

KVATERNIONSKA REGULARNA ITERACIJA

LUKA SIMČIČ

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Glavni cilj dela je opis in vizualizacija napolnjenih Juliajevih množic za nekatere regularne kvaternionske funkcije, vpeljane v [1]. Izpeljan je kriterij za neomejenost orbit ter opisane so napolnjene Juliajeve množice za polinome z vsemi koeficienti iz ene rezine \mathbb{C}_I . Njihov presek z ravnino \mathbb{C}_I sovpada z že znano kompleksno napolnjeno Juliajevo množico, presek z ostalimi ravninami pa je s tem natanko določen. Priložena in opisana sta tudi koda za računanje z regularnimi funkcijami v Mathematici in efektiven algoritem za računanje orbit regularnih funkcij.

QUATERNIONIC REGULAR ITERATION

The main goal of the work is the description and visualization of filled Julia sets for some regular quaternion functions introduced in [1]. A criterion is described for unboundedness of orbits and filled Julia sets of polynomials with coefficients from one slice \mathbb{C}_I are described. Their intersection with the plane \mathbb{C}_I coincides with the already known complex filled Julia set and the intersection with the other planes is thereby precisely determined. Code for computing with regular functions in Mathematica is also attached and described, as well as an effective algorithm for computing orbits of regular functions.

1. Uvod

Regularne kvaternionske funkcije, ki služijo kot posplošitev holomorfnih in na katerih sloni to delo, so bile prvič predstavljene leta 2006 v [2] z željo obravnave razreda kvaternionskih funkcij, ki vsebuje tudi polinome ter potenčne vrste. Do takrat se je za posplošitev holomorfnih funkcij smatral predvsem razred kvaternionskih Fuetersko regularnih funkcij, kjer je analog Wirtingerjevega odvoda definiran z uporabo vseh treh standardnih imaginarnih enot in ta na primer ne vsebuje identitete.

Regularne funkcije so kolobar za seštevanje in množenje s kvaternioni z desne, običajen produkt dveh regularnih funkcij pa ni regularna funkcija. Zato se vpelje regularni produkt $f * g$ in posledično regularni kompozitum $f \bullet g$, kar naravno vodi do vprašanj o obnašanju regularnih iteratov. V nasprotju z regularnim produktom regularni kompozitum ni asociativen, kar povsem spremeni metode za obravnavanje iteratov dane funkcije. Ker še za regularni produkt ne velja zveza $(f * g)(q) = f(q)g(q)$, tudi za regularen kompozitum v splošnem ne velja $(f \bullet g)(q) = f(g(q))$.

Na temo kvaternionske dinamike literatura, ki obravnava klasično iteracijo na kvaternionih, že obstaja (na primer [3]), avtor pa zaenkrat še ni zasledil take, ki bi obravnavala regularne iteracije. Cilj dela je bil torej najti primerne posplošitve rezultatov kompleksne dinamike, predvsem o napolnjenih Juliajevih množicah za kvadratne polinome. Zaradi kompleksnosti teorije smo se omejili na določene družine kvadratnih polinomov.

Glavni novi rezultati pričujočega dela se nanašajo na strukturo napolnjenih Juliajevih množic določenih regularnih funkcij. Izrek 54 pove, da je za regularne funkcije, definirane na \mathbb{H} , ki ohranjajo rezino \mathbb{C}_I , del napolnjene Juliajeve množice v \mathbb{C}_I tak kot v kompleksnem primeru, v ostalih rezinah pa je enak preseku napolnjene Juliajeve množice v \mathbb{C}_I in njene zrcalne slike. Za isti razred funkcij izrek 55 poda oceno za hitrost konvergence v rezinah \mathbb{C}_J za imaginarne enote J , ki so pravokotne na I . Izrek 49 pa pove, da je za polinome oblike $f(q) = q^2a + c$ presek napolnjene Juliajeve množice z imaginarnim prostorom krožno simetričen.

Izkaže se, da je regularna dinamika tudi računsko precej zahtevnejša kot kompleksna. V kompleksnem primeru izračunamo n -ti iterat funkcije tako, da izračunamo vrednosti funkcije v prejšnjem iteratu. Zaradi posebnosti kvaternionskega kompozituma za n -ti iterat, izračunan v danem kvaternionu, potrebujemo vrednosti iteratov nižjega reda za 2^{n-1} rotirank danega kvaterniona, saj se

moramo za n -ti iterat sprehoditi po dvojiškem drevesu globine n . V zadnjem razdelku smo podali efektiven algoritem za izračun n -tega regularnega iterata, ki omogoča hitrejši in natančnejši izris napolnjenih Juliajevih množic.

2. O kvaternionski analizi

2.1 Obseg kvaternionov

Osnove kvaternionске analize povzemamo po [1]. Na kvaternion $q = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$ lahko pogledamo tudi kot na vsoto realnega in imaginarnega dela $q = x + yI$, kjer sta x in y realni števili, $y \geq 0$, I pa imaginarna enota, torej element enotske imaginarne krogle

$$\mathbb{S} = \{q \in \mathbb{H} ; q^2 = -1\} = \{x_1i + x_2j + x_3k ; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Če opustimo pogoj $y \geq 0$, tak zapis kvaterniona, ki ni realen, več ni enoličen, saj velja $q = x + yI = x - y(-I)$. Množico kvaternionov lahko tako naravno razdelimo na kompleksne ravnine, izmed katerih je ena ravno $\mathbb{C} = \mathbb{C}_i$.

Definicija 1. Naj bo $I \in \mathbb{S}$. *Rezina* \mathbb{C}_I je množica kvaternionov $\{x + yI ; x, y \in \mathbb{R}\}$.

Opomba 2. Rezini \mathbb{C}_I in \mathbb{C}_{-I} sta kot množici enaki, vizualiziramo pa si ju prezrcaljene čez realno os.

Ker je vsak kvaternion z izjemo tistih brez imaginarnega dela v natanko eni rezini, tisti s samo realnim delom pa v vseh, lahko napišemo $\mathbb{H} = \bigcup_{I \in \mathbb{S}} \mathbb{C}_I$ in pa $\mathbb{C}_I \cap \mathbb{C}_J = \mathbb{R}$ za vse $I \neq \pm J$.

Imaginarni del yI predstavlja trirazsežni vektor (x_1, x_2, x_3) . Če to upoštevamo, se pravilo za množenje glasi

$$(x_1 + y_1I)(x_2 + y_2J) = x_1x_2 - y_1y_2\langle I, J \rangle + x_1y_2J + x_2y_1I + y_1y_2I \times J,$$

kjer $\langle \cdot, \cdot \rangle$ predstavlja skalarni, \times pa vektorski produkt. Iz te formule takoj sledi:

Trditev 3. *Kvaternioni med sabo komutirajo natanko tedaj, ko so iz iste rezine.*

Dokaz. Iz nove formule za produkt kvaternionov sledi, da kvaterniona $x_1 + y_1I$ in $x_2 + y_2J$ komutirata natanko tedaj, ko velja $I \times J = J \times I$. Zaradi antikomutativnosti vektorskega produkta in dejstva, da sta I in J elementa imaginarne enotske krogle, je to ekvivalentno $I = \pm J$. ■

Posledica 4. *Realna števila komutirajo z vsemi kvaternioni.*

Za vsak $I \in \mathbb{S}$ lahko \mathbb{C}_I identificiramo s \mathbb{C} , saj so končno razsežni vektorski prostori z isto dimenzijo nad istim poljem izomorfnii. Še več, za vsaka $I \perp J$ velja

$$\mathbb{H} = \mathbb{C}_I \oplus \mathbb{C}_I J. \tag{1}$$

Dokaz. Naj bodo $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$. Vsak kvaternion lahko na en sam način razpišemo kot

$$q = (x_1 + y_1I) + (x_2 + y_2I)J = x_1 + y_1I + x_2J + y_2IJ,$$

saj vektorji $1, I, J, IJ$ sestavljajo bazo za štirirazsežni vektorski prostor nad \mathbb{R} . ■

Definicija 5. Množica $\Omega \subseteq \mathbb{H}$ je *rezinska domena*, če je za vsak $I \in \mathbb{S}$ množica $\Omega_I = \Omega \cap \mathbb{C}_I$ kompleksna domena in velja $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$.

2.2 Razred regularnih funkcij

Od začetka prejšnjega stoletja je bilo več poskusov iskanja razreda kvaternionskih funkcij ene kvaternionske spremenljivke, ki bi služil kot posplošitev holomorfnih funkcij v kompleksnem primeru.

Definicija 6. Naj bo Ω rezinska domena in $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}$ regularna funkcija. Za vsak $I \in \mathbb{S}$ definiramo

$$\partial_I f(x + yI) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - I \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x + yI).$$

Rezinski odvod funkcije f je funkcija f' , definirana s $\partial_I f$ na $\mathbb{C}_I \cap \Omega$ za vsak $I \in \mathbb{S}$.

Opomba 7. Definicija rezinskega odvoda je korektna, saj na $(\mathbb{C}_I \cap \Omega) \cap (\mathbb{C}_J \cap \Omega) \subseteq \mathbb{C}_I \cap \mathbb{C}_J = \mathbb{R}$ velja $\partial_I = \partial_J$.

Definicija 8. Naj bo Ω rezinska domena. Kvaternionska funkcija kvaternionske spremenljivke $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}$ je *Cullensko regularna* (tudi *rezinsko regularna* ali kar *regularna*), če za vsak $q = x + yI \in \Omega$ velja

$$\bar{\partial}_I f(q) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + I \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x + yI) \equiv 0.$$

Opomba 9. Ta enačba je posplošitev Cauchy-Riemannove enačbe. Kompleksna funkcija f kompleksne spremenljivke na $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je rezinsko regularna, če za vse $z = x + yi$, $z \in \Omega$ velja

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x + yi) \equiv 0.$$

To je pa ravno izpolnjena Cauchy-Riemannova enačba.

Opomba 10. V tem delu bomo kvaternionske funkcije kvaternionske spremenljivke, ki so regularne, kar poimenovali kot regularne funkcije.

Opomba 11. Če je funkcija f dvakrat zvezno odvedljiva, je vrstni red na njej uporabljenih operatorjev ∂_I in $\bar{\partial}_I$ obrnljiv:

$$\begin{aligned} \partial_I \bar{\partial}_I f &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - I \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{1}{2} (f_x + If_y) = \frac{1}{4} (f_{xx} - If_{xy} + If_{yx} - I^2 f_{yy}) = \frac{1}{4} (f_{xx} + f_{yy}) \\ \bar{\partial}_I \partial_I f &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + I \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{1}{2} (f_x - If_y) = \frac{1}{4} (f_{xx} + If_{xy} - If_{yx} - I^2 f_{yy}) = \frac{1}{4} (f_{xx} + f_{yy}) \end{aligned}$$

Posledično je rezinski odvod regularne funkcije f regularen:

$$\bar{\partial}_I f'(x + yI) = \bar{\partial}_I \partial_I f(x + yI) = \partial_I \bar{\partial}_I f(x + yI) = \partial_I 0 = 0.$$

Zato obstajajo vsi rezinski odvodi regularne funkcije, n -tega označimo z $f^{(n)}$.

Primer 12. Naj bo $f(q) = q$ identiteta. Pokažimo, da je regularna.

$$\bar{\partial}_I f(q) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + I \frac{\partial}{\partial y} \right) (x + yI) = \frac{1}{2} (1 + I^2) = 0$$

Naslednja lema pojasni razmerje med regularnimi in holomorfnimi funkcijami.

Lema 13. Naj bo Ω rezinska domena in $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}$ regularna funkcija. Potem za vsaka $I, J \in \mathbb{S}$, $I \perp J$ obstajata holomorfnii funkciji $F, G : \mathbb{C}_I \cap \Omega \rightarrow \mathbb{C}_I$, da za vsak $z = x + yI$ velja

$$f(z) = F(z) + G(z)J.$$

Dokaz. Če \mathbb{C}_I indentificiramo s \mathbb{C} , ima v luči koncepta (1) enačba smisel za neki funkciji kompleksne spremenljivke F in G . Pokažimo, da sta holomorfnii.

$$0 = \bar{\partial}_I f(z) = \bar{\partial}_I (F(z) + G(z)J) = \bar{\partial}_I F(z) + \bar{\partial}_I G(z)J$$

Enačba bo držala le, če bo $\bar{\partial}_I F \equiv 0$ in $\bar{\partial}_I G \equiv 0$ na $\mathbb{C}_I \cap \Omega$, kar je pogoj za njuno holomorfnost. ■

2.3 Analiza regularnih funkcij

Videli smo že, da je identiteta regularna funkcija. Izkaže se, da so regularni vsi polinomi oblike $q \mapsto q^n a_n + \dots + qa_1 + a_0$ in še več, konvergentne potenčne vrste oblike $\sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n$, $a_n \in \mathbb{H}$.

Izrek 14 (Abelov izrek 1.6 v [1]). Naj bo $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje kvaternionov in naj bo

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^{1/n}}.$$

Če je $R > 0$, potenčna vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n$ konvergira absolutno in enakomerno po kompaktnih v $B(0, R)$. Še več, njena vsota je regularna funkcija na $B(0, R)$.

Dokaz je analogen dokazu kompleksnega Abelovega izreka, zato ga bomo opustili. Velja tudi obratno, vsako regularno funkcijo se da na taki krogli razviti v potenčno vrsto.

Izrek 15. Naj bo $R > 0$ in naj bo $f : B = B(0, R) \rightarrow \mathbb{H}$ regularna. Potem za $q \in B$ velja

$$f(q) = \sum_{n \in \mathbb{N}} q^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Dokaz. Fiksirajmo $I \in \mathbb{S}$ in indentificirajmo \mathbb{C}_I s \mathbb{C} . Vzemimo $J \in \mathbb{S}$, $I \perp J$. Po lemi 13 vemo, da na $B_I = \mathbb{C}_I \cap B$ velja $f = F + GJ$ za neki holomorfnii funkciji F in G . Zato za vsak $z \in B_I$ in $n \in \mathbb{N}$ velja

$$f^{(n)}(z) = \frac{\partial^n F}{\partial z^n}(z) + \frac{\partial^n G}{\partial z^n}(z) J.$$

Vemo, da kompleksna vrsta

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n F}{\partial z^n}(0)$$

absolutno in enakomerno na kompaktnih konvergira k $F(z)$ za vsak $z \in B_I$. Enak rezultat velja za G in tako dobimo

$$\begin{aligned} f(z) &= F(z) + G(z) J = \sum_{n \in \mathbb{N}} z^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n F}{\partial z^n}(0) + \sum_{n \in \mathbb{N}} z^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n G}{\partial z^n}(0) J \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} z^n \frac{1}{n!} f^{(n)}(0). \end{aligned}$$

Ker formula velja za vse $I \in \mathbb{S}$, je izrek dokazan. ■

Zdaj vemo, da lahko vsako regularno funkcijo na krogli s središčem v izhodišču pišemo kot vrsto. Naj bosta zato v nadaljevanju regularni funkciji f in g oblike $f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n$ in $g(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n b_n$ za $a_n, b_n \in \mathbb{H}$.

Opomba 16. Pomembno je, da koeficiente v vrsti pišemo na desni, sicer vsota vrste ni nujno regularna funkcija. Naj bo na primer $f(q) = aq$.

$$\bar{\partial}_I f(q) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + I \frac{\partial}{\partial y} \right) (a(x + yI)) = \frac{q}{2} (a + IaI)$$

Ker $I \in \mathbb{S}$ in $a \in \mathbb{H}$ v splošnem ne komutirata, ne moremo sklepati, da je izraz enak 0.

Ker je $\bar{\partial}_I$ linearni operator, se regularnost pri vsoti ohranja. Enako pa ne velja za produkt, kar kaže zgornja opomba, saj je funkcija $f(q) = aq$ očitno produkt dveh regularnih. Zato bomo za množenje regularnih funkcij namesto produkta po točkah definirali nov produkt.

Definicija 17. Regularnemu produktu regularnih funkcij $f = \sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n$ in $g = \sum_{n=0}^{\infty} q^n b_n$ rečemo **-produkt* ter ga definiramo kot

$$(f * g)(q) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n \right) * \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right).$$

Če so koeficienti a_n in b_n iz iste rezine \mathbb{C}_I za vsak $n \in \mathbb{N}$, se *-produkt na tej rezini ujema z že poznanim produktom po točkah, saj so števila iz iste rezine med sabo komutativna. Če pa so koeficienti f realni, velja $f * g = fg$ povsod, saj realna števila komutirajo z vsemi kvaternioni. V splošnem pa obstaja povezava med *-produktom in že znanim produktom po točkah, ki je opisana v sledeči lemi.

Lema 18. Naj bosta f in g regularni funkciji na krogli s središčem v izhodišču. Potem za vsak q , za katerega je $f(q) \neq 0$, velja

$$(f * g)(q) = f(q) g \left(f(q)^{-1} q f(q) \right).$$

Če je $f(q) = 0$, je $(f * g)(q) = 0$.

Dokaz. Dokaz sledi iz direktnega računa:

$$(f * g)(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} q^m \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k a_k \right) b_m = \sum_{m=0}^{\infty} q^m f(q) b_m.$$

Če je $f(q) = 0$, zaključimo, da je produkt enak 0. Sicer pa:

$$\begin{aligned} (f * g)(q) &= f(q) \sum_{m=0}^{\infty} f(q)^{-1} q^m f(q) b_m \\ &= f(q) \sum_{m=0}^{\infty} \left(f(q)^{-1} q f(q) \right)^m b_m = f(q) g \left(f(q)^{-1} q f(q) \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Opomba 19. Kvaternion $f(q)^{-1} q f(q)$ je rotiran q , saj velja $|f(q)^{-1} q f(q)| = |f(q)|^{-1} |q| |f(q)| = |q|$.

Operacija $*$ je asociativna. Za dokaz se opremo na lemo 18. Naj bodo f , g in h regularne funkcije.

$$\begin{aligned} (f * (g * h))(q) &= f(q) (g * h) \left(f(q)^{-1} q f(q) \right) \\ &= f(q) g \left(f(q)^{-1} q f(q) \right) h \left(g \left(f(q)^{-1} q f(q) \right)^{-1} f(q)^{-1} q f(q) g \left(f(q)^{-1} q f(q) \right) \right) \\ ((f * g) * h)(q) &= (f * g)(q) h \left((f * g)(q)^{-1} q (f * g)(q) \right) \\ &= f(q) g \left(f(q)^{-1} q f(q) \right) h \left(g \left(f(q)^{-1} q f(q) \right)^{-1} f(q)^{-1} q f(q) g \left(f(q)^{-1} q f(q) \right) \right) \end{aligned}$$

Definicija 20. Naj bo $f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n$ regularna funkcija na $B(0, R_1)$ in naj bo $g : B(0, R_2) \rightarrow B(0, R_1)$ regularna. Regularni kompozitum funkcij f in g definiramo kot

$$(f \bullet g)(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(g * g * \dots * g)}_n(q) a_n$$

in $f \bullet g \bullet h = f \bullet (g \bullet h)$ za regularno $h : B(0, R_3) \rightarrow B(0, R_2)$.

Definicija 21. Naj bo $\Omega \subseteq \mathbb{H}$ odprta in $f : \Omega \rightarrow \Omega$ regularna. Vpeljimo še oznako za n -ti regularni iterat $f^{\bullet n}(q) = \left(f \bullet \underbrace{(f \bullet \dots \bullet f)}_{n-1} \right)(q)$ za $n > 0$ in $f^{\bullet 0}(q) = q$.

Opomba 22. Regularni kompozitum v splošnem ni asociativen. Naj bo $f(q) = q^2i + q + k$, $g(q) = q^2 - qi + j$ in $h(q) = q^2k$. Zanimata nas kompozituma $(f \bullet g) \bullet h$ in $f \bullet (g \bullet h)$. Velja

$$\begin{aligned}(f \bullet g)(q) &= g^{*2}(q)i + g(q) + k = q^4i + 2q^3 + q^2(1 - i - 2k) - qi - i + j + k \\(g \bullet h)(q) &= h^{*2}(q) + j = -q^4 + j\end{aligned}$$

in zato

$$\begin{aligned}((f \bullet g) \bullet h)(q) &= h^{*4}(q)i + 2h^{*3}(q) + h^{*2}(q)(1 - i - 2k) - h(q)i - i + j + k \\&= q^8i - 2q^6k + q^4(-1 + i + 2k) - q^2j - i + j + k \\(f \bullet (g \bullet h))(q) &= (g \bullet h)^{*2}(q)i + (g \bullet h)(q) + k \\&= q^8i - 2q^6k + q^4(-1 - i + 2k) - q^2(2i - j) - i + j + k.\end{aligned}$$

Zaradi neasociativnosti regularnega kompozituma je potrebno definirati postavitev oklepajev pri več zaporednih kompozitumih: zapis $f_1 \bullet f_2 \bullet \dots \bullet f_n$ predstavlja funkcijo $f_1 \bullet (f_2 \bullet \dots \bullet f_n)$. Poseben primer je n -ti iterat funkcije f s koeficienti iz iste rezine. V tem primeru lahko oklepaje postavimo poljubno, torej velja $f^{\bullet n}(q) = f^{\bullet i}(q) \bullet f^{\bullet(n-i)}(q)$ za vsak $i \in \mathbb{N}$, $0 < i < n$, znotraj dane rezine.

Ker $*$ -produkt ohranja regularnost, jo ohranja tudi regularni kompozitum \bullet . Natančneje, ker vemo, da je funkcija $g * g * \dots * g$ regularna, je kompozitum vsota regularnih funkcij, ki je regularna.

Opomba 23. Tako definiran kompozitum se v splošnem ne ujema z znanim kompozitumom, torej izraz $(f \bullet g)(q)$ v splošnem ni enak $(f \circ g)(q) = f(g(q))$. Če pa so koeficienti realni ali pa koeficienti in spremenljivka iz iste rezine, velja

$$(f \bullet g)(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(g * g * \dots * g)}_n(q) a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (g(q))^n a_n = f(g(q)).$$

Poseben primer so tudi linearne funkcije, saj če je $f(q) = qa + b$, velja

$$(f \bullet g)(q) = g(q)a + b = (f \circ g)(q).$$

Za razliko od regularnega klasični kompozitum ni zaprt za regularnost. Regularni pa ne premore asociativnosti, kot je pokazano v opombi 22, zato v splošnem velja $f^{\bullet n} \bullet f^{\bullet m} \neq f^{\bullet(m+n)}$.

Regularen kompozitum je posplošitev kompozituma realnih ali kompleksnih funkcij, kar nakaže naslednji primer.

Primer 24. Naj bo $f(q) = q + i$ in $g(q) = q^2$. Če bi kompozitum f in g dojemali kot kompozitum kompleksnih funkcij, bi dobili

$$(g \circ f)(z) = g(f(q)) = (q + i)^2 = q^2 + qi + iq + i^2 = q^2 + qi + iq - 1,$$

medtem ko je njun regularni kompozitum v resnici definiran kot

$$(g \bullet f)(z) = (q + i)^{*2} = q^2 + q(i + i) + i^2 = q^2 + q2i - 1.$$

Vidimo, da se definiciji v primeru, ko je $q \in \mathbb{C}$, ujemata. To velja v splošnem, ko so koeficienti in argument iz iste rezine \mathbb{C}_I .

Za konec pogledjmo še en pomemben rezultat analize regularnih funkcij, ki nam bo v tem delu koristil. Za njegovo razumevanje je potreben še en izrek, ki je posledica principa identitete za holomorfne funkcije.

Izrek 25 (Princip identitete (Izrek 1.12 v [1])). Naj bosta f in g regularni funkciji na $B = B(0, R)$ za $R > 0$. Če se za neki $I \in \mathbb{S}$ funkciji ujemata na podmnožici množice $B_I = B \cap \mathbb{C}_I$, ki ima stekališče v B_I , velja $f = g$ na B .

Dokaz. Vzemimo $J \in \mathbb{S}$, $J \perp I$. Za $z \in B_I$ lahko po lemi 13 pišemo

$$\begin{aligned} f(z) &= F_{1I}(z) + F_{2I}(z)J, \\ g(z) &= G_{1I}(z) + G_{2I}(z)J \end{aligned}$$

za neke holomorfne funkcije $F_{1I}, F_{2I}, G_{1I}, G_{2I}$. Na B_I definirajmo

$$h_I(z) = f(z) - g(z) = (F_{1I}(z) - G_{1I}(z)) + (F_{2I}(z) - G_{2I}(z))J.$$

Funckija h_I je ničelna na podmnožici množice B_I , ki ima stekališče v B_I , zato tam velja

$$(F_{1I}(z) - G_{1I}(z)) + (F_{2I}(z) - G_{2I}(z))J = 0.$$

Ker vemo, da je tak zapis enoličen, lahko sklepamo, da sta ničelni tudi funkciji $F_{1I}(z) - G_{1I}(z)$ in $F_{2I}(z) - G_{2I}(z)$. Po principu identitete za holomorfne funkcije sta zato ničeni tudi na celem B_I . Zato na B_I velja $f = g$. Vzemimo zdaj $K \in \mathbb{S}$ in neki $J_K \in \mathbb{S}$, $J_K \perp K$. Za $z \in B_K = B \cap \mathbb{C}_K$ velja

$$\begin{aligned} f(z) &= F_{1K}(z) + F_{2K}(z)J_K, \\ g(z) &= G_{1K}(z) + G_{2K}(z)J_K. \end{aligned}$$

Na B_K definiramo funkcijo $h_K = f - g$. Ker vemo, da je h_K ničelna na $\mathbb{R} \cap B_I = \mathbb{R} \cap B_K$, kot prej sklepamo, da se f in g ujemata na B_K . Ker je bila izbira K poljubna, je izrek dokazan. ■

Izrek 26 (Reprezentacijska formula (Izrek 1.15 v [1])). Naj bo $f : B = B(0, R) \rightarrow \mathbb{H}$ regularna funkcija. Potem za vse $I, J, K \in \mathbb{S}$, $J \neq K$ velja

$$\begin{aligned} f(x + yI) &= (J - K)^{-1} \left(Jf(x + yJ) - Kf(x + yK) \right) \\ &\quad + I(J - K)^{-1} \left(f(x + yJ) - f(x + yK) \right). \end{aligned}$$

Kvaterniona $(J - K)^{-1} \left(Jf(x + yJ) - Kf(x + yK) \right)$ in $(J - K)^{-1} \left(f(x + yJ) - f(x + yK) \right)$ nista odvisna od J in K , temveč le od x in y .

Dokaz. Fiksirajmo J in K , tako da velja $J \neq K$. Za vse $I \in \mathbb{S}$ in $x, y \in \mathbb{R}$, da bo $x + yI \in B$, definirajmo funkcijo

$$\begin{aligned} \Phi(x + yI) &= (J - K)^{-1} \left(Jf(x + yJ) - Kf(x + yK) \right) \\ &\quad + I(J - K)^{-1} \left(f(x + yJ) - f(x + yK) \right) \\ &= \left((J - K)^{-1} J + I(J - K)^{-1} \right) f(x + yJ) \\ &\quad - \left((J - K)^{-1} K + I(J - K)^{-1} \right) f(x + yK). \end{aligned}$$

Vidimo, da se na $B \cap \mathbb{R}$ funkciji ujemata:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= (J - K)^{-1} \left(Jf(x) - Kf(x) \right) + I(J - K)^{-1} \left(f(x) - f(x) \right) \\ &= (J - K)^{-1} (J - K) f(x) + I(J - K)^{-1} 0 = f(x).\end{aligned}$$

Če dokažemo, da je Φ na B regularna, bo po principu identitete izrek dokazan.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi(x + yI)}{\partial x} &= \left((J - K)^{-1} J + I(J - K)^{-1} \right) \frac{\partial \Phi(x + yJ)}{\partial x} \\ &\quad - \left((J - K)^{-1} K + I(J - K)^{-1} \right) \frac{\partial \Phi(x + yK)}{\partial x} \\ I \frac{\partial \Phi(x + yI)}{\partial y} &= \left(I(J - K)^{-1} J - (J - K)^{-1} \right) \frac{\partial \Phi(x + yJ)}{\partial y} \\ &\quad - \left(I(J - K)^{-1} K - (J - K)^{-1} \right) \frac{\partial \Phi(x + yK)}{\partial y} \\ &= - \left(I(J - K)^{-1} + (J - K)^{-1} J \right) \frac{\partial \Phi(x + yJ)}{\partial x} \\ &\quad + \left(I(J - K)^{-1} + (J - K)^{-1} K \right) \frac{\partial \Phi(x + yK)}{\partial x}\end{aligned}$$

Če seštejemo zgornja izraza, dobimo ravno definicijo regularnosti:

$$\frac{\partial \Phi(x + yI)}{\partial x} + I \frac{\partial \Phi(x + yI)}{\partial y} \equiv 0. \quad \blacksquare$$

Posledica 27. Naj bo f regularna funkcija na $B = B(0, R)$. Potem za vsaka $I, J \in \mathbb{S}$ na B velja

$$\begin{aligned}f(x + yJ) &= \frac{1 - JI}{2} f(x + yI) + \frac{1 + JI}{2} f(x - yI) \\ &= \frac{1}{2} \left(f(x + yI) + f(x - yI) \right) + \frac{JI}{2} \left(f(x - yI) - f(x + yI) \right).\end{aligned}$$

Dokaz. Po reprezentacijski formuli razvijemo $f(x + yJ)$ in uporabimo $K = -I$.

$$\begin{aligned}f(x + yJ) &= (I - K)^{-1} \left(If(x + yI) - Kf(x + yK) \right) \\ &\quad + J(I - K)^{-1} \left(f(x + yI) - f(x + yK) \right) \\ &= (I + I)^{-1} \left(If(x + yI) + If(x - yI) \right) \\ &\quad + J(I + I)^{-1} \left(f(x + yI) - f(x - yI) \right) \\ &= \frac{I}{2I} \left(f(x + yI) + f(x - yI) \right) + \frac{J}{2I} \left(f(x + yI) - f(x - yI) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(f(x + yI) + f(x - yI) \right) + \frac{JI}{2} \left(-f(x + yI) + f(x - yI) \right)\end{aligned} \quad \blacksquare$$

3. Iteracije s holomorfnimi funkcijami

Kompleksna dinamika je precej starejše področje kot kvaternionska. Začetki segajo v konec 19. stoletja, podrobneje je obravnavana na primer v [4]. Za lažjo predstavo in dodatno motivacijo bomo pogledali primer iteracije nekaterih holomorfnih funkcij.

Definicija 28. Naj bo $f : S \rightarrow S$ holomorfnna funkcija Riemannove sfere nase. *Orbita* točke z_0 za preslikavo f je zaporedje točk $\{f^{on}(z_0)\}_{n \in \mathbb{N}} = z_0, f(z_0), f(f(z_0)), \dots$, točka z_0 pa *seme* orbite.

Definicija 29. Naj bo $f : S \rightarrow S$ holomorfna funkcija Riemannove sfere nase. *Fatoujeva množica* funkcije f je množica tistih točk $z \in S$, za katere obstaja odprta okolica U_z in podzaporedje zaporedja $\{f^{on}, n \in \mathbb{N}\}$, ki na U_z konvergira enakomerno. Njen komplement je *Juliajeva množica*.

Opomba 30. Imejmo funkcijo $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Orbite, ki gredo po absolutni vrednosti proti neskončnosti, so v primeru, ko na funkcijo f pogledamo kot na funkcijo Riemannove sfere nase, konvergentne, saj konvergirajo proti točki v neskončnosti.

Opomba 31. Po definiciji je Fatoujeva množica odprta in zato Juliajeva zaprta.

Definicija 32. Naj bo $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. *Napolnjena Juliajeva množica* funkcije f je množica vseh $z \in \mathbb{C}$, za katere je njihova orbita za funkcijo f omejena.

Izrek 33 (Lema 17.1 v [4]). *Napolnjena Juliajeva množica je kompaktna množica, ki je sestavljena iz Juliajeve množice in vseh omejenih komponent Fatoujeve množice. Juliajeva množica je topološka meja napolnjene Juliajeve množice.*

Dokaz izreka 33 presega obseg tega dela, vendar pa ga bomo ponazorili na sledečem primeru.

Primer 34. Poglejmo si Fatoujevo, Juliajevo in napolnjeno Juliajevo množico za funkcijo $f(z) = z^2$. Seme $z \in \mathbb{C}$ zapišimo v polarni obliki $z = re^{i\varphi}$. Orbita je potem oblike $\{f^{on}(z)\}_{n \in \mathbb{N}} = re^{i\varphi n}, r^2e^{2i\varphi n}, r^4e^{4i\varphi n}, \dots$. Absolutne vrednosti iteratov so tako odvisne le od začetne oddaljenosti od izhodišča r : $\{|f^{on}(z)|\}_{n \in \mathbb{N}} = r, r^2, r^4, \dots = \{r^{2^n}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Če torej vzamemo seme znotraj enotskega kroga, bo njena orbita konvergirala proti 0, če jo vzamemo zunaj, bo konvergirala proti neskončnosti, orbite semen na enotski krožnici pa bodo po njej krožile. Fatoujeva množica je tako cela ravnina brez enotske krožnice. Ima dve povezani komponenti, eno omejeno (odprt enotski krog) in eno neomejeno (komplement zaprtega enotskega kroga). Juliajeva množica je enotska krožnica. Po definiciji je napolnjena Juliajeva množica sestavljena iz semen, katerih orbite so omejene, torej je to zaprt enotski krog. To se sklada z izrekom 33, saj je to ravno Juliajeva množica in omejena povezana komponenta Fatoujeve. Rob napolnjene Juliajeve množice je tako res Juliajeva množica.

V tem delu nas bodo zanimala napolnjene Juliajeve množice regularnih funkcij, a najprej si pogledjmo kompleksni primer. Začnimo s polinomi. Orbite konstant so točke, zato je cela ravnina napolnjena Juliajeva množica. Če imamo linearni polinom $f(z) = az + b$ in seme z_0 , je prvih nekaj iteratov sledečih.

$$\begin{aligned} f(z) &= az_0 + b \\ (f \circ f)(z) &= a(az_0 + b) + b = a^2z_0 + ab + b = a^2z_0 + (a + 1)b \\ (f \circ f \circ f)(z) &= a(a^2z_0 + ab + b) + b = a^3z_0 + a^2b + ab + b = a^3z_0 + (a^2 + a + 1)b \end{aligned}$$

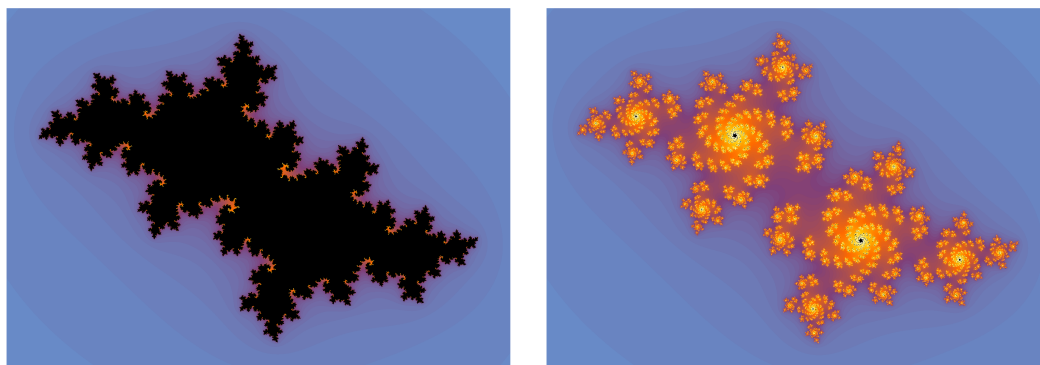
Če je $a = 1$ in $b \neq 0$, je absolutna vrednost iteratov vedno večja, če pa je $b = 0$, je f konstanta. Če je $a \neq 1$, z indukcijo ugotovimo, da je n -ti iterat oblike

$$\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_n(z) = a^n z_0 + \sum_{i=0}^{n-1} a^i b = a^n z_0 + \frac{(a^n - 1)b}{a - 1} = a^n \left(z_0 + \frac{b}{a - 1} \right) - \frac{b}{a - 1}.$$

Vidimo torej, da je v tem primeru napolnjena Juliajeva množica natanko $-\frac{b}{a-1}$, če je $|a| > 1$, sicer pa je cela ravnina.

Zdaj si pogledjmo zanimivejši primer kvadratnih polinomov. Z linearno zamenjavo koordinat lahko vsak polinom oblike $f(z) = az^2 + bz + c$ prevedemo na obliko $f(z) = z^2 + c$ za neki nov

$c \in \mathbb{C}$. Poglejmo si torej napolnjene Juliajeve množice za različne c . Primer za $c = 0$ smo obdelali v primeru 34. Slika 1 prikazuje še dva primera.



Slika 1. Napolnjene Juliajeve množice za funkcijo $f(z) = z^2 + c$ za $c = -0,45 + 0,55i$ (levo) in $c = -0,45 + 0,6i$ (desno). Sliki prikazujeta območje $[-1,6; 1,6] \times [-1,1; 1,1]$.

Trditev 35. Napolnjena Juliajeva množica za $p(z) = z^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$ je simetrična glede na izhodišče.

Dokaz. Naj bo $z_0 \in \mathbb{C}$. Opazimo, da sta orbiti za z_0 in $-z_0$ enaki: ujemata se v prvem iteratu $p(z_0) = p(-z_0) = z_0^2 + c$, ostale pa dobimo z evalviranjem prejšnjih. ■

Trditev 36. Naj bo $c \in \mathbb{C}$. Napolnjene Juliajeve množice za $p_c(z) = z^2 + c$ in $p_{\bar{c}} = z^2 + \bar{c}$ sta si zrcalni preko realne osi.

Dokaz. Naj bo $z \in \mathbb{C}$. Dokazali bomo, da so vsi iterati $p_{\bar{c}}$ za seme \bar{z} po absolutni vrednosti enaki kot iterati p_c za seme z . Poglejmo prvi iterat.

$$p_{\bar{c}}(\bar{z}) = \bar{z}^2 + \bar{c} = \overline{z^2 + c} = \overline{p_c(z)}$$

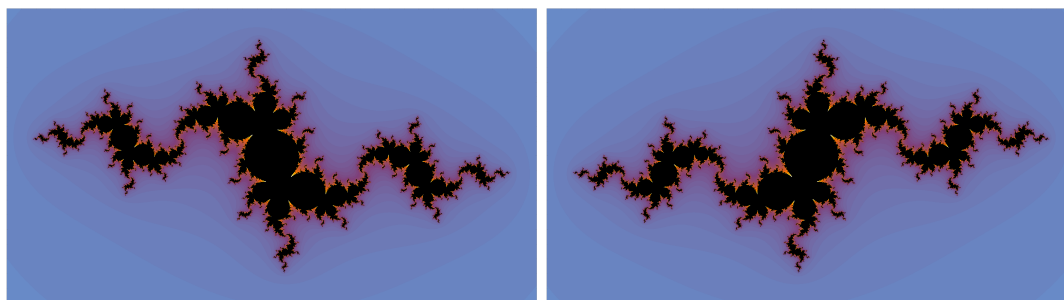
Torej je $|p_{\bar{c}}(\bar{z})| = |p_c(z)|$. Induktivno dokažimo zgornjo enakost za splošen iterat. Predpostavimo $\underbrace{(p_{\bar{c}} \circ \dots \circ p_{\bar{c}})}_n(\bar{z}) = \overline{\underbrace{(p_c \circ \dots \circ p_c)}_n(z)}$ in pokažimo podobno za $n + 1$.

$$\begin{aligned} \underbrace{(p_{\bar{c}} \circ \dots \circ p_{\bar{c}})}_{n+1}(\bar{z}) &= p_{\bar{c}}\left(\underbrace{(p_{\bar{c}} \circ \dots \circ p_{\bar{c}})}_n(\bar{z})\right) = p_{\bar{c}}\left(\overline{\underbrace{(p_c \circ \dots \circ p_c)}_n(z)}\right) \\ &= \overline{\left(\underbrace{(p_c \circ \dots \circ p_c)}_n(z)\right)^2 + \bar{c}} = \overline{\left(\underbrace{(p_c \circ \dots \circ p_c)}_n(z)\right)^2 + c} \\ &= \overline{\underbrace{(p_c \circ \dots \circ p_c)}_{n+1}(z)} \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Posledica 37. Naj bo $c \in \mathbb{C}$. Napolnjene Juliajeve množice za $p_c(z) = z^2 + c$ in $p_{\bar{c}} = z^2 + \bar{c}$ sta si zrcalni preko imaginarne osi.

Dokaz. Vzemimo $z_0 \in \mathbb{C}$. Po trditvi 35 vemo, da je z_0 v napoljnjeni Juliajevi množici za p_c natanko tedaj, ko je v njej $-z_0$. Dalje po 36 vemo, da je to natanko tedaj, ko je $\overline{-z_0}$ v napoljnjeni Juliajevi množici za $p_{\bar{c}}$, kar smo želeli dokazati. ■

Napolnjene Juliajeve množice na sliki 2 sta primerni za vizualizacijo zadnjih dveh trditvev in posledice.



Slika 2. Napolnjeni Juliajevi množici za funkciji $f(z) = z^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}i$ (levo) in $f(z) = z^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}i$ (desno). Sliki prikazujeta območje $[-1,8; 1,8] \times [-1,1]$.

4. Iteracije z regularnimi funkcijami

V kompleksnem primeru je iteracija proces ponavljajočega apliciranja funkcije, kjer se rezultat prejšnje iteracije uporabi kot vhod naslednje. Dobimo zaporedje $z, f(z), f(f(z)), \dots$, ki mu rečemo orbita točke z za funkcijo f . Ker vrednosti regularnega kompozituma ne dobimo tako, da vrednost ene funkcije uporabimo kot vhod naslednje, temveč je potrebno na vsakem koraku izračunati novo funkcijo in vanjo vstaviti izhodiščno točko, definiramo orbito na naslednji način.

Definicija 38. Naj bo $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ regularna funkcija in $q_0 \in \Omega$. Zaporedju

$$\{f^{\bullet n}(q_0)\}_{n=0}^{\infty} = q_0, f(q_0), f^{\bullet 2}(q_0), \dots$$

pravimo *orbita* točke q_0 za funkcijo f , točki q_0 pa *seme* orbite.

Definicija 39. Napolnjena Juliajeva množica K_f za funkcijo f je množica tistih $q_0 \in \Omega$, ki imajo omejene orbite za f .

Opomba 40. Napolnjena Juliajeva množica za regularno funkcijo ima isto definicijo kot v kompleksnem primeru, primerna posplošitev izreka 33 pa avtorju ni znana.

Glavni cilj tega poglavja bo najti napolnjene Juliajeve množice kvadratnih regularnih polinomov. Poglejmo si najprej napolnjene Juliajeve množice linearnih polinomov.

Naj bo $f(q) = qa + b$, $a, b \in \mathbb{H}$.

$$(f \bullet f)(q) = (qa + b)a + b = qa^2 + ba + b = (f \circ f)(q)$$

Opazimo, da se kompozitum regularnih linearnih funkcij ujema z že znanim kompozitumom, zato bo obravnavana njihovih napolnjenih Juliajevih množic enaka kot v kompleksnem primeru.

Poglejmo zato orbite $\{f^{\bullet n}(q_0)\}_{n=0}^{\infty}$, kjer je f kvadratni polinom oblike $f(q) = q^2a + qb + c$ in kjer so koeficienti a, b in c poljubni kvaternioni. Lahko tudi pri regularnih funkcijah s spremembo koordinat obliko poenostavimo?

4.1 Razredi kvadratnih polinomov

V kompleksnem primeru smo z zamenjavo koordinatnega sistema kompleksni kvadratni polinom kompleksnih koeficientov in spremenljivke $g(z) = az^2 + bz + c$ prevedli na obliko $g(z) = z^2 + c$ za neki nov $c \in \mathbb{C}$. To smo dosegli s kompozitumom $(\phi^{-1} \circ g \circ \phi)(z)$, kjer je ϕ linearna preslikava $\phi(z) = \alpha z + \beta$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Analogno želimo poenostaviti obliko kvaternionske funkcije f . Upoštevamo nekomutativnost kvaternionov in dobimo

$$\begin{aligned} (\phi^{-1} \bullet f \bullet \phi)(q) &= \phi^{-1} \bullet \left((q\alpha + \beta)^{*2} a + (q\alpha + \beta) b + c \right) \\ &= \phi^{-1} \bullet \left(q^2 \alpha^2 a + q\alpha\beta a + q\beta\alpha a + \beta^2 a + q\alpha b + \beta b + c \right) \\ &= \left(q^2 \alpha^2 a + q\alpha\beta a + q\beta\alpha a + \beta^2 a + q\alpha b + \beta b + c \right) \alpha^{-1} - \beta \alpha^{-1} \\ &= q^2 \alpha^2 a \alpha^{-1} + q(\alpha\beta a + \beta\alpha a + \alpha b) \alpha^{-1} + (c - \beta + \beta b + \beta^2 a) \alpha^{-1}. \end{aligned}$$

Da bosta koeficienta α in β linearne preslikave ϕ komutirala s koeficienti a , b in c polinoma f , bosta v splošnem morala biti realna. Samo tako bo namreč veljalo $(\phi^{-1} \bullet f \bullet \phi) = (\phi^{-1} \circ f \circ \phi)$, torej gre res za spremembo koordinatnega sistema. Tako lahko kompozitum poenostavimo:

$$g(q) = (\phi^{-1} \bullet f \bullet \phi)(q) = (\phi^{-1} \circ f \circ \phi)(q) = q^2 \alpha a + q(b + 2\beta a) + \frac{c - \beta + \beta b + \beta^2 a}{\alpha}.$$

Tudi splošno velja $g^{\bullet k} = \phi^{-1} \circ f^{\bullet k} \circ \phi$, kar dokažemo z indukcijo. Naj bo $A = \alpha a$, $B = b + 2\beta a$, $C = \frac{c - \beta + \beta b + \beta^2 a}{\alpha}$ in $f^{\bullet k}(q) = \sum_{n \in \mathbb{N}} q^n d_n$. Potem velja

$$\begin{aligned} g^{\bullet(k+1)}(q) &= g \bullet g^{\bullet k}(q) = (\phi^{-1} \circ f \circ \phi) \bullet (\phi^{-1} \circ f^{\bullet k} \circ \phi)(q) \\ &= (q^2 A + qB + C) \bullet \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} (q\alpha + \beta)^{*n} \frac{d_n}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \right) \\ &= \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} (q\alpha + \beta)^{*n} \frac{d_n}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \right) * \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} (q\alpha + \beta)^{*n} \frac{d_n}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \right) A \\ &\quad + \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} (q\alpha + \beta)^{*n} \frac{d_n}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \right) B + C \\ &= \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} (q\alpha + \beta)^{*n} d_n \right) * \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} (q\alpha + \beta)^{*n} d_n \right) \frac{A}{\alpha^2} - \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} (q\alpha + \beta)^{*n} d_n \right) \frac{2\beta A}{\alpha^2} + \frac{\beta^2 A}{\alpha^2} \\ &\quad + \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} (q\alpha + \beta)^{*n} d_n \right) \frac{B}{\alpha} - \frac{\beta B}{\alpha} + C \\ &= \left(\left(\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n d_n \right) * \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n d_n \right) \frac{A}{\alpha^2} + \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n d_n \right) \left(\frac{B}{\alpha} - \frac{2\beta A}{\alpha^2} \right) + \frac{\beta^2 A}{\alpha^2} - \frac{\beta B}{\alpha} + C \right) \circ \phi \right) (q) \\ &= \left(\left(\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n d_n \right) * \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n d_n \right) \frac{a}{\alpha} + \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n d_n \right) \frac{b}{\alpha} + \frac{c}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \right) \circ \phi \right) (q) \\ &= \left(\phi^{-1} \circ \left(\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n d_n \right) * \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n d_n \right) a + \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n d_n \right) b + c \right) \circ \phi \right) (q) \\ &= \left(\phi^{-1} \circ f^{\bullet(k+1)} \circ \phi \right) (q) \end{aligned}$$

Koeficient pri vodilnem členu funkcije g lahko najbolj poenostavimo, če vzamemo $\alpha = \frac{1}{|a|}$. Torej lahko vsak kvadratni polinom predstavimo v obliki $f(q) = q^2 e + qb + c$, $|e| = 1$.

Da se bomo lahko znebili linearnega člena, moramo predpostaviti, da sta a in b kolinearna, torej da velja $b = ka$ za neki $k \in \mathbb{R}$. Potem, če vzamemo $\beta = -\frac{k}{2}$, kompozitum posplošimo na

$$f(q) = q^2 \frac{a}{|a|} + q \left(ka - \frac{2ka}{2} \right) + \tilde{c} = q^2 e + \tilde{c}$$

za neka $e, \tilde{c} \in \mathbb{H}$, $|e| = 1$.

V isto obliko lahko postavimo kvadratni polinom, čigar vsi koeficienti so iz iste rezine \mathbb{C}_I . Razlog je v tem, da sta lahko v tem primeru koeficienta α in β linearne preslikave ϕ iz rezine \mathbb{C}_I , saj bosta komutirala s koeficienti polinoma. S spremenljivko q v splošnem ne bi komutirala, a to po definiciji kompozituma regularnih funkcij ni relevantno. Zato bo tudi v tem primeru veljalo $(\phi^{-1} \bullet f \bullet \phi) = (\phi^{-1} \circ f \circ \phi)$. Če vzamemo $\alpha = a^{-1}$ in $\beta = \frac{-b}{2a}$, dobimo

$$f(q) = q^2 \frac{a}{a} + q \left(b - 2a \frac{b}{2a} \right) + \tilde{c} = q^2 + \tilde{c}$$

za neki $\tilde{c} \in \mathbb{H}$. Zato je dinamika določena s \tilde{c} .

Opomba 41. Če so vsi koeficienti f iz iste rezine \mathbb{C}_I rečemo, da funkcija ohranja rezino, saj za vsak $q \in \mathbb{C}_I$ velja $f(q) \in \mathbb{C}_I$. Razlog za to je, da je rezina zaprta za množenje in seštevanje.

V nadaljevanju bomo obravnavali le še kvadratne polinome z enotskim vodilnim členom, saj se da vsak kvadratni polinom s spremembo koordinat spraviti v to obliko. Pogledali bomo njihove orbite za različna semena, njihovo omejenost pa predstavili z napolnjenimi Juliajevimi množicami. Poleg tega bomo posebno pozornost posvetili zgornjima razredoma polinomov, ki se jih lahko napiše brez linearne člena.

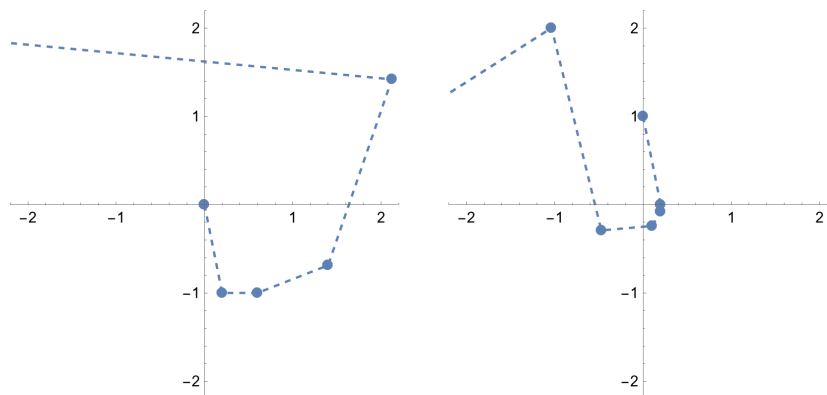
4.2 Orbite

Spomnimo se, da je za regularno funkcijo f na \mathbb{H} orbita semena q_0 definirana kot zaporedje kvaternionov $\{f^{\bullet n}(q_0)\}_{n=0}^{\infty} = q_0, f(q_0), f^{\bullet 2}(q_0), \dots$. Ker ima vsak člen štiri komponente, si zaporedje težko predstavljamo, zato bo vizualizacija potekala prek dveh projekcij zaporedja, eno na rezino $\mathbb{C}_i = \{x + iy; x, y \in \mathbb{R}\}$ in drugo na ravnino $\{jx + ky; x, y \in \mathbb{R}\}$, ki jo poimenujemo *ravnina jk*.

Primer 42. Imejmo funkcijo $f(q) = q^2 i + \frac{1}{5} + \frac{j}{5}$ in seme $q_0 = k$.

$$\begin{aligned} f(q_0) &= \left(q^2 i + \frac{1}{5} + \frac{j}{5} \right) (k) = k^2 i + \frac{1}{5} + \frac{j}{5} = \frac{1}{5} - i + \frac{j}{5} \\ f^{\bullet 2}(q_0) &= \left(\left(q^2 i + \frac{1}{5} + \frac{j}{5} \right) * \left(q^2 i + \frac{1}{5} + \frac{j}{5} \right) i + \frac{1}{5} + \frac{j}{5} \right) (k) \\ &= \left(\left(q^4 (-1) + q^2 \left(\frac{i}{5} + \frac{ij}{5} + \frac{i}{5} + \frac{ji}{5} \right) + \frac{1}{25} + \frac{j}{25} + \frac{j}{25} + \frac{j^2}{25} \right) i + \frac{1}{5} + \frac{j}{5} \right) (k) \\ &= \left(q^4 (-i) + q^2 \frac{-2}{5} - \frac{2k}{25} + \frac{1}{5} + \frac{j}{5} \right) (k) \\ &= k^4 (-i) + k^2 \frac{-2}{5} - \frac{2k}{25} + \frac{1}{5} + \frac{j}{5} = \frac{3}{5} - i + \frac{j}{5} - \frac{2k}{25} \end{aligned}$$

Prvi trije členi orbite so torej $k, \frac{1}{5} - i + \frac{j}{5}$ in $\frac{3}{5} - i + \frac{j}{5} - \frac{2k}{25}$. Na sliki 3 je prikazanih prvih 6 iteratov.



Slika 3. Projekciji prvih 6 členov orbite za funkcijo $f(q) = q^2 i + \frac{1}{5} + \frac{j}{5}$ in seme $q_0 = k$ na kompleksno ravnino (levo) ter na ravnino jk (desno).

Omejenost orbite bomo testirali računalniško. Izračunali bomo prvih nekaj iteratov in pogledali, pri katerem iteratu gre orbita izven krogle s središčem v izhodišču in določenim polmerom. Tako bomo dobili barvno lestvico, ne bomo pa vedeli točno, za katera semena so orbite dejansko neomejene, vedeli bomo le, kako hitro se oddalijo od izhodišča.

Spodnji izrek nam pove, da obstaja samo ena neomejena komponenta, ki vsebuje komplement dovolj velike krogle. Iterati tam konvergirajo proti neskončnosti.

Izrek 43. Naj bo $f(q) = q^2e + qb + c$ regularna funkcija z $|e| = 1$. Če za seme $q_0 \in \mathbb{H}$ velja

$$|q_0| > \max\{|c|, 2 + |b|\},$$

je njena orbita neomejena.

Dokaz. Dokazali bomo, da bo vsak naslednji iterat po absolutni vrednosti še večji od prejšnjega.

$$|f^{\bullet(n+1)}(q_0)| > |f^{\bullet n}(q_0)|$$

Uporabili bomo indukcijo. Najprej dokažimo bazo indukcije, torej neenakost za $n = 0$.

$$\begin{aligned} |f(q_0)| &= |q_0^2e + q_0b + c| \geq |q_0^2e| - |q_0b| - |c| \\ &= |q_0^2| - |q_0||b| - |c| \\ &> |q_0^2| - |q_0||b| - |q_0| \\ &= |q_0|(|q_0| - |b| - 1) > |q_0| \end{aligned}$$

Na prehodu med drugo in tretjo vrstico smo upoštevali $|q_0| > |c|$, na zadnji neenakosti pa $|q_0| > 2 + |b|$.

Predpostavimo zdaj, da trditev velja za neki $n \in \mathbb{N}$. Vemo

$$f^{\bullet(n+1)}(q) = (f \bullet f^{\bullet n})(q) = (f^{\bullet n} * f^{\bullet n})(q)e + f^{\bullet n}(q)b + c.$$

Z upoštevanjem leme 18 pa še dobimo

$$f^{\bullet(n+1)}(q) = f^{\bullet n}(q) f^{\bullet n}(f(q)^{-1} qf(q))e + f^{\bullet n}(q)b + c.$$

Označimo $q_1 = f(q)^{-1} qf(q)$ in opazimo, da je q_1 po absolutni vrednosti enak q :

$$|q_1| = |f(q)^{-1} qf(q)| = |f(q)^{-1}| |q| |f(q)| = |q| |f(q)|^{-1} |f(q)| = |q|.$$

Torej če vzamemo q_0 , za katerega je $|q_0| > \max\{|c|, 2 + |b|\}$, potem za $q_1 = f(q_0)^{-1} q_0 f(q_0)$ velja $|q_1| = |q_0| > \max\{|c|, 2 + |b|\}$ in zato

$$\begin{aligned} |f^{\bullet(n+1)}(q_0)| &= |f^{\bullet n}(q_0) f^{\bullet n}(q_1)e + f^{\bullet n}(q_0)b + c| \\ &\geq |f^{\bullet n}(q_0) f^{\bullet n}(q_1)e| - |f^{\bullet n}(q_0)b| - |c| \\ &= |f^{\bullet n}(q_0)| |f^{\bullet n}(q_1)| - |f^{\bullet n}(q_0)||b| - |c| \\ &> |f^{\bullet n}(q_0)| |f^{\bullet n}(q_1)| - |f^{\bullet n}(q_0)||b| - |f^{\bullet n}(q_0)| \\ &= |f^{\bullet n}(q_0)| (|f^{\bullet n}(q_1)| - |b| - 1) > |q_0|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Posledica 44. Napolnjena Juliajeva množica za regularni kvadratni polinom je omejena.

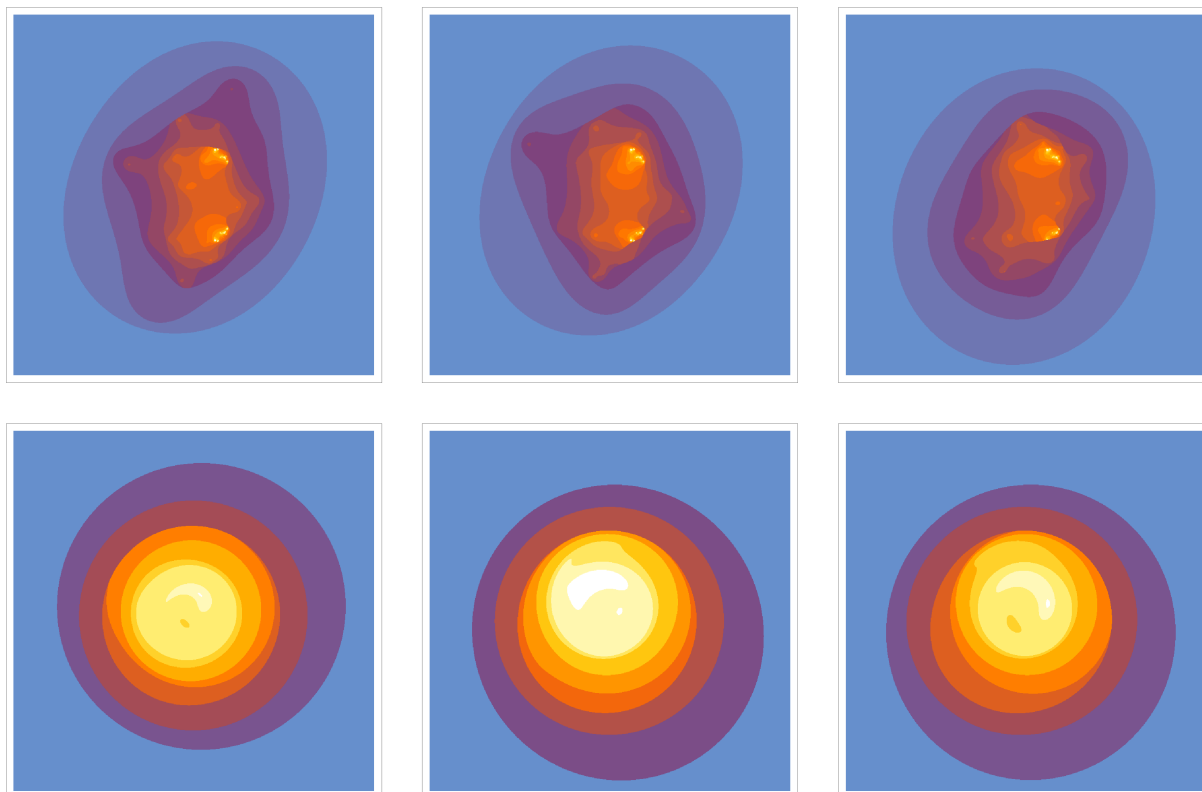
Opomba 45. Iz izreka 43 ne moremo sklepati, da so vsi nadaljni iterati po absolutni vrednosti vedno večji, če je kakšen iterat po absolutni vrednosti večji od $\max\{|c|, 2 + |b|\}$, kot lahko pri kompleksnem primeru, saj naslednjega iterata ne dobimo kot evalvacije prejšnjega. Še več, to niti ne drži, kar vidimo na primeru za polinom $f(q) = q^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}k \right) + q\frac{1}{2}j + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k$ in seme $q_0 = 0,375 - 0,37k$:

$$\begin{aligned} |f^{\bullet 8}(q_0)| &\approx 2,79 > \max\{|c|, 2 + |b|\} = \max\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, 2 + \frac{1}{2}\right\} = 2,5 \\ |f^{\bullet 9}(q_0)| &\approx 0,76 \end{aligned}$$

4.3 Napolnjene Juliajeve množice

Napolnjene Juliajeve množice so objekt v štirih dimenzijah, zato si bomo za vizualizacijo pomagali s preseki z različnimi ravninami.

Primer 46. Na sliki 4 je primer presekov napolnjene Juliajeve množice z različnimi ravninami za funkcijo $f(q) = q^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}k \right) + q\frac{1}{2}j + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}k \right)$.



Slika 4. Preseki napolnjene Juliajeve množice za funkcijo $f(q) = q^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}k \right) + q\frac{1}{2}j + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}k \right)$ z (od zgoraj levo do spodaj desno) rezinami $\mathbb{C}_i = \mathbb{C}$, \mathbb{C}_j , \mathbb{C}_k ter ravninami ij , ik , jk . Na vseh slikah je prikazano območje $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

Število uporabljenih iteracij na tej sliki je le 22. Čemu tako majhno število je razloženo v razdelku 5. Na belih območjih je vseh 22 iteratov omejenih, oziroma še zmeraj znotraj krogle s središčem v izhodišču in polmerom 3. Temnejša kot je barva prej gredo iterati izven te krogle. Na svetlo modrem območju je že prvi iterat izven krogle.

S pomočjo naslednjih trditev si bomo lahko predstavljali, kako napolnjene Juliajeve množice izgledajo za nakatero razrede kvadratnih polinomov.

Lema 47. Naj bo $f(q) = q^2a + c$ regularna funkcija. V vseh njenih iteratih f , $f^{\bullet 2}$, $f^{\bullet 3}, \dots$ so prisotne le sode potence spremenljivke q .

Dokaz. Z indukcijo dokažimo, da je n -ti iterat oblike

$$f^{\bullet n}(q) = \sum_{k \in \mathbb{N}} q^k a_k, \quad a_k = 0 \text{ za lihe } k.$$

Baza indukcije je že dokazana s prvim iteratom, ki je funkcija f . Naj trditev velja za $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} f^{\bullet(n+1)}(q) &= (f \bullet f^{\bullet n})(q) = (f^{\bullet n} * f^{\bullet n})(q) a + c \\ &= \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} q^k a_k * \sum_{k \in \mathbb{N}} q^k a_k \right) a + c = \sum_{k \in \mathbb{N}} q^k \sum_{j=0}^k a_j a_{k-j} a + c \end{aligned}$$

Dokazujemo, da je koeficient pri lihih členih ničeln, torej da velja $\sum_{j=0}^k a_j a_{k-j} a = 0$ za lihe k . Dokazali bomo, da je celo vsak člen v tej vsoti enak 0. Za vsak člen $a_j a_{k-j} a$ ločimo dva primera:

- Če je j lih, je $a_j = 0$ po indukcijski predpostavki.
- Če je j sod, je $a_{k-j} = 0$ po indukcijski predpostavki, saj je k lih in zato $k-j$ lih. ■

Posledica 48. Naj bo $f(q) = q^2 a + c$ regularna funkcija. Potem je njena napolnjena Juliajeva množica simetrična glede na izhodišče.

Dokaz. Po lemi 47 vemo, da je n -ti iterat oblike

$$f^{\bullet n}(q) = \sum_{k \in \mathbb{N}} q^{2k} a_{2k},$$

zato velja

$$f^{\bullet n}(-q) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (-q)^{2k} a_{2k} = \sum_{k \in \mathbb{N}} q^{2k} a_{2k} = f^{\bullet n}(q).$$

To pomeni, da je vrednost vsakega iterata enaka za nasprotna si kvaterniona, zato bo tudi zaporedje absolutnih vrednosti iteratov enako za nasprotni si točki, kar ravno predstavlja njuni orbiti. ■

Izrek 49. Presek napolnjene Juliajeve množice regularne funkcije oblike $f(q) = q^2 a + c$ z imaginarnim prostorom $\{x\mathbb{S} \mid x \in \mathbb{R}\}$ je krožno simetričen, torej se z rotacijo za poljuben kot preslika sam vase.

Dokaz. Dokazujemo, da so orbite kvaternionov oblike yI za $I \in \mathbb{S}$ odvisne le od y in ne od I , torej da je $f^{\bullet n}(yI) = g_n(y)$ za vse $n \in \mathbb{N}$ in neke kvaternionске funkcije g_n . Poglejmo prvi iterat.

$$f(yI) = (q^2 a + c)(yI) = (yI)^2 a + c = y^2 I^2 a + c = -y^2 a + c$$

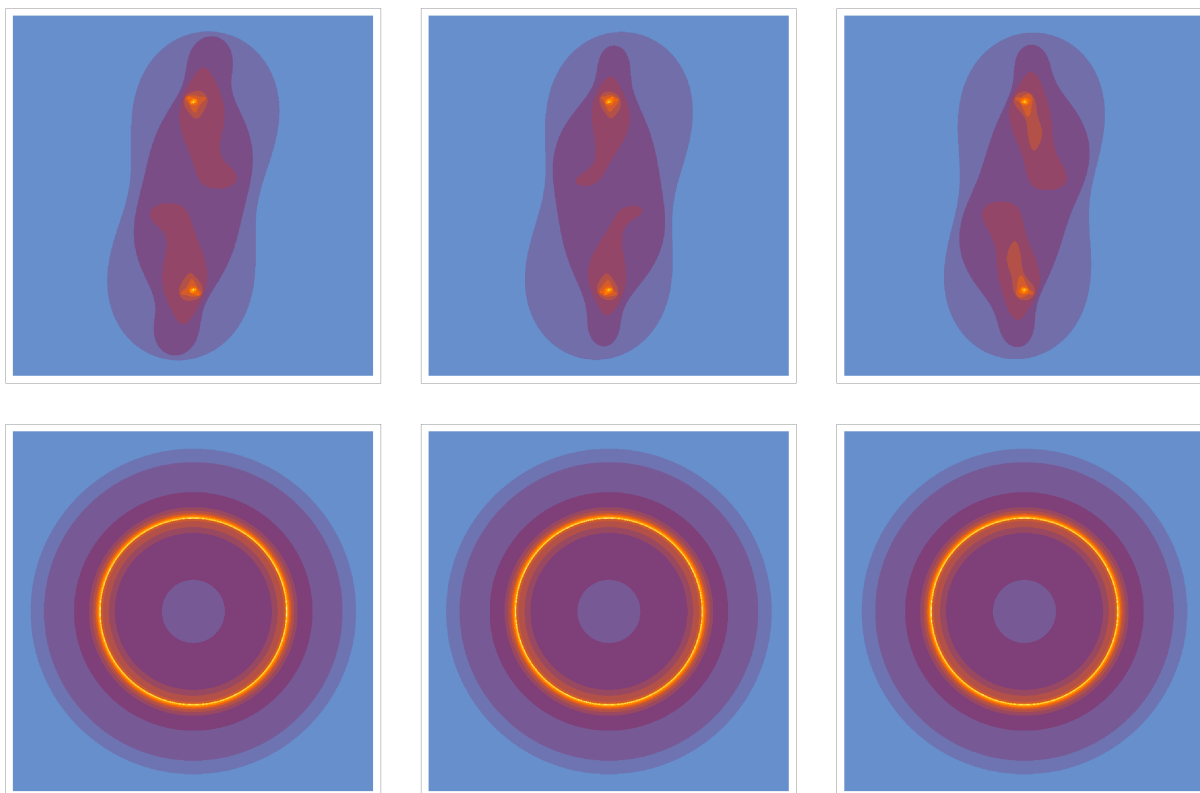
Res ni odvisen od I . Razlog je v sodi potenci spremenljivke. Velja, da je vsaka soda potenca yI odvisna le od y :

$$(yI)^{2k} = \left((yI)^2 \right)^k = (-y^2)^k.$$

Po lemi 47 vemo, da je vsak iterat sestavljen le iz sodih potenc spremenljivke, zato je trditev dokazana. ■

Opomba 50. Če je napolnjena Juliajeva množica krožno simetrična na preseku z imaginarnim prostorom, je taka tudi na preseku z imaginarnimi ravninami $\{xI + yJ \mid I, J \in \mathbb{S}; I \perp J; x, y \in \mathbb{R}\}$. Za vizualizacijo je primeren naslednji primer.

Primer 51. Slika 5 predstavlja preseke napolnjene Juliajeve množice za $f(q) = q^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} i + \frac{1}{2} k \right) + \left(\frac{1}{2} + i + k \right)$ z različnimi ravninami.



Slika 5. Preseki napolnjene Juliajeve množice za funkcijo $f(q) = q^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}k \right) + \left(\frac{1}{2} + i + k \right)$ z (od zgoraj levo do spodaj desno) rezinami $\mathbb{C}_i = \mathbb{C}, \mathbb{C}_j, \mathbb{C}_k$ ter ravninami ij, ik, jk . Na vseh slikah je prikazano območje $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

Pogledali si bomo poseben primer, ko so vsi koeficienti polinoma iz iste rezine $\mathbb{C}_I, I \in \mathbb{S}$. Vemo, da ga lahko v \mathbb{C}_I s kompleksno spremembo koordinat postavimo v obliko $f(q) = q^2 + c$ za neki $c \in \mathbb{C}_I$. To pomeni, da je dovolj, če vemo, kako izgleda napolnjena Juliajeva množica za polinom $f(q) = q^2 + c$.

Trditev 52. Naj bo regularna funkcija f oblike $f(q) = q^2 + c$ za neki $c = x + yI, I \in \mathbb{S}, x, y \in \mathbb{R}$. Potem je presek njene napolnjene Juliajeve množice z rezino \mathbb{C}_I enak napoljnjeni Juliajevi množici za polinom kompleksne spremenljivke $p(z) = z^2 + (x + yi)$.

Dokaz. Če ravnino \mathbb{C}_I identificiramo s \mathbb{C} , je na tej ravnini $f = p$, saj kvaternioni iz iste rezine komutirajo. ■

Primer 53. Naj bo $f(q) = q^2 + 1 + i + k$. Če $c = 1 + i + k$ napišemo v obliki $c = x + yI$ za neki $I \in \mathbb{S}$, dobimo

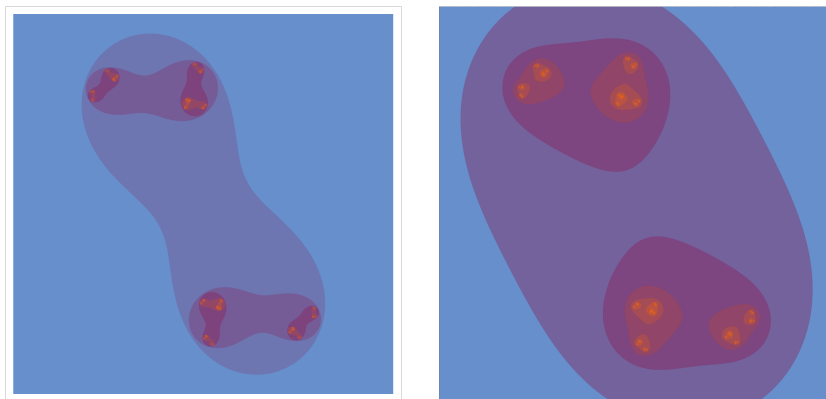
$$x = 1,$$

$$yI = i + k = |i + k| \frac{i + k}{|i + k|} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}(i + k)}{2}.$$

Vzemimo torej $y = \sqrt{2}$ in pa $I = \frac{\sqrt{2}(i+k)}{2}$. Preverimo še, da je $I \in \mathbb{S}$.

$$I^2 = \frac{(\sqrt{2}(i+k))^2}{4} = \frac{2(i^2 + ik + ki + k^2)}{4} = \frac{-1 - j + j - 1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Na sliki 6 si zato pogledajmo projekcijo napolnjene Juliajeve množice za f na rezino \mathbb{C}_I za $I = \frac{\sqrt{2}(i+k)}{2}$ in pa kompleksno napolnjeno Juliajevo množico za $p(z) = z^2 + 1 + \sqrt{2}i$:



Slika 6. Leva slika prikazuje presek napolnjene Juliajeve množice za $f(q) = q^2 + 1 + i + k$ z rezino \mathbb{C}_I za $I = \frac{\sqrt{2}(i+k)}{2}$, desna pa kompleksno napolnjeno Juliajevo množico za $p(z) = z^2 + 1 + \sqrt{2}i$. Na slikah je prikazano območje $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

Izrek 54. Naj regularna funkcija $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} q^n a_n$ definirana na \mathbb{H} ohranja rezino \mathbb{C}_I , torej naj velja $a_n \in \mathbb{C}_I$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Potem za $J \neq \pm I$ njena napolnjena Juliajeva množica vsebuje točko $q_J = x + yJ$ natanko tedaj, ko vsebuje točki $q_I = x + yI$ in $\bar{q}_I = x - yI$.

Dokaz. Dokazujemo, da je zaporedje $\{|f^{\bullet n}(q_J)|\}_{n \in \mathbb{N}}$ omejeno natanko tedaj, ko sta omejeni zaporedji $\{|f^{\bullet n}(q_I)|\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\{|f^{\bullet n}(\bar{q}_I)|\}_{n \in \mathbb{N}}$. Po posledici 27 vemo, da velja

$$\begin{aligned} f^{\bullet n}(q_J) &= \frac{1 - JI}{2} f^{\bullet n}(q_I) + \frac{1 + JI}{2} f^{\bullet n}(\bar{q}_I) \\ &= \frac{1}{2} (f^{\bullet n}(q_I) + f^{\bullet n}(\bar{q}_I)) + \frac{JI}{2} (f^{\bullet n}(\bar{q}_I) - f^{\bullet n}(q_I)). \end{aligned}$$

Opazimo, da če sta zaporedji $\{|f^{\bullet n}(\bar{q}_I)|\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\{|f^{\bullet n}(q_I)|\}_{n \in \mathbb{N}}$ obe omejeni z nekim $M \in \mathbb{R}$, je omejeno tudi $\{|f^{\bullet n}(q_J)|\}_{n \in \mathbb{N}}$, saj velja

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |f^{\bullet n}(q_J)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1 - JI}{2} f^{\bullet n}(q_I) + \frac{1 + JI}{2} f^{\bullet n}(\bar{q}_I) \right| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1 - JI}{2} f^{\bullet n}(q_I) \right| + \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1 + JI}{2} f^{\bullet n}(\bar{q}_I) \right| \\ &\leq M \left(\frac{|1 - JI|}{2} + \frac{|1 + JI|}{2} \right) \leq M(1 + |JI|) = 2M. \end{aligned}$$

Poglejmo še primer, ko je vsaj eno od zaporedij $\{|f^{\bullet n}(\bar{q}_I)|\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\{|f^{\bullet n}(q_I)|\}_{n \in \mathbb{N}}$ neomejeno. Brez škode za splošnost naj bo to $\{|f^{\bullet n}(q_I)|\}_{n \in \mathbb{N}}$. Podobne direktne ocene ne moremo podati, saj je lahko vsota dveh neomejenih zaporedij omejena. Ker iterati funkcije f ohranjajo rezino \mathbb{C}_I , lahko označimo $f^{\bullet n}(q_I) = \alpha_n + \beta_n I$ in $f^{\bullet n}(\bar{q}_I) = \gamma_n + \delta_n I$ za neke $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f^{\bullet n}(q_J) &= \frac{1}{2} \left((\alpha_n + \beta_n I) + (\gamma_n + \delta_n I) \right) + \frac{JI}{2} \left((\gamma_n + \delta_n I) - (\alpha_n + \beta_n I) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left((\alpha_n + \gamma_n) + (\beta_n + \delta_n) I \right) + \frac{JI}{2} \left((\gamma_n - \alpha_n) + (\delta_n - \beta_n) I \right) \\ &= \frac{1}{2} (\alpha_n + \gamma_n) + \frac{1}{2} (\beta_n + \delta_n) I + \frac{1}{2} (\gamma_n - \alpha_n) JI + \frac{1}{2} (\delta_n - \beta_n) JII \end{aligned}$$

Če enačbo pomnožimo z 2, upoštevamo asociativnost množenja $JII = J(II) = -J$ in se spomnimo vektorskega množenja kvaternionov $JI = -\langle J, I \rangle + J \times I$, lahko napišemo

$$\begin{aligned} 2f^{\bullet n}(q_J) &= (\alpha_n + \gamma_n) + (\beta_n + \delta_n) I - \langle J, I \rangle (\gamma_n - \alpha_n) + (\gamma_n - \alpha_n) J \times I - (\delta_n - \beta_n) J \\ &= \left(\alpha_n + \gamma_n + \langle J, I \rangle (\alpha_n - \gamma_n) \right) + (\beta_n + \delta_n) I + (\beta_n - \delta_n) J + (\gamma_n - \alpha_n) J \times I. \end{aligned}$$

Ker so vektorji $1, I, J$ in $J \times I$ linearno neodvisni, bo absolutna vrednost iteratov $f^{\bullet n}(q_J)$ naraščala preko vseh meja, brž ko bo neomejeno kakšno od zaporedij $\{ |(\alpha_n + \gamma_n) + \langle J, I \rangle (\alpha_n - \gamma_n)| \}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{ |\beta_n + \delta_n| \}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{ |\beta_n - \delta_n| \}_{n \in \mathbb{N}}$ ter $\{ |\gamma_n - \alpha_n| \}_{n \in \mathbb{N}}$. Zato bo dovolj, če pokažemo, da ta štiri zaporedja ne morejo biti vsa omejena. Na tej točki se opremo na predpostavko. Ker je zaporedje $\{ |f^{\bullet n}(q_I)| \}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ neomejeno, je gotovo neomejeno vsaj eno izmed zaporedij $\{ |\alpha_n| \}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\{ |\beta_n| \}_{n \in \mathbb{N}}$.

Naj bo neomejeno zaporedje $\{ |\beta_n| \}_{n \in \mathbb{N}}$. Poglejmo si zaporedje $\{ |\beta_n - \delta_n| \}_{n \in \mathbb{N}}$. Če je neomejeno, smo končali. Lahko pa je omejeno pod potrebnim pogojem, da je tudi $\{ |\delta_n| \}_{n \in \mathbb{N}}$ neomejeno. Iz $|\beta_n - \delta_n| \leq M$ sledi $\delta_n \in [\beta_n - M, \beta_n + M]$ in zato $\beta_n + \delta_n \in [2\beta_n - M, 2\beta_n + M]$. Torej je v tem primeru zaporedje $\{ |\beta_n + \delta_n| \}_{n \in \mathbb{N}}$ neomejeno.

Sicer pa mora biti zaporedje $\{ |\alpha_n| \}_{n \in \mathbb{N}}$ neomejeno. Podobno opazimo, da če je zaporedje $\{ |\gamma_n - \alpha_n| \}_{n \in \mathbb{N}}$ omejeno, je neomejeno zaporedje $\{ |\gamma_n + \alpha_n| \}_{n \in \mathbb{N}}$ in je zato neomejeno tudi zaporedje $\{ |(\alpha_n + \gamma_n) + \langle J, I \rangle (\alpha_n - \gamma_n)| \}_{n \in \mathbb{N}}$. Ugotovili smo, da v vsakem primeru vsaj ena od komponent $2f^{\bullet n}(q_J)$ po absolutni vrednosti narašča preko vseh meja, zato je zaporedje $\{ |f^{\bullet n}(q_J)| \}_{n \in \mathbb{N}}$ neomejeno. ■

Izrek 55. Naj regularna funkcija $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} q^n a_n$ definirana na \mathbb{H} kot prej ohranja rezino \mathbb{C}_I . Potem so za $J \perp I$ členi orbite f za semeni $q_J \in \mathbb{C}_J$ in \bar{q}_J po absolutni vrednosti enaki.

Dokaz. Naj bo $q_J = x + yJ$ in $q_I = x + yI$. Po posledici 27 dobimo

$$f^{\bullet n}(q_J) = \frac{1}{2} \left(f^{\bullet n}(q_I) + f^{\bullet n}(\bar{q}_I) \right) + \frac{JI}{2} \left(f^{\bullet n}(\bar{q}_I) - f^{\bullet n}(q_I) \right).$$

in kot prej pišemo $f^{\bullet n}(q_I) = \alpha_n + \beta_n I$ in $f^{\bullet n}(\bar{q}_I) = \gamma_n + \delta_n I$. V dokazu prejšnjega izreka smo že izračunali, da je

$$2f^{\bullet n}(q_J) = \left(\alpha_n + \gamma_n + \langle J, I \rangle (\alpha_n - \gamma_n) \right) + (\beta_n + \delta_n) I + (\beta_n - \delta_n) J + (\gamma_n - \alpha_n) J \times I,$$

če pa upoštevamo še pravokotnost I in J , je $\langle J, I \rangle = 0$ in zato velja

$$2f^{\bullet n}(q_J) = (\alpha_n + \gamma_n) + (\beta_n + \delta_n) I + (\beta_n - \delta_n) J + (\gamma_n - \alpha_n) J \times I.$$

Opazimo, da smo tako kvaternion $2f^{\bullet n}(q_J)$ razpisali po ortonormirani bazi. Zato je njegova absolutna vrednost koren vsote kvadratov komponent.

$$\begin{aligned} |f^{\bullet n}(q_J)| &= \frac{1}{2} \sqrt{(\alpha_n + \gamma_n)^2 + (\beta_n + \delta_n)^2 + (\beta_n - \delta_n)^2 + (\gamma_n - \alpha_n)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_n^2 + 2\alpha\gamma + \gamma_n^2 + \beta_n^2 + 2\beta\delta + \delta_n^2 + \beta_n^2 - 2\beta\delta + \delta_n^2 + \alpha_n^2 - 2\alpha\gamma + \gamma_n^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2(\alpha_n^2 + \beta_n^2 + \gamma_n^2 + \delta_n^2)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{|f^{\bullet n}(q_I)|^2 + |f^{\bullet n}(\bar{q}_I)|^2} \end{aligned}$$

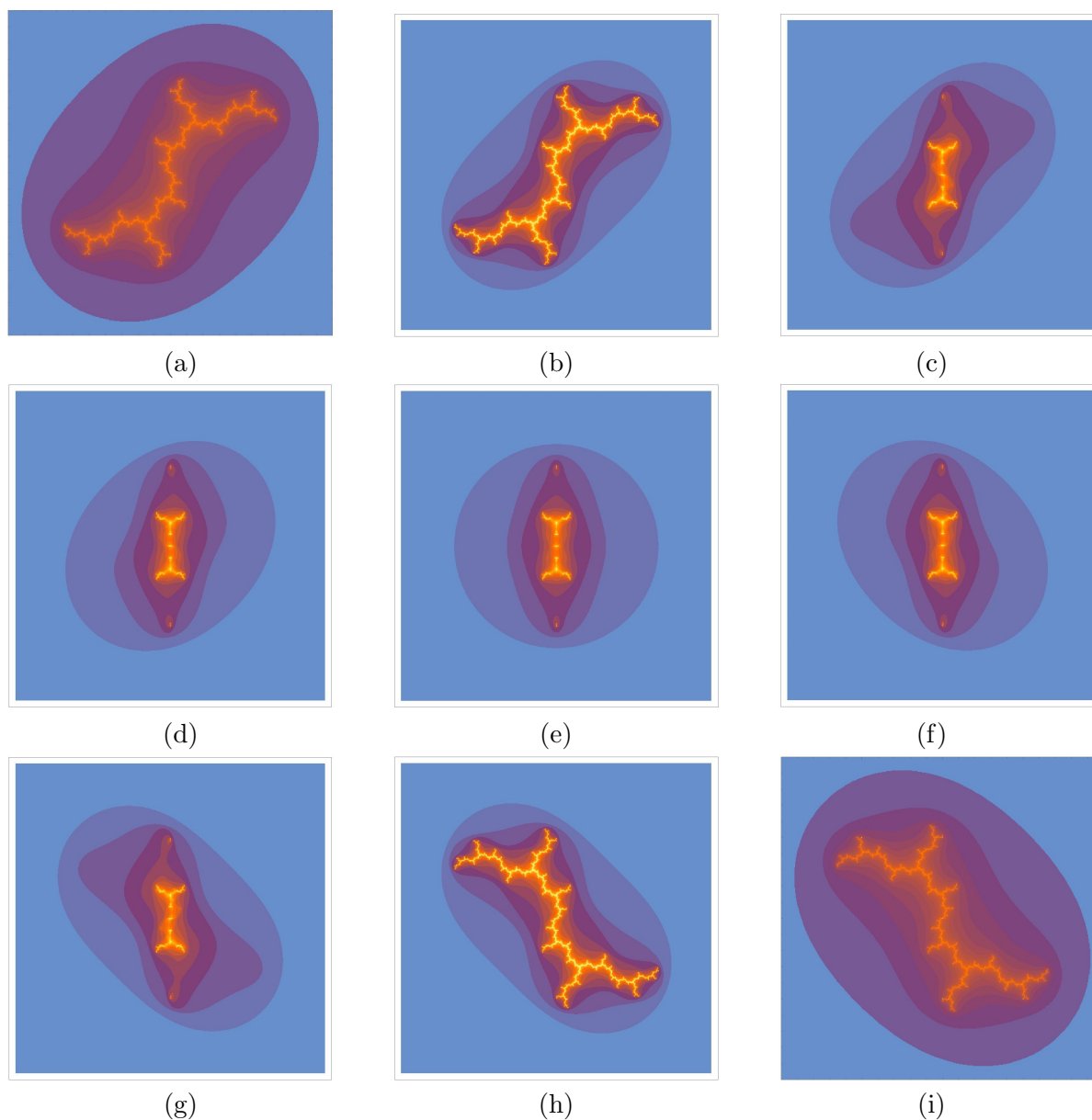
Vidimo, da so absolutne vrednosti iteratov za \bar{q}_J enake:

$$|f^{\bullet n}(\bar{q}_J)| = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{|f^{\bullet n}(\bar{q}_I)|^2 + |f^{\bullet n}(q_I)|^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{|f^{\bullet n}(\bar{q}_I)|^2 + |f^{\bullet n}(q_I)|^2}. \quad \blacksquare$$

Sedaj trditve združimo. Imejmo polinom $f(q) = q^2 + c$, $c = x + yI$. Potem je njegova napolnjena Juliajeva množica na rezinah \mathbb{C}_I in \mathbb{C}_{-I} enaka kompleksnima napolnjenima Juliajevima množicama za $c = x + yi$ in $\bar{c} = x - yi$. Rezini \mathbb{C}_I in \mathbb{C}_{-I} sta kot množici enaki, vizualiziramo pa si jih prezrcaljene čez realno os. To se sklada s trditvijo 36. Presek z drugimi rezinami dobimo tako, da tiste $q \in \mathbb{C}_I$, za katere je tudi \bar{q} v napolnjeni Juliajevi množici, zavrtimo okoli realne osi. Če

imamo torej $q_J = \alpha + \beta J$, je ta v napolnjeni Juliajevi množici, če sta v njej $q_I = \alpha + \beta I$ in $\overline{q_I} = \alpha - \beta I$, kar je natanko tedaj, ko sta $q_i = \alpha + \beta i$ in $\overline{q_i} = \alpha - \beta i$ v napolnjeni Juliajevi množici za $c = x + yi$ ali po trditvi 36 ekvivalentno, za $\bar{c} = x - yi$. Po trditvi 36 je to natanko tedaj, ko je q_i v preseku kompleksnih napolnjenih Juliajevih množic za c in \bar{c} . Torej je presek z rezino \mathbb{C}_J enak preseku kompleksnih napolnjenih Juliajevih množic za c in \bar{c} . Poleg tega velja, da je na rezinah, ki so pravokotne na \mathbb{C}_I , konvergenca simetrična preko realne osi ter da je na preseku z imaginarnim prostorom napolnjena Juliajeva množica krožno simetrična.

Primer 56. Poglejmo si presek napolnjene Juliajeve množice za $f(q) = q^2 + i$ na nekaterih rezinah.



Slika 7. Polji (a) in (i) predstavljata kompleksni napolnjeni Juliajevi množici za $p_{-i}(z) = z^2 - i$ in $p_i(z) = z^2 + i$. Na vmesnih poljih je presek napolnjene Juliajeve množice za $f(q) = q^2 + i$ z rezinami (od polj (b) do (h)): \mathbb{C}_{-i} , $\mathbb{C}_{-\frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j}$, $\mathbb{C}_{-\frac{1}{3}i + \frac{2}{3}j}$, \mathbb{C}_j , $\mathbb{C}_{\frac{1}{3}i + \frac{2}{3}j}$, $\mathbb{C}_{\frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j}$, \mathbb{C}_i . Na vseh poljih je prikazano območje $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

Polje (a) na sliki 7 prikazuje kompleksno napolnjeno Juliajevo množico za $p_{-i}(z) = z^2 - i$. Vidimo, da se ujema s poljem (b), na katerem je presek napolnjene Juliajeve množice za f z rezino \mathbb{C}_{-i} . Prav tako se ujemata polji (h) in (i), ki prikazujeta presek z rezino \mathbb{C}_i ter kompleksno Juliajevo množico

za $p_i(z) = z^2 + i$. Polja od (b) do (h) prikazujejo rezine \mathbb{C}_I , kjer gre I od $-i$ preko j do i . Vidimo, da je presek napolnjene Juliajeve množice na vmesnih ravninah presek kompleksnih napolnjenih Juliajevih množic za p_i ter $p_{\bar{i}}$. Poleg tega je na polju (e), ki prikazuje rezino \mathbb{C}_j , konvergenca simetrična glede na realno os.

5. Programska koda

Za risanje napolnjenih Juliajevih množic holomorfnih funkcij je v Mathematici že vgrajena funkcija *JuliaSetPlot*. Podobne funkcije za napolnjene Juliajeve množice regularnih funkcij ni, še več, niti operatorja $*$ ni definiranega. Zato je bilo treba definirati to množenje in preko tega iterate. Množenje $*$ bomo označili kot *NCM* in namesto $f * g$ pisali *NCM[f,g]*. Ker se izkaže, da je tako množenje prepotratno z operacijami, bomo opisali nov algoritem za računanje iteratov.

Programska koda 1 Definicija produkta regularnih funkcij z lastnostmi.

```

1: NCM [] :=Quaternion [1, 0, 0, 0];                                ▷ Določimo privzete vrednosti.
2: Default [NCM] :=Quaternion [1, 0, 0, 0];
3: NCM [x_Quaternion$Quaternion] :=x;
4: Attributes [NCM] = {OneIdentity};
5: NCM [x___, NCM [y1_, y2___], z___] :=                               ▷ Razrešimo gnezdene ukaze.
    NCM [x, y1, y2, z] /;Length[{y2}] > 0
6: NCM [x___, f_ [y1_, y2___], z___] /;                               ▷ Distributiramo.
    MemberQ[{Plus, List, Equal, Rule, RuleDelayed}, f] :=
    f@@@ [NCM [x, #1, z] &] /@ {y1, y2}
7: NCM [x_, y_] :=Module[{xi, yi, cqy, cqx},                          ▷ Premaknemo q na prvo mesto.
    xi = {x} /.q^n->
    Sequence@@ConstantArray [q, n] /;IntegerQ [n] ^ n > 1;
    yi = {y} /.q^n->
    Sequence@@ConstantArray [q, n] /;IntegerQ [n] ^ n > 1;
    cqx = Count [xi, q]; cqy = Count [yi, q];
    NCM [q^cqx+cqy, NCM@@@DeleteCases [Join [xi, yi], q] /;cqy > 0]
8: NCM [q^n_, qs_Quaternion$Quaternion] /;                          ▷ Poenostavimo potence
    Length[{qs}] > 1:=NCM [q^n, NonCommutativeMultiply [qs]];
9: NCM [q, qs_Quaternion$Quaternion] /;
    Length[{qs}] > 1:=NCM [q, NonCommutativeMultiply [qs]];
10: NCM [q^n_, Quaternion [0, 0, 0, 0]] :=Quaternion [0, 0, 0, 0];
11: NCM [q, Quaternion [0, 0, 0, 0]] :=Quaternion [0, 0, 0, 0];

```

Določiti je bilo treba tudi pravila za seštevanje potenc z istimi osnovami ter množenje potenc s skalarjem. Ker sta operaciji seštevanje in množenje v Mathematici zaščiteni, nove definicije teh operacij, ki bi privzete povozila, ne moremo definirati. Zato je treba napisati seznam pravil, ki jih zaščitene operacije upoštevajo.

Programska koda 2 Pravila *rulesNCM* za računanje z regularnimi funkcijami.

```

1: n_IntegerNCM [q, q1_Quaternion$Quaternion] /;                    ▷ Množenje s skalarjem.
    n > 1 :-> NCM [q, nq1],
2: n_IntegerNCM [q^m_, q1_Quaternion$Quaternion] /;
    n > 1 :-> NCM [q^m, nq1],

```

-
-
- 3: Plus [NCM [q, q1_Quaternions`Quaternion] ,
NCM [q, q2_Quaternions`Quaternion]] :> NCM [q, q1 + q2] , ▷ Seštevanje istih potenc.
- 4: Plus [NCM [q, q1_Quaternions`Quaternion] ,
NCM [q, q1_Quaternions`Quaternion]] :> NCM [q, q1 + q1] ,
- 5: Plus [NCM [qⁿ, q1_Quaternions`Quaternion] ,
NCM [qⁿ, q2_Quaternions`Quaternion]] :> NCM [qⁿ, q1 + q2] ,
- 6: Plus [NCM [qⁿ, q1_Quaternions`Quaternion] ,
NCM [qⁿ, q1_Quaternions`Quaternion]] :> NCM [qⁿ, q1 + q1] ,
-

Poleg tega koda deluje veliko hitreje, če pravilo za množenje konstantnih funkcij definiramo posebej.

Programska koda 3 Pravilo *ruleQM* za produkt konstant.

1: NCM [qs_Quaternions`Quaternion] :→ NonCommutativeMultiply [qs]

Pri računanju iteratov se bomo omejili na razred kvadratnih regularnih funkcij brez linearnega člena. Računanje iterata je sprva potekalo tako:

$$\text{iterat}(q, a, c) = q^2 * a + c,$$

kjer spremenljivka q predstavlja neevalviran prejšnji iterat. Tako postavljena koda je v zglednem času izračunala največ tri iterate. Z namenom optimiziranja kode bomo funkcijo za računanje naslednjega iterata preoblikovali. Vsak iterat bomo predstavili kot vsoto prostega člena $prCl$ ter ostalih členov q .

$$\begin{aligned} \text{iterat}((q, prCl), a, c) &= (q + prCl)^2 * a + c \\ &= (q^2 + q * prCl + prCl * q + prCl^2) * a + c \\ &= (q^2 * a) + (q * prCl * a) + (prCl * q * a) + (prCl^2 * a) + c \end{aligned}$$

Najprej poračunamo vse oklepaje, potem pa prve tri člene seštejemo za naslednji iterat brez prostega člena, zadnja dva pa sta prosti člen naslednjega iterata. To pravi naslednja koda.

Programska koda 4 Računanje iterata.

1: iteratAC ({q_, prostiClen_}, a_, c_) := {Module [{x1, x2, x3},
x1 = NCM (q, q, a) //. rulesNCM //. ruleQM;
x2 = NCM (q, prostiClen, a) //. rulesNCM //. ruleQM;
x3 = NCM (prostiClen, q, a) //. rulesNCM //. ruleQM;
x1 + x2 + x3 //. rulesNCM],
NCM (prostiClen, prostiClen, a) + c //. ruleQM};

Zdaj imamo orodje za računanje iteratov. Problem je v tem, da je treba na vsakem koraku izračunati novo funkcijo, za razliko od navadne iteracije za holomorfne funkcije, kjer se kot vhod iteracije uporabi izhod prejšnje. Stopnja polinoma se na vsakem koraku podvoji, zato pridemo do zelo velikih stopenj že po nekaj iteracijah. Tako napisana koda izračuna 6 iteracij v nekaj sekundah, za 7 iteracij pa lahko potrebuje tudi že kakšno minuto.

Opisana koda je sicer koristna za računanje z regularnimi funkcijami, a za izrisovanje napolnjenih Juliajevih množic ni preveč uporabna. Za hitrejše računanje iteratov se opremo na lemo 18. Z njeno

pomočjo izračunajmo prvih nekaj iteratov za polinom $f(q) = q^2a + qb + c$.

$$\begin{aligned} f^{\bullet 2}(q) &= (f \bullet f)(q) = (f * f)(q) a + f(q) b + c \\ &= f(q) f\left(f(q)^{-1} q f(q)\right) a + f(q) b + c \\ f^{\bullet 3}(q) &= (f \bullet f^{\bullet 2})(q) = (f^{\bullet 2} * f^{\bullet 2})(q) a + f(q) b + c \\ &= f^{\bullet 2}(q) f^{\bullet 2}\left(f^{\bullet 2}(q)^{-1} q f^{\bullet 2}(q)\right) a + f^{\bullet 2}(q) b + c \end{aligned}$$

Opazimo, da je potrebno pri tretjem iteratu evalvirati vrednost $f^{\bullet 2}(q)^{-1} q f^{\bullet 2}(q)$ v prejšnjem iteratu. Ker pa iteratov ne hranimo kot funkcij, bomo evalvacijo opravili vnaprej. Za večjo preglednost vpeljemo sledeče oznake.

$$\begin{aligned} q_n &= f^{\bullet n}(q)^{-1} q f^{\bullet n}(q) \\ q_{n_1, \dots, n_{N-1}, n_N} &= f^{\bullet n_N}(q_{n_1, \dots, n_{N-1}})^{-1} q_{n_1, \dots, n_{N-1}} f^{\bullet n_N}(q_{n_1, \dots, n_{N-1}}) \\ q^m &= f^{\bullet m}(q) \\ q_{n_1, n_2, \dots, n_N}^m &= f^{\bullet m}(q_{n_1, n_2, \dots, n_N}) \end{aligned}$$

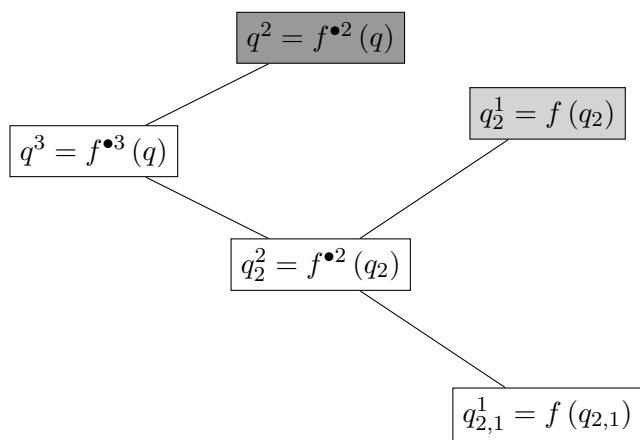
Če uporabimo nov zapis, dobimo

$$\begin{aligned} q^2 &= f^{\bullet 2}(q) = f(q) f(q_1) a + f(q) b + c = q^1 q_1^1 a + q^1 b + c, \\ q^3 &= f^{\bullet 3}(q) = f^{\bullet 2}(q) f^{\bullet 2}(q_2) a + f^{\bullet 2}(q) b + c = q^2 q_2^2 a + q^2 b + c. \end{aligned}$$

Ko smo prišli do drugega iterata, smo že imeli vrednost q^1, q_1^1 pa lahko hitro izračunamo, saj je to le evalvacija q_1 s f . Ko smo prišli do tretjega iterata, smo poznali q^2, q_2^2 pa moramo izračunati:

$$q_2^2 = f^{\bullet 2}(q_2) = f(q_2) f(q_{2,1}) a + f(q_2) b + c = q_2^1 q_{2,1}^1 a + q_2^1 b + c.$$

Ko imamo v zgornjem indeksu 1, lahko evalviramo vrednosti, zato je tu končano računanje za tretji iterat. Postopek pridobivanja vrednosti si na sliki 8 predstavimo z drevesom. S temno sivim poljem je označena vrednost, ki jo že poznamo iz prejšnje iteracije, s svetlo sivim pa prva, ki jo izračunamo v postopku za novo iteracijo.



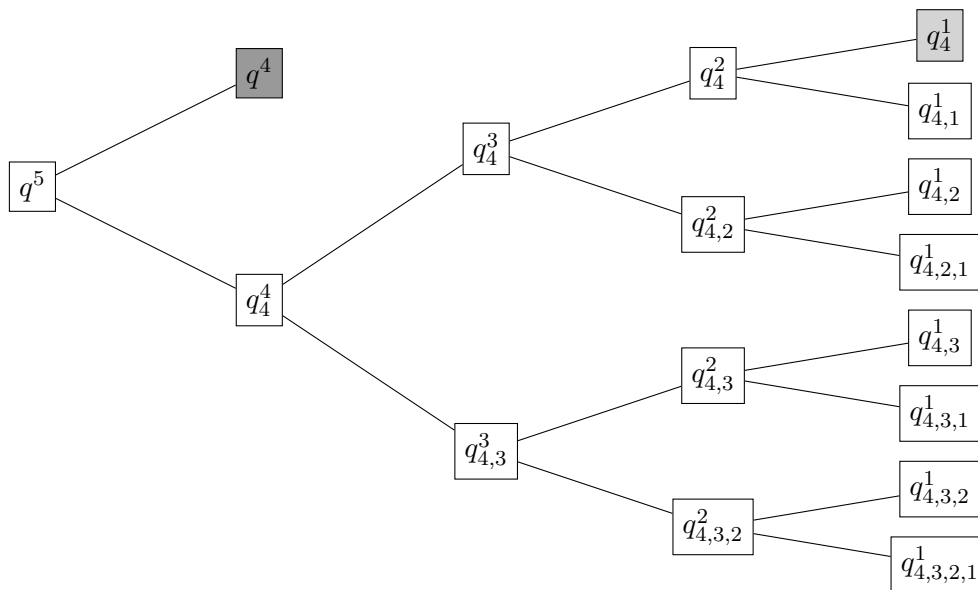
Slika 8. Drevo za računanje tretjega iterata. Kvaterniona q_2 in $q_{2,1}$ predstavljata rotaciji q , natančneje $q_2 = f^{\bullet 2}(q)^{-1} q f^{\bullet 2}(q)$ in pa $q_{2,1} = f(q)^{-1} q_2 f(q)$.

Lema 57. Za izračun $q_{n_1, n_2, \dots, n_N}^m$ potrebujemo vrednosti $q_{n_1, n_2, \dots, n_N}^{m-1}$ in $q_{n_1, n_2, \dots, n_N, m-1}^{m-1}$.

Dokaz. Dokaz je direkten račun.

$$\begin{aligned}
 q_{n_1, n_2, \dots, n_N}^m &= f^{\bullet m}(q_{n_1, n_2, \dots, n_N}) = \left(f \bullet f^{\bullet(m-1)} \right) (q_{n_1, n_2, \dots, n_N}) \\
 &= f^{\bullet(m-1)}(q_{n_1, n_2, \dots, n_N}) \\
 &\quad f^{\bullet(m-1)} \left(f^{\bullet(m-1)}(q_{n_1, n_2, \dots, n_N})^{-1} q_{n_1, n_2, \dots, n_N} f^{\bullet(m-1)}(q_{n_1, n_2, \dots, n_N}) \right) a \\
 &\quad + f^{\bullet(m-1)}(q_{n_1, n_2, \dots, n_N}) b + c \\
 &= q_{n_1, n_2, \dots, n_N}^{m-1} q_{n_1, n_2, \dots, n_N, m-1}^{m-1} a + q_{n_1, n_2, \dots, n_N}^{m-1} b + c
 \end{aligned}$$

Zdaj lahko napišemo drevo za poljuben iterat, na primer za peti na sliki 9.



Slika 9. Drevo za računanje petega iterata.

Vsak iterat začnemo računati iz listov in sicer od zgoraj navzdol. Po konstrukciji je vsak par listov oblike q_{n_1, \dots, n_N}^1 in $q_{n_1, \dots, n_N, 1}^1$. Prvemu rečemo *levi* in ga označimo z l , drugemu pa rečemo *desni* in ga označimo z d .

Lema 58. Za izračun listov $l = q_{n_1, \dots, n_{N-1}, n_N}^1$ in $d = q_{n_1, \dots, n_{N-1}, n_N, 1}^1$ potrebujemo le vrednost $s = q_{n_1, \dots, n_{N-1}}^{n_N}$, ki ji rečemo starš, ter vrednost $o = q_{n_1, \dots, n_{N-1}}$, ki ji rečemo osnova.

Dokaz. Najprej izračunamo pomožno vrednost, ki bo dodatno služila kot osnova za naslednji par listov.

$$o_{\text{nov}} = s^{-1} o s = q_{n_1, \dots, n_{N-1}}^{n_N} q_{n_1, \dots, n_{N-1}}^{-1} q_{n_1, \dots, n_{N-1}}^{n_N} = q_{n_1, \dots, n_{N-1}, n_N}$$

Potem prvi list dobimo kot evalvacijo nove osnove.

$$f(o_{\text{nov}}) = q_{n_1, \dots, n_{N-1}, n_N}^1 = l$$

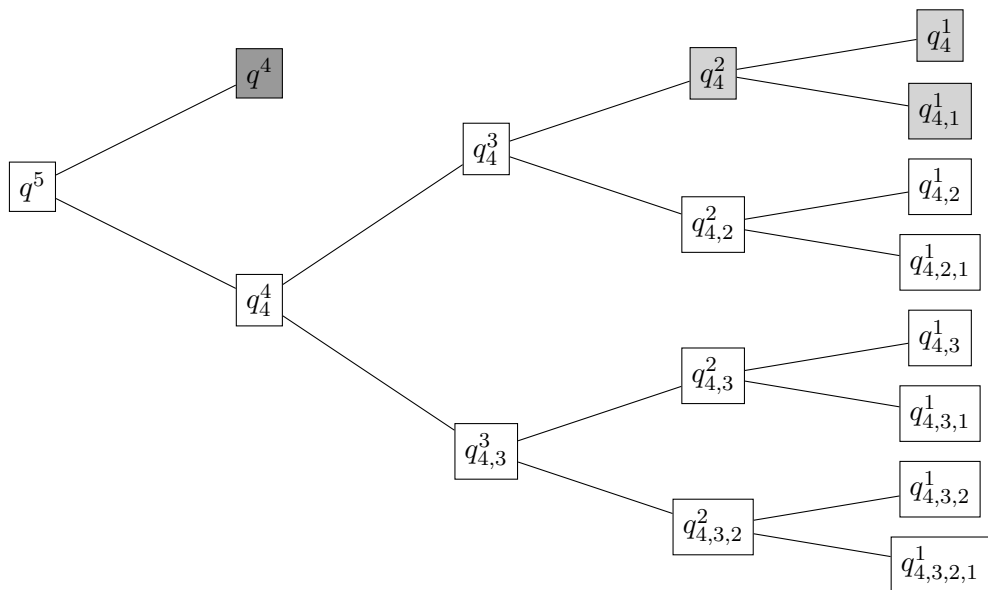
Drugi list dobimo kot

$$f(l^{-1} o_{\text{nov}} l) = f(q_{n_1, \dots, n_{N-1}, n_N, 1}^1) = q_{n_1, \dots, n_{N-1}, n_N, 1}^1 = d.$$

Ko izračunamo par listov, jih *staknemo* tako, da jih vstavimo v formulo za njunega starša. Po lemi 57 vidimo, da bomo iz listov $l = q_{n_1, \dots, n_{N-1}, n_N}^1$ in $d = q_{n_1, \dots, n_{N-1}, n_N, 1}^1$ dobili $s = q_{n_1, \dots, n_{N-1}, n_N}^2$. To bo ravno starš za naslednji par listov, kar vidimo iz leme 58. Tako bomo iterativno računali po

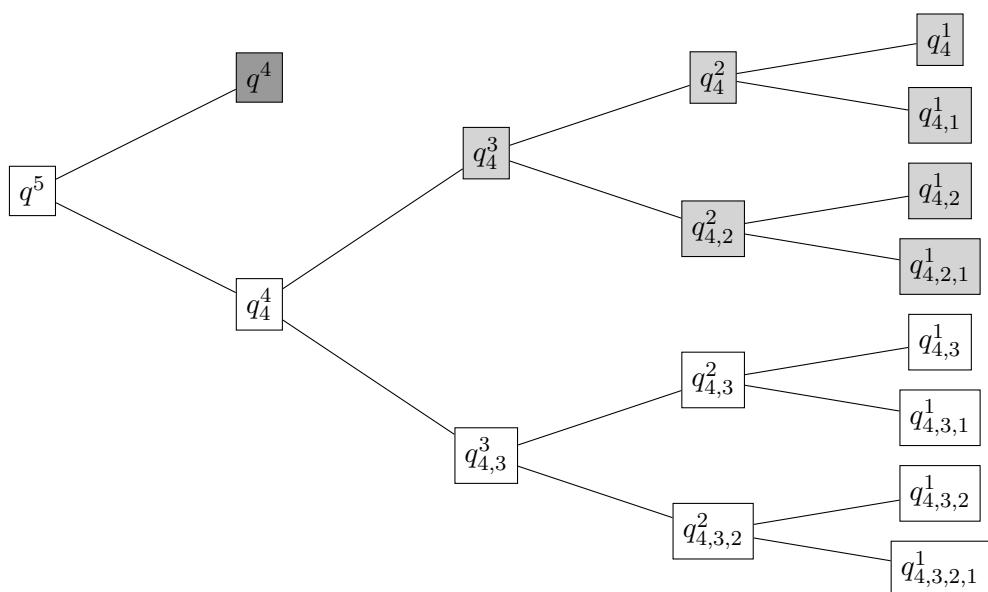
nivojih. Rečemo, da računamo na *nivoju* m , če računamo s q_{n_1, \dots, n_N}^m . Nivo povečamo ob *stiku* dveh vrednosti na tem nivoju, ki ju izračunamo po lemi 57.

Poglejmo si primer za peti iterat. Denimo, da smo že izračunali $f^{*4}(q) = q^4$. To je starš za prvi par listov q_4^1 in $q_{4,1}^1$, osnova pa je kar q . Kot v dokazu leme 58 izračunamo novo osnovo $q_4 = f^{*4}(q)^{-1}qf^{*4}(q) = (q^4)^{-1}qq^4$. Potem dobimo lista kot $q_4^1 = f(q_4)$ in $q_{4,1}^1 = f(q_{4,1}) = f((q_4^1)^{-1}q_4q_4^1) = f(f(q_4)^{-1}q_4f(q_4))$. Lista staknemo in dobimo starša za naslednji par listov: $q_4^2 = q_4^1q_{4,1}^1a + q_4^1b + c$.



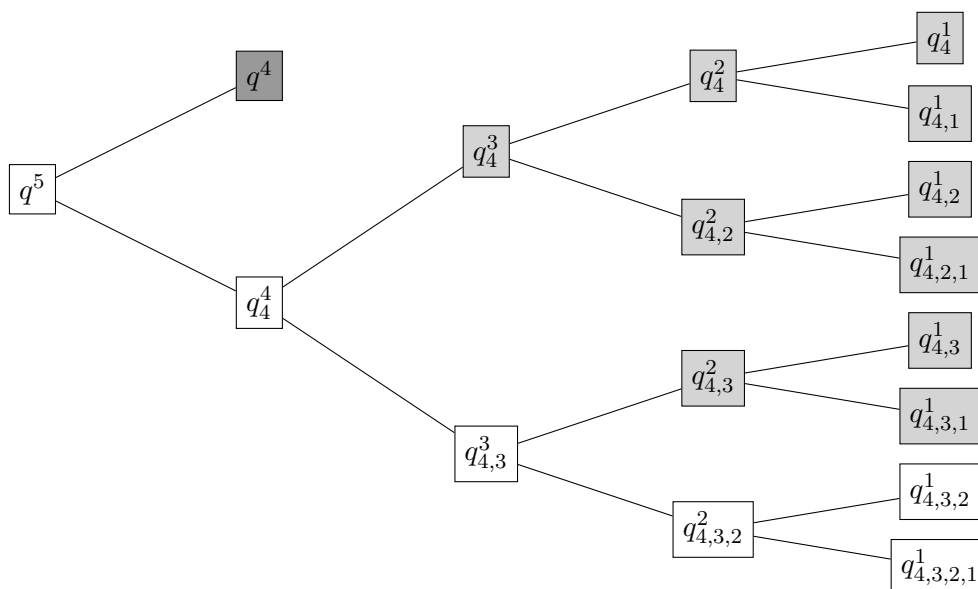
Slika 10. Drevo za računanje petega iterata, kjer so s svetlo sivo označene vrednosti, ki smo jih že izračunali, ko smo izračunali vrednost q_4^2 .

Zdaj lahko izračunamo naslednji par listov $q_{4,2}^1$ in $q_{4,2,1}^1$ z že dobljenima osnovo q_4 in staršem q_4^2 . Tako nadaljujemo po nivojih nazvgor, dokler nas na višjem nivoju čaka eden od rezultatov stikov. Ko na primer izračunamo $q_{4,2}^2$, nas je kvaternion q_4^2 že čakal na drugem nivoju. Tako ju lahko staknemo in dobimo q_4^3 in preidemo na tretji nivo.



Slika 11. Drevo za računanje petega iterata, kjer so s svetlo sivo označene vrednosti, ki smo jih že izračunali, ko smo izračunali vrednost q_4^3 .

Na tretjem nivoju nas nič ne čaka, zato moramo računati nov par listov $q_{4,3}^1$ in $q_{4,3,1}^1$. Potreben starš za izračun je zadnji rezultat stika, torej q_4^3 , osnova pa q_4 . Opazimo, da je bila to nova osnova pri izračunu prvih dveh listov, ne pa drugega (zadnjega) para. Zato je smiselno voditi sklad osnov. Po konstrukciji drevesa vidimo, da je potrebno na vsakem izračunu novega para listov dati novo osnovo na sklad, na vsakem stiku pa zadnjo dodano odstraniti. Ko izračunamo $q_{4,3}^1$ in $q_{4,3,1}^1$, z njunim stikom dobimo $q_{4,3}^2$.



Slika 12. Drevo za računanje petega iterata, kjer so s svetlo sivo označene vrednosti, ki smo jih že izračunali, ko smo izračunali vrednost $q_{4,3}^2$.

Ko izračunamo naslednja dva lista, dobimo še zadnji kvaternion na drugi ravni $q_{4,3,2}^2$. Staknemo vrednosti na drugi ravni in preidemo na tretjo raven s $q_{4,3}^3$. Tu nas že čaka q_4^3 . Ob njunem stiku dobimo q_4^4 in se premaknemo na raven 4, kjer nas kot rezultat prejšnje iteracije čaka q^4 . Njun stik je peti iterat.

Ta algoritem za računanje iteratov je precej hitrejši kot prvi, a vseeno lahko že za 23 iteracij potrebuje več sekund. Razlog tiči v številu operacij, ki jih je potrebno izračunati za vsak iterat. Za n -ti iterat je potrebno konstruirati drevo globine $n - 1$. Vseh vrednosti v drevesu ni treba hraniti, saj sta za vsak par listov potrebna le osnova ter starš, za vsak stik pa levi in desni kvaternion iz spodnje ravni. Tako je dovolj hkrati hraniti 2 vrednosti v drevesu, vrednost prejšnjega iterata ter sklad osnov. Prostorska zahtevnost je zato linearna, časovna pa je eksponentna.

Nazadnje si še pogledjmo psevdokodo algoritma. Za lažje razumevanje najprej definirajmo dve pomožni funkciji, ki že poznata globalne argumente a , b in c , ki predstavljajo koeficiente polinoma.

Programska koda 5 Pomožni funkciji.

- | | |
|---|---|
| 1: function EVALVACIJA(q): | ▷ Evalviranje s funkcijo $f(q) = q^2a + qb + c$. |
| 2: return $q^2 \cdot a + q \cdot b + c$ | |
| 3: end function | |
| | |
| 4: function STIK($f_q, f_{q_{\text{rot}}}$): | ▷ Računanje stika za prehod v naslednjo raven. |
| 5: return $f_q \cdot f_{q_{\text{rot}}} \cdot a + f_q \cdot b + c$ | |
| 6: end function | |
-

Programska koda 6 Algoritem za računanje iteracij.

Vhod: Kvaternioni a, b, c in q_0 , realno število M ter naravno število N . Prvi trije vhodni podatki predstavljajo koeficiente polinoma $f(q) = q^2a + qb + c$, kjer je $|a| = 1$, q_0 je seme orbite, M meja za velikost iterata, N pa maksimalno število iteracij.

Izhod: Minimum dolžine orbite f za q_0 ter števila N .

```

1: function DOLŽINAORBITE( $a, b, c, q_0, M, N$ )

2:    $prviIterat \leftarrow$  EVALVACIJA( $q_0$ )                                ▷ Prva dva iterata izračunamo posebej.
3:   if  $|prviIterat| > M$  then
4:     return 1
5:   end if
6:    $pomožno \leftarrow$  EVALVACIJA( $prviIterat^{-1} \cdot q_0 \cdot prviIterat$ )
7:    $drugiIterat \leftarrow$  STIK( $prviIterat, pomožno$ )
8:   if  $|drugiIterat| > M$  then
9:     return 2
10:  end if

11:   $iterati \leftarrow [q_0, prviIterat, drugiIterat]$                     ▷ Inicializiramo seznam iteratov.
12:   $drevo \leftarrow [ [], [], [drugiIterat], \underbrace{[], \dots, []}_{N-2} ]$     ▷ Inicializiramo seznam ravni.

13:   $sklad \leftarrow [q_0]$                                             ▷ Inicializiramo sklad osnov.
14:  for  $i \leftarrow 3, \dots, N$  do                                    ▷ Računamo iterate do  $N$ -tega.
15:     $raven \leftarrow 2$                                              ▷ Začnemo na drugi ravni.
16:     $s \leftarrow drevo[i][1]$                                        ▷ Prejšnji iterat.
17:    while  $drevo[i+1] = []$  do                                       ▷ Naslednjega iterata še ni.

18:      if dolžina( $drevo[raven+1]$ )  $< 2$  then                        ▷ Naslednja raven še ni polna.
19:         $o \leftarrow s^{-1} \cdot sklad[-1] \cdot s$                     ▷ Izračunamo novo osnovo.
20:         $sklad.$  dodaj( $o$ )                                             ▷ Novo osnovo damo na sklad.
21:         $l \leftarrow$  EVALVACIJA( $o$ )                                   ▷ Računamo liste po lemi 58.
22:         $d \leftarrow$  EVALVACIJA( $l^{-1} \cdot o \cdot l$ )
23:         $s \leftarrow$  STIK( $l, d$ )                                       ▷ Liste staknemo po lemi 57.
24:         $drevo[raven+1].$  dodaj( $s$ )                                     ▷ Novo vrednost damo na višjo raven.
25:      end if

26:      if dolžina( $drevo[raven+1]$ )  $= 2$  then                            ▷ Naslednja raven je polna.
27:         $d \leftarrow drevo[raven+1].$  odstrani()                       ▷ Izpraznimo naslednjo raven.
28:         $l \leftarrow drevo[raven+1].$  odstrani()
29:         $s \leftarrow$  STIK( $l, d$ )                                       ▷ Staknemo vrednosti na naslednji ravni.
30:         $sklad.$  odstrani()                                             ▷ Posodobimo sklad osnov.
31:         $drevo[raven+2].$  dodaj( $s$ )                                     ▷ Posodobimo še naslednjo raven.
32:        if dolžina( $drevo[raven+2]$ )  $= 2$  then                            ▷ Polna še naslednja raven.
33:           $raven \leftarrow raven + 1$                                    ▷ Premaknemo se raven višje.
34:        else
35:           $raven \leftarrow 2$                                            ▷ Premaknemo se na začetno raven.
36:        end if
37:      end if

38:  end while
    
```

```

39:     if  $|drevo[i + 1][1]| > M$  then
40:         break                                     ▷ Če je iterat prevelik, končamo zanko.
41:     else
42:         iterati.dodaj( $drevo[i + 1][1]$ )           ▷ Sicer nadaljujemo.
43:     end if

44: end for
45: return  $i$                                        ▷ Vrnemo število izračunanih iteratov.
46: end function

```

Opomba 59. V algoritmu se upošteva, da se seznama začnejo z indeksom 1, zadnjega pa se lahko označi z -1 . Metoda `.odstrani()` odstrani zadnjo vrednost v seznamu ali skladi, metoda `.dodaj(x)` pa na konec seznama ali sklada doda x .

6. Zahvala

Rad bi se zahvalil urednikom revije Matrika, recenzentu za hitre in temeljite povratne informacije in pa mentorici izr. prof. dr. Jasni Prezelj, ki mi je temo predstavila, me usmerjala in pomagala pri raziskavi.

LITERATURA

- [1] Graziano Gentili, Caterina Stoppato, and Daniele C. Struppa, *Regular functions of a quaternionic variable*, Springer Berlin, Heidelberg, 2013.
- [2] Graziano Gentili and Daniele C. Struppa, *A new approach to cullen-regular functions of a quaternionic variable*, *Comptes Rendus Mathematique* **342** (2006), no. 10, 741–744.
- [3] Mitja Lakner, Marjeta Skapin-Rugelj, and Peter Petek, *Symbolic dynamics in investigation of quaternionic julia sets*, *Chaos, Solitons and Fractals* **24** (2005), no. 5, 1189–1201.
- [4] John W. Milnor, *Dynamics in one complex variable: introductory lectures*, 1990.