 \leq x_2$ ter $y_1 \leq y_2$, velja

$$\begin{aligned} &H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1) \\ &= P(X \leq x_2, Y \leq y_2) - P(X \leq x_1, Y \leq y_2) - P(X \leq x_2, Y \leq y_1) + P(X \leq x_1, Y \leq y_1) \\ &= P(x_1 < X \leq x_2, Y \leq y_2) - P(x_1 < X \leq x_2, Y \leq y_1) \\ &= P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2), \end{aligned}$$

kar je res nenegativno.

Navedemo lahko novo obliko Sklarovega izreka.

Izrek 5 (Sklarov izrek). *Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki z danima porazdelitvenima funkcijama F in G ter naj bo H porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja (X, Y). Potem obstaja kopula C, da velja*

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)).$$

Dalje, če sta F in G zvezni, je C enolično določena, sicer je enolično določena na množici $Z_F \times Z_G$.

Tu dodajmo še očitno posledico nove formulacije izreka, ki prikazuje vlogo produktne kopule Π pri obravnavi neodvisnosti slučajnih spremenljivk.

Posledica 6. *Naj bosta X in Y zvezni slučajni spremenljivki. Potem sta X in Y neodvisni natanko tedaj, ko je njuna kopula C_{XY}, dobljena preko Sklarovega izreka, kar produktna kopula Π.*

Z uporabo Sklarovega izreka zdaj lahko podobno kot v izreku 2 omejimo vrednost porazdelitvene funkcije dvorazsežnega slučajnega vektorja.

Izrek 7 (Omejenost porazdelitvenih funkcij dvorazsežnih slučajnih vektorjev). *Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki in H porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja (X, Y) z robnima porazdelitvama F in G. Potem za vse x, y v $\overline{\mathbb{R}}$ velja*

$$\max\{F(x) + G(y) - 1, 0\} \leq H(x, y) \leq \min\{F(x), G(y)\}.$$

Opomba 3. Zgornja in spodnja meja v izreku sta porojeni s kopulama M in W iz izreka 2. Tako sledi, da sta meji tudi porazdelitveni funkciji dvorazsežnih slučajnih vektorjev. Imenujemo ju Fréchet-Hoeffdingovi meji za porazdelitvene funkcije dvorazsežnih slučajnih vektorjev H z robnima porazdelitvama F ter G.

4. Asimetrija

Pri obravnavi asimetrije bomo izhajali iz pojma zamenljivosti slučajnih spremenljivk. Najprej bomo preverili primer, ko ta lastnost velja, potem pa jo bomo opustili.

Definicija 8. Slučajni spremenljivki X in Y sta *zamenljivi*, če sta slučajna vektorja (X, Y) in (Y, X) enako porazdeljena. Če je H porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja (X, Y), potem za vse x, y v $\overline{\mathbb{R}}$ velja:

$$H(x, y) = H(y, x).$$

Naslednji izrek karakterizira zamenljivost para zveznih slučajnih spremenljivk. Dokaz izreka je očiten.

Izrek 8. *Naj bosta X in Y zvezni slučajni spremenljivki in H porazdelitvena funkcija vektorja (X, Y) z robnima porazdelitvama F in G ter pripadajočo kopulo C. Potem sta X in Y zamenljivi natanko takrat, ko velja $F = G$ in $C(u, v) = C(v, u)$ za vsako točko (u, v) v $\mathbb{I}^2$. Če ta lastnost velja, potem rečemo, da je kopula C simetrična.*

Zdaj pa se osredotočimo na primer, ko slučajni spremenljivki nista zamenljivi. Zanima nas, kakšne lastnosti ima pripadajoča kopula sedaj. V ta namen za dano kopulo C definirajmo funkcijo $d_C : \mathbb{I}^2 \mapsto \mathbb{I}$ s predpisom

$$d_C(x, y) = |C(x, y) - C(y, x)|,$$

kjer si d_C lahko razlagamo kot nekakšno mero asimetrije proučevane kopule v vsaki točki enotskega kvadrata.

Ker nas bo zanimala natančna zgornja meja asimetrije posameznih razredov kopul, za d_C vzemimo še njeno neskončno normo $\|d_C\|_\infty$, podano z

$$\|d_C\|_\infty = \sup\{d_C(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{I}^2\}.$$

Spomnimo, da nas natančna zgornja meja asimetrije zanima, saj tako dobimo dodatne informacije za modeliranje porazdelitvenih funkcij slučajnih vektorjev. Če poznamo točno zgornjo mejo asimetrije, lahko recimo izločimo neustrezne modele, ki to vrednost presegajo ali je ne dosegajo, pa bi jo morali.

S pravkar definirano neskončno normo lahko tudi naravno karakteriziramo simetričnost kopule in posledično zamenljivost para slučajnih spremenljivk.

Posledica 9. *Kopula C je simetrična natanko tedaj, ko velja $\|d_C\|_\infty = 0$.*

4.1 Splošne kopule

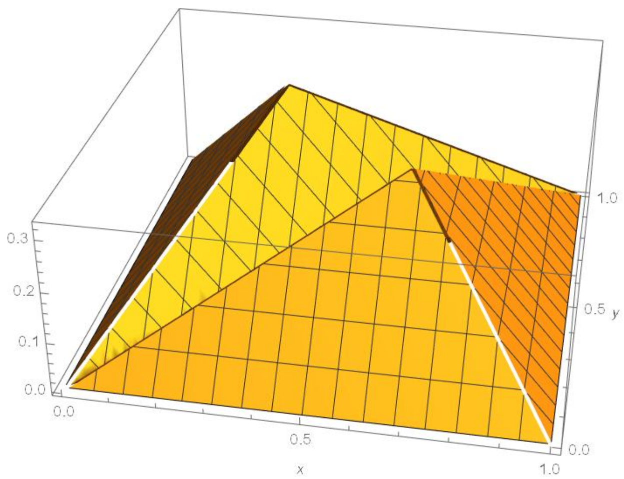
Vzemimo poljubno kopulo C. Zanima nas, kolikšna je zgornja meja asimetrije zanjo. Z drugimi besedami, radi bi izvedeli, kako asimetrična je kopula sploh lahko. Pri obravnavi natančne zgornje meje asimetrije splošnih kopul se bomo oprli na [2].

V pomoč si definirajmo funkcijo $d^* : \mathbb{I}^2 \mapsto \mathbb{I}$ s predpisom

$$d^*(x, y) = \sup\{d_C(x, y) \mid \text{C je kopula}\}.$$

Naslednji izrek nam poda ekspliciten predpis funkcije d^*. Dokaza zaradi zahtevnosti ne bomo navedli, podan je v [2].

Izrek 10. *Za vse (x, y) iz $\mathbb{I}^2$ velja $d^*(x, y) = \min\{|x - y|, x, y, 1 - x, 1 - y\}$.*



Slika 4. Graf minimuma funkcij $|x - y|, x, y, 1 - x$ in $1 - y$.

S pomočjo dobljenega predpisa sedaj enostavno izračunamo natančno zgornjo mejo asimetrije kopul. Slika 4 prikazuje graf minimuma funkcij $|x - y|, x, y, 1 - x$ ter $1 - y$ na enotskem kvadratu. Vidimo, da je največja vrednost $\frac{1}{3}$, dosežena pa je v točkah $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ in $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

Tako smo ugotovili zgornjo mejo asimetrije za vse kopule. Tu dodajmo še naslednjo posledico, ki nam, ob znani vrednosti $C(x, y)$ poda boljše omejitve za vrednost $C(y, x)$ kot samo uporaba Fréchet-Hoeffdingovih mej. Posledica sledi neposredno iz izreka 10, saj za vsako kopulo C velja $d_C(x, y) = |C(x, y) - C(y, x)| \leq d^*(x, y) = \min\{|x - y|, x, y, 1 - x, 1 - y\} \leq |x - y|$.

Posledica 11. *Naj bo C kopula. Za vsako točko (x, y) iz $\mathbb{I}^2$ velja*

$$C(y, x) \in [\max\{W(y, x), C(x, y) - |x - y|\}, \min\{M(y, x), C(x, y) + |x - y|\}].$$

4.2 Kvadrantno odvisne kopule

Posvetimo se sedaj še nekaterim podrazredom kopul. Začnimo z obravnavo pozitivno in negativno kvadrantno odvisnih kopul, pri čemer si bomo pomagali s knjigo [1] in člankom [5].

Najprej se moramo seznaniti s pojmoma pozitivno in negativno kvadrantno odvisnih slučajnih spremenljivk.

Definicija 9. Slučajni spremenljivki X in Y sta *pozitivno kvadrantno odvisni*, če za vse točke (x, y) v $\mathbb{R}^2$ velja

$$P(X \leq x, Y \leq y) \geq P(X \leq x)P(Y \leq y).$$

Opomba 4. Pozitivno kvadrantno odvisnost para slučajnih spremenljivk označimo s PQD, negativno, ki jo definiramo analogno z obratom neenakosti v definiciji, pa z NQD.

Z uporabo Sklarovega izreka dobimo naslednjo posledico, ki pove, da pozitivna kvadrantna odvisnost slučajnih spremenljivk pomeni, da graf pripadajoče kopule leži nad grafom produktne kopule Π. Takšne kopule bomo v nadaljevanju imenovali kar pozitivno kvadrantno odvisne. Podobno kopulam, katerih grafi ležijo pod grafom kopule Π, rečemo negativno kvadrantno odvisne.

Posledica 12. *Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki in H porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja (X, Y) z zveznima robnima porazdelitvama F in G ter kopulo C. Potem je pogoj za pozitivno kvadrantno odvisnost ekvivalenten*

$$H(x, y) \geq F(x)G(y)$$

za vse točke (x, y) v $\mathbb{R}^2$, oziroma

$$C(u, v) \geq uv$$

za vse točke (u, v) v $\mathbb{I}^2$.

Naslednja izreka nam podata formuli za izračun natančne zgornje meje asimetrije pozitivno in negativno kvadrantno odvisnih kopul. Glede na to, da sta dokaza podobna, nevedimo le prvega.

Izrek 13. *Naj bo $\mathcal{C}_{PQD}$ množica vseh kopul C, ki zadoščajo pogoju $C(x, y) \geq \Pi(x, y) = xy$ za vse točke $(x, y) \in \mathbb{I}^2$. Naj bo $d^*_{PQD} : \mathbb{I}^2 \mapsto \mathbb{I}$ funkcija s predpisom*

$$d^*_{PQD}(x, y) = \sup\{d_C(x, y) \mid C \in \mathcal{C}_{PQD}\}.$$

Potem za vse (x, y) iz $\mathbb{I}^2$ velja

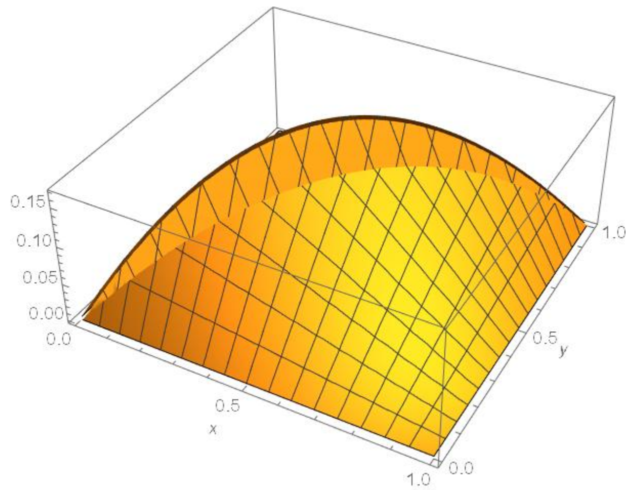
$$d^*_{PQD}(x, y) = \min\{|x - y|, (1 - x)y, x(1 - y)\}.$$

Dokaz. Naj bo C poljubna PQD kopula in naj bosta x ter y iz $\mathbb{I}$. Najprej obravnavamo primer $x \leq y$. Zaradi omejenosti kopule C s kopulama M ter Π sledi $|C(x, y) - C(y, x)| \leq x - xy = x(1 - y)$. Podobno z obravnavo primera $x \geq y$ dobimo $|C(x, y) - C(y, x)| \leq y - xy = (1 - x)y$.

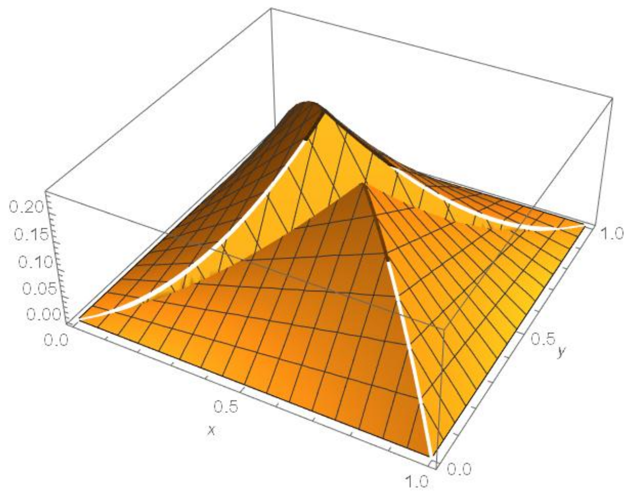
Z upoštevanjem zgornje meje asimetrije splošnih kopul tako dobimo

$$d^*_{PQD}(x, y) \leq \min\{|x - y|, (1 - x)y, x(1 - y)\}.$$

Dokaz, da je zgornja meja dosežena v vsaki točki enotskega kvadrata, bo zaradi zahtevnosti izpuščen. Podroben izračun je naveden v [5]. ■



Slika 5. Graf minimuma funkcij $|x-y|\,,(1-x)y$ in $x(1-y)$.



Slika 6. Graf minimuma funkcij $|x-y|\,,(1-x)(1-y)$ in xy.

Izrek 14. *Naj bo $\mathcal{C}_{NQD}$ množica vseh kopul C, ki zadoščajo pogoju $C(x,y) \leq \Pi(x,y) = xy$ za vse točke $(x,y) \in \mathbb{I}^2$. Naj bo $d^*_{NQD} : \mathbb{I}^2 \mapsto \mathbb{I}$ funkcija s predpisom*

$$d^*_{NQD}(x,y) = \sup\{d_C(x,y) \mid C \in \mathcal{C}_{NQD}\}.$$

Potem za vse (x,y) iz $\mathbb{I}^2$ velja

$$d^*_{NQD}(x,y) = \min\{|x-y|\,, xy, (1-x)(1-y)\}.$$

V primeru PQD kopul lahko z omejitvijo na primer $x \leq y$ in sliko 5 zdaj enostavno izračunamo največjo vrednost asimetrije kot maksimum krivulje, ki jo dobimo s presekom grafov funkcij $y-x$ ter $x(1-y)$. Iskana vrednost je tako maksimum funkcije $h : \mathbb{I} \mapsto \mathbb{R}$ s predpisom $h(y) = \frac{y(1-y)}{2-y}$. Izračun pokaže, da je maksimum dosežen v točki $(\sqrt{2}-1, 2-\sqrt{2})$, znaša pa $3-2\sqrt{2}$ oziroma približno 0,172. Če preverimo še za primer $x \geq y$, dobimo, da je ta vrednost dosežena tudi v točki $(2-\sqrt{2}, \sqrt{2}-1)$. Podrobnejši izračun je podan v [5].

Za NQD kopule pa lahko iz slike 6 razberemo, da je maksimum funkcije d^*_{NQD} dosežen v preseku grafov funkcij $y-x$, xy in $(1-x)(1-y)$, ko velja $x \leq y$ ter v preseku grafov funkcij $x-y$, xy in $(1-x)(1-y)$, ko je $x \geq y$. Iskana vrednost tako znaša $\sqrt{5}-2$, kar je približno 0,236, dosežena pa je v točkah $(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2})$ ter $(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$.

4.3 Semilinearne kopule

Naslednji razred kopul, ki nas zanima, so semilinearne kopule. Obravnava natančne zgornje meje asimetrije tega razreda temelji na [4]. Najprej si oglejmo definiciji navpično in vodoravno semilinarne kopule.

Definicija 10. Kopula C je *navpično semilinearna*, če sta preslikavi

$$v_1 : [0,x] \mapsto \mathbb{I}, \qquad v_1(t) = C(x,t)$$

$$v_2 : [x,1] \mapsto \mathbb{I}, \qquad v_2(t) = C(x,t)$$

linearni za vsak x iz $\mathbb{I}$.

Definicija 11. Kopula C je *vodoravno semilinearna*, če sta preslikavi

$$h_1 : [0, x] \mapsto \mathbb{I}, \qquad h_1(t) = C(t, x)$$

$$h_2 : [x, 1] \mapsto \mathbb{I}, \qquad h_2(t) = C(t, x)$$

linearni za vsak x iz $\mathbb{I}$.

Pripadnike zgornjih razredov kopul lahko izrazimo preko njihovega diagonalnega prereza iz definicije 4. To prikazujeta naslednji lemi. Ker sta njuna dokaza analogna, lemo pokažimo samo za razred navpično semilinearnih kopul.

Lema 15. *Kopula C z diagonalnim prerezom δ_C je navpično semilinearna natanko tedaj, ko je podana s predpisom*

$$C(x, y) = \begin{cases} y\frac{\delta_C(x)}{x}, & y \leq x, \\ \frac{(y-x)x+(1-y)\delta_C(x)}{1-x}, & \textit{sicer}. \end{cases}$$

Dokaz. Predpostavimo najprej, da za kopulo C velja predpis iz leme. Če v njem fiksiramo x, je izraz v obeh primerih očitno linearen v spremenljivki y, s čimer je pogoj za navpično semilinearnost izpolnjen.

Za dokaz obratne smeri predpostavimo, da je C navpično semilinearna kopula. Predpis iz leme lahko dobimo z linearno interpolacijo po odsekih, pri čemer poznamo naslednje vrednosti kopule C: $C(x, 0) = 0, C(x, x) = \delta_C(x)$ in $C(x, 1) = x$. Za $y \in [0, x]$ izračunamo

$$C(x, y) = C(x, 0) + (y - 0)\frac{\delta_C(x) - 0}{x - 0} = y\frac{\delta_C(x)}{x},$$

za $y \in (x, 1]$ pa dobimo

$$\begin{aligned} C(x, y) &= \delta_C(x) + (y - x)\frac{x - \delta_C(x)}{1 - x} \\ &= \frac{\delta_C(x) - x\delta_C(x) + xy - \delta_C(x)y - x^2 + x\delta_C(x)}{1 - x} \\ &= \frac{x(y - x) + \delta_C(x)(1 - y)}{1 - x}, \end{aligned}$$

s čimer je lema dokazana. ■

Lema 16. *Kopula C z diagonalnim prerezom δ_C je vodoravno semilinearna natanko tedaj, ko je podana s predpisom*

$$C(x, y) = \begin{cases} x\frac{\delta_C(y)}{y}, & x \leq y, \\ \frac{(x-y)y+(1-x)\delta_C(y)}{1-y}, & \textit{sicer}. \end{cases}$$

Zgornji lemi zagotavljata, da je dovolj obravnava enega razreda. Namreč, če je C_{HS} vodoravno semilinearna kopula z diagonalnim prerezom δ, jo podamo kot $C_{HS}(x, y) = C_{VS}(y, x)$, kjer je C_{VS} navpično semilinearna kopula z istim diagonalnim prerezom. Izračunana zgornja meja asimetrije bo tako veljala za oba razreda.

Zgornjo mejo asimetrije navpično semilinarnih kopul poda naslednji izrek, ki ga zaradi zahtevnosti ne bomo dokazovali. Dokaz je podan v [4].

Izrek 17. *Naj bo $\mathcal{C}_{VS}$ množica vseh navpično semilinerarnih kopul C_{VS}. Dalje naj bo $d^*_{VS} : \mathbb{I}^2 \mapsto \mathbb{I}$ funkcija s predpisom*

$$d^*_{VS}(x, y) = \sup\{d_C(x, y) \mid C \in \mathcal{C}_{VS}\}.$$

Potem velja

$$\|d^*_{VS}\|_\infty = \frac{1}{16}.$$

Kot rečeno, je zgornja meja asimetrije enaka za vodoravno semilinarne kopule.

4.4 Stohastično padajoče kopule

Zadnji razred kopul, ki ga bomo obravnavali, so stohastično padajoče kopule. Pri določanju točne zgornje meje asimetrije se bomo oprli na [3]. Najprej podamo naslednjo definicijo.

Definicija 12. Slučajna spremeljivka Y je *stohastično padajoča v slučajni spremenljivki* X, če je funkcija $f_y(x) = P(Y > y \mid X = x)$ padajoča v x za vsako vrednost y.

Dalje z $\mathcal{C}_{SD}$ označimo množico vseh kopul C, za katere so vodoravni in navpični prerezi h^C_x ter v^C_x iz definicije 4 konveksni za vsak $x \in [0, 1]$. Takšne kopule ravno ustrezajo slučajnim vektorjem (X, Y), kjer velja, da je X stohastično padajoča v Y in Y stohastično padajoča v X.

Za začetek lahko asimetrijo stohastično padajočih kopul navzgor omejimo z naslednjo lemo, ki bo podana brez dokaza. Tega lahko najdemo v [1].

Lema 18. *Naj bo C kopula v množici $\mathcal{C}_{SD}$. Potem je C tudi v množici $\mathcal{C}_{NQD}$, torej je negativno kvadrantno odvisna.*

Iz izreka 14 sledi, da eno zgornjo mejo asimetrije za stohastično padajoče kopule predstavlja vrednost $\sqrt{5} - 2$. Naslednji izrek nam pove, da lahko iskano vrednost še bolj omejimo. Zaradi zahtevnosti bo dokaz ponovno izpuščen.

Izrek 19. *Naj bo $d^*_{SD} : \mathbb{I}^2 \mapsto \mathbb{I}$ funkcija s predpisom*

$$d^*_{SD}(x, y) = \sup\{d_C(x, y) \mid C \in \mathcal{C}_{SD}\}.$$

Potem velja

$$\|d^*_{SD}\|_\infty = 3 - 2\sqrt{2}.$$

5. Zaključek

V članku smo najprej predstavili pojem kopule in spoznali njene najpomembnejše lastnosti. Dalje smo navedli Sklarov izrek, s katerim smo novi koncept povezali z obstoječim znanjem verjetnosti. Z novo teoretično podlago smo končno lahko definirali asimetrijo para slučajnih spremenljivk in izračunali njeno splošno zgornjo mejo.

V zadnjem delu smo predstavili štiri konkretne razrede kopul in za pripadajoče pare slučajnih spremenljivk podali njihovo zgornjo mejo asimetrije. Ugotovili smo, da izmed proučevanih razredov zgornjo mejo asimetrije najbolj omeji semilinearnost, najmanj pa negativna kvadrantna odvisnost pripadajoče kopule. Učinek stohastičnega padanja in pozitivne kvadrantne odvisnosti kopul na zgornjo mejo asimetrije pripadajočega para slučajnih spremenljivk pa je enakovreden.

LITERATURA

[1] R. B. Nelsen, *An Introduction to Copulas, 2nd edition*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York, 2006.

[2] E. P. Klement in R. Mesiar, *How non-symmetric can a copula be?*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae **47** (2006) 141–148.

[3] F. Durante in P. L. Papini, *Non-exchangeability of negatively dependent random variables*, Metrika **71** (2010) 139–149.

[4] B. De Baets, H. De Meyer in R. Mesiar, *Asymmetric semilinear copulas*, Kybernetika **43** (2007) 221–233.

[5] D. Kokol Bukovšek, T. Košir, B. Mojškerc in M. Omladič, *Non-exchangeability of copulas arising from shock models*, Journal of Computational and Applied Mathematics **358** (2019) 61–83.