DOMINACIJA V KREPKIH PRODUKTIH POLNIH GRAFOV IN POTI

ANA JULIJA PREŠEREN

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Dominantna množica grafa G je podmnožica množice vozlišč $V(G)$, za katero velja, da je vsako vozlišče grafa G prisotno v tej množici ali pa je sosedno vozlišču v njej. Dominantno število grafa, označujemo ga z $\gamma(G)$, je kardinalnost dominantne množice najmanjše moči. V delu poiščemo točno vrednost dominantnega števila krepkega produkta polnega grafa in poti. Njegova vrednost je neodvisna od velikosti polnega grafa in je enaka $\gamma(K_m \boxtimes P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Kritična množica povezav grafa G je podmnožica množice povezav $E(G)$, katere odstranitev povzroči, da je dominantno število dobljenega grafa večje kot prej. Povezavno kritično število grafa je kardinalnost kritične množice povezav najmanjše moči. Označujemo ga z $b(G)$, pomaga pa nam pri ocenjevanju občutljivosti povezovalnih omrežij na propad povezav. Povezavno kritično število krepkega produkta polnega grafa in poti je odvisno od velikosti polnega grafa K_m in vrednosti n po $\pmod 3$. Za naravni števili m in n, $m \geq 1$ in $n \geq 2$, velja, da je $b(K_m \boxtimes P_n) = \lceil \frac{m}{2} \rceil$, če je $n \equiv 0 \pmod 3$, $b(K_m \boxtimes P_n) = \lceil \frac{3m}{2} \rceil$, če je $n \equiv 1 \pmod 3$ in $b(K_m \boxtimes P_n) = m$, če je $n \equiv 2 \pmod 3$.

DOMINATION IN THE STRONG PRODUCT OF A COMPLETE GRAPH WITH A PATH

A dominating set of a graph G is a subset of $V(G)$ with the property, that every vertex of graph G is either in this set or is adjacent to the vertex in it. The domination number $\gamma(G)$ of a graph G is the cardinality of a smallest dominating set. In this thesis we find the exact value of the domination number of the strong product of a complete graph with a path. It is not dependent on the order of the complete graph and is equal to $\gamma(K_m \boxtimes P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. A bondage edge set of a graph G is a subset of $E(G)$, whose removal from G results in a graph with the domination number greater than that of G. The bondage number $b(G)$ is the cardinality of a smallest bondage edge set. It is a parameter to measure the vulnerability of a communication network under link failure. The bondage number of the strong product of a complete graph with a path depends on the order of the complete graph and the value of $n \pmod 3$. For integers m and n, where $m \geq 1$ and $n \geq 2$, $b(K_m \boxtimes P_n) = \lceil \frac{m}{2} \rceil$ if $n \equiv 0 \pmod 3$, $b(K_m \boxtimes P_n) = \lceil \frac{3m}{2} \rceil$ if $n \equiv 1 \pmod 3$ and $b(K_m \boxtimes P_n) = m$ if $n \equiv 2 \pmod 3$.

1. Uvod

Sistematični študij dominacije se je začel okoli leta 1960. Leta 1958 je Claude Berge definiral dominantno število grafa, sam koncept dominacije pa se je pojavil že sto let prej. Koncept dominacije izvira iz proučevanja matematičnih problemov, ki vključujejo šahovnico in šahovske figure. C. F. Jaenisch je tako leta 1862 iskal odgovor na sledeče vprašanje: najmanj koliko kraljic moramo postaviti na šahovnico velikosti $n \times n$, da bo vsako polje vsebovalo kraljico ali pa ga bo kraljica napadala? Če to vprašanje prevedemo v jezik teorije grafov, se glasi: kako velika je najmanjša dominantna množica grafa, ki ponazarja šahovnico in gibanje kraljice? Pri tem ima graf n^2 vozlišč, ki ponazarjajo šahovska polja, vozlišči, oziroma šahovski polji, pa sta sosedni, če se kraljica v eni potezi lahko premakne z enega polja na drugega. Zgodovina dominacije je podrobneje predstavljena v [3, 1.13 poglavje].

Iskanje dominantne množice pa se ne pojavlja le v problemih s šahovnico in figurami, temveč tudi v mnogih problemih vsakdanjega življenja. Primeri iskanja najmanjše dominantne množice so na primer iskanje najcenejše množice lokacij za postavitev radijskih sprejemnikov, avtobusnih postaj, opravljanje geodetskih meritev, ipd. Ti in še mnogi drugi primeri so natančneje predstavljeni v [3, 1. poglavje]. Dominantne množice se torej naravno pojavljajo kot matematični model za reševanje problemov na povezovalnih omrežjih, ta pa pogosto konstruiramo s pomočjo grafovskih produktov. Povezovalna omrežja seveda niso imuna na okvare, torej moramo biti pripravljeni na morebitne težave in propad povezav. Odpornost povezovalnih omrežij na okvare lahko ocenimo s povezavnim kritičnim številom grafa.

2. Pregled osnovnih pojmov

To poglavje namenimo pregledu osnovnih pojmov iz teorije grafov, ki so ključni za kasnejšo vpeljavo dominantne množice in dominantnega števila ter njuno obravnavo.

Definicija 1. Naj bo $G = (V(G), E(G))$ graf in naj bosta $u, v \in V(G)$. Pravimo, da je u *sosed* od v, če je $uv \in E(G)$, oziroma da sta vozlišči sosedni. Množico vseh sosedov vozlišča u imenujemo *soseščina vozlišča* u in jo zapišemo kot:

$$N(u) = \{v \in V(G) |\, uv \in E(G)\}.$$

Zaprta soseščina vozlišča u je definirana kot:

$$N[u] = \{v \in V(G) |\, uv \in E(G)\} \cup \{u\}.$$

Zaprta soseščina množice vozlišč $S \subseteq V(G)$ je definirana kot:

$$N[S] = \bigcup_{u \in S} N[u].$$

Definicija 2. Naj bo G graf in $v \in V(G)$. Število povezav grafa G, ki imajo vozlišče v za eno od krajišč, imenujemo *stopnja vozlišča* v in jo označujemo z $\deg(v)$. *Največjo stopnjo* grafa G, torej $\max\{\deg(v) | v \in V(G)\}$, označujemo z $\Delta(G)$. *Najmanjšo stopnjo* grafa G označujemo z $\delta(G)$.

Definicija 3. *Poln graf* na m vozliščih je graf G, v katerem je $V(G) = \{v_1, \ldots, v_m\}$ in je $v_i v_j \in E(G)$ za vsak par $1 \leq i, j \leq m$, $i \neq j$. Poln graf na m vozliščih označujemo s K_m.

Definicija 4. *Pot* na n vozliščih je graf G, v katerem je $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ in je $E(G) = \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i < n\}$. Pot na n vozliščih označujemo s P_n.

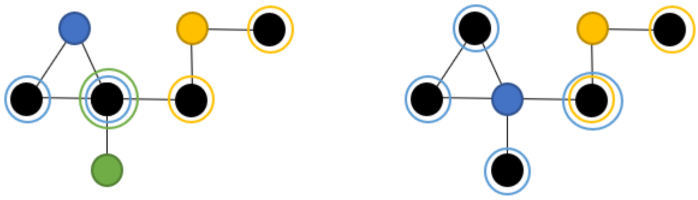
3. Dominantna množica in dominantno število

Sedaj lahko definiramo dominantno množico in dominantno število grafa. Ogledali si bomo nekaj primerov dominantnih in najmanjših dominantnih množic poljubnih grafov, predstavili motivacijo za njihovo iskanje ter postavili zgornjo in spodnjo mejo dominantnega števila. V nadaljevanju bomo dokazali točno vrednost dominantnega števila polnega grafa K_m in poti P_n, ter poiskali najmanjši dominantni množici omenjenih grafov. Definicije in trditve v tem poglavju so povzete po [3, 1. poglavje].

Definicija 5. Množica $S \subset V(G)$ je *dominantna množica* grafa G, če velja $N[S] = V(G)$. Pravimo, da $v \in S$ *dominira* $u \in V(G)$, če je $u \in N[v]$.

Iz definicije dominantne množice takoj sledi, da ta vedno obstaja, saj za množico $S = V(G)$ velja $N[S] = V(G)$. Vendar pa dominantna množica za večino grafov ni enolično določena, niti ni enolična njena velikost. V zgledu 1 sta prikazani dve različno veliki dominantni množici istega grafa.

Zgled 1. Na sliki 1 sta označeni dve dominantni množici danega grafa. V prvem primeru so v dominantni množici tri vozlišča, ki so na sliki označena z modro, zeleno in rumeno barvo, z ujemajočo barvo pa so obkrožena vozlišča, ki jih pobarvana vozlišča dominirajo. Vidimo lahko, da je eno izmed vozlišč dominirano tako z modrim, kot tudi zeleno obarvanim vozliščem. V drugem primeru sta v dominantni množici le dve vozlišči, kar je tudi najmanjše število vozlišč, ki jih potrebujemo za dominacijo, saj danega grafa očitno ne moremo dominirati z enim samim vozliščem. Graf z n vozlišči lahko namreč dominiramo z enim samim vozliščem natanko tedaj, ko graf vsebuje vozlišče stopnje $n - 1$.



Slika 1. Dve različno veliki dominantni množici istega grafa.

Ker dominantna množica vedno obstaja in ji lahko v primeru $|S| < |V(G)|$ vedno dodamo poljubno vozlišče, ter še vedno ostane dominantna množica, se osredotočimo na iskanje dominantne množice najmanjše moči. Motivacija za iskanje takih dominantnih množic bo predstavljena po spodnjih definicijah.

Definicija 6. *Dominantno število* grafa G je najmanjša moč dominantne množice grafa G. Označimo ga z $\gamma(G)$.

Definicija 7. *Najmanjša dominantna množica* grafa G je množica $S \subseteq V(G)$ z lastnostma $N[S] = V(G)$ in $|S| = \gamma(G)$. Množico vseh najmanjših dominantnih množic grafa G bomo označevali z $NDM(G)$.

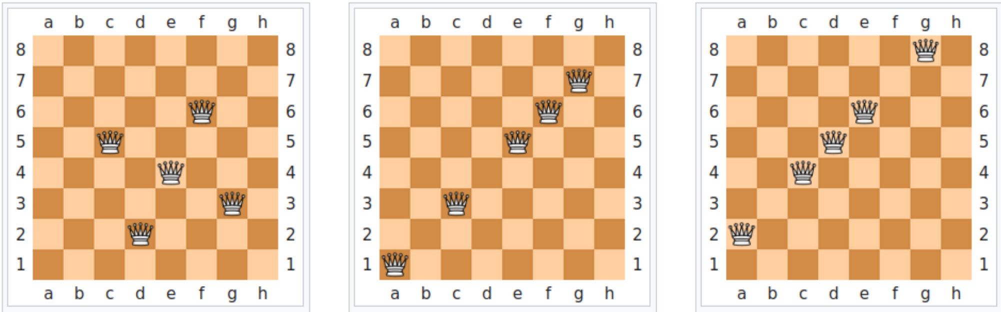
Problem iskanja najmanjše dominantne množice se pojavi v mnogih problemih vsakdanjega življenja. Oglejmo si enega izmed njih, povzetega po [3, 1.7 poglavje].

Zgled 2. Na oddaljenem in izoliranem delu sveta imamo nekaj manjših vasi. Med njimi bi radi omogočili prenašanje sporočil, tako da bi v nekatere izmed vasi postavili radijske postaje. Ker ima vsaka radijska postaja omejen radij oddajanja, bomo morali postaje namestiti v več kot eno vas, hkrati pa želimo zmanjšati stroške in postaviti kar se da malo radijskih postaj.

To nalogo lahko prevedemo v jezik teorije grafov. Vsaka izmed vasi predstavlja eno vozlišče grafa, dve vozlišči oziroma dve vasi pa sta sosedni, če je razdalja med njima manjša ali kvečjemu enaka radiju oddajanja radijske postaje. Naša naloga je poiskati najmanjše število vasi, kamor bi postavili radijske postaje, tako da bo v vsaki vasi stala radijska postaja ali pa bo vas dovolj blizu neki drugi vasi z radijsko postajo. Iščemo torej najmanjšo dominantno množico našega grafa.

Že v uvodu smo spoznali, da začetki proučevanja dominacije v grafih izvirajo iz matematičnih problemov, ki vključujejo šahovnico in šahovske figure. Natančneje si oglejmo primer dominacije šahovnice s kraljicami. Primer je povzet po [3, 1.1 poglavje] in [1].

Zgled 3. Šahovnico običajne velikosti 8×8 želimo prekriti s kraljicami, tako da na vsakem polju stoji kraljica ali pa kraljica polje napada. Šahovnico in gibanje kraljice po njej lahko predstavimo z grafom. Vsako vozlišče grafa G predstavlja polje šahovnice, torej je $V(G) = \{a1, a2, \ldots, a8, b1, \ldots, b8, \ldots, h1, \ldots, h8\}$. Sedaj moramo v graf vključiti še gibanje kraljice. Vozlišči grafa G sta sosedni, če se kraljica lahko v eni potezi premakne s polja, ki ga predstavlja prvo vozlišče, na polje, ki ga predstavlja drugo vozlišče. Tak graf se imenuje kraljičin graf oziroma angleško Queen's graph. Naša naloga v jeziku teorije grafov pomeni, da želimo najti najmanjšo množico vozlišč, ki dominira graf G. Iščemo torej najmanjšo dominantno množico grafa, število kraljic pa je enako njegovem dominantnem številu. V našem primeru lahko graf dominiramo z najmanj petimi vozlišči in posledično lahko šahovnico dominiramo s petimi kraljicami. Na sliki 2 so predstavljene tri različne postavitve petih kraljic, ki dominirajo šahovnico velikosti 8×8.



Slika 2. Trije načini dominacije šahovnice s petimi kraljicami. Vir: [1]

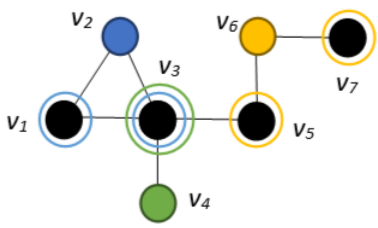
Zgled 4. Tudi najmanjša dominantna množica ni nujno enolično določena, niti do izomorfizma natančno. Na sliki 3 so z modro barvo označene vse neizomorfne najmanjše dominantne množice poti P_4.

Slika 3. Neizomorfne najmanjše dominantne množice poti P_4.

Definicija 8. *Minimalna dominantna množica* grafa G je dominantna množica $S \subseteq V(G)$, za katero velja, da nobena njena prava podmnožica $S' \subset S$ ni dominantna množica grafa G.

Minimalna dominantna množica je torej dominantna množica, iz katere ne moremo odstraniti nobenega vozlišča, ne da vsaj eno od vozlišč grafa ne bi bilo več dominirano. Očitno je vsaka najmanjša dominantna množica tudi minimalna dominantna množica grafa. Obratno pa ni nujno res. Primer minimalne dominantne množice, ki hkrati ni najmanjša dominantna množica, je predstavljen v zgledu 5.

Zgled 5. Oglejmo si izbrano dominantno množico grafa na spodnji sliki. Če iz dominantne množice odstranimo modro vozlišče v_2, vozlišči v_1 in v_2 nista več dominirani. Če odstranimo zeleno vozlišče v_4, potem ni dominirano vozlišče v_4, v primeru odstranitve rumenega vozlišča v_6, pa niso dominirana vozlišča v_5, v_6 in v_7. Toda množica S očitno ni najmanjša dominantna množica grafa G, saj je $|S| = 3$, za isti graf pa smo v zgledu 1 poiskali dominantno množico velikosti 2 in tudi pokazali, da je $\gamma(G) = 2$.



Slika 4. Minimalna, a ne tudi najmanjša dominantna množica.

Ker minimalna dominantna množica ni nujno tudi najmanjša dominantna množica, do najmanjše dominantne množice grafa G in dominantnega števila ne moremo priti le z naključnim odstranjevanjem vozlišč iz dominantne množice $S = V(G)$, tako da bi še vedno veljalo $N[S - Z] = V(G)$, kjer je Z množica odstranjenih vozlišč. Hitro se namreč lahko pripeti situacija iz zgleda 5 in množice, dobljene na ta način, sicer ne moremo zmanjšati, vendar lahko velja $|S - Z| > \gamma(G)$ in $S - Z$ vseeno ni najmanjša dominantna množica grafa G. Iskanje najmanjše dominantne množice grafa G je NP-poln problem (dokaz v [3, 1.12 poglavje]), vendar pa si iskanje v določenih primerih lahko močno olajšamo, če znamo $\gamma(G)$ dobro omejiti. Potem ne iščemo prevelikih oziroma premajhnih dominantnih množic, v primeru, da moč dominantne množice dosega spodnjo mejo za $\gamma(G)$ pa vemo, da je to najmanjša dominantna množica.

Za graf z n vozlišči očitno velja sledeča omejitev $\gamma(G)$:

$$1 \leq \gamma(G) \leq n.$$

Obe meji sta lahko doseženi. Če je $G = K_n$, je vsako vozlišče sosedno z vsakim drugim vozliščem, torej za poljuben $v \in K_n$ velja $N[v] = V(K_n)$ in posledično $\gamma(K_n) = 1$. V primeru $G = \overline{K}_n$, kjer je $\overline{K}_n$ komplement polnega grafa K_n, pa velja $E(\overline{K}_n) = \emptyset$ in vsako vozlišče dominira le samo sebe. Torej je $S = V(\overline{K}_n)$ edina in posledično najmanjša dominantna množica grafa in velja $\gamma(\overline{K}_n) = n$.

Če torej želimo natančneje raziskati najmanjše dominantne množice in dominantno število grafa, se moramo omejiti na določene skupine grafov. Omejili se bomo na polne grafe in poti ter njun krepki produkt. Za konec poglavja poiščimo vrednost dominantnega števila poti P_n. Pri iskanju in dokazovanju nam bo v pomoč spodnja trditev, ki nam poda zgornjo in spodnjo mejo dominantnega števila grafa G glede na vrednost $\Delta(G)$.

Trditev 1. *Za vsak graf G z n vozlišči velja:*

$$\left\lceil \frac{n}{1+\Delta(G)} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq n - \Delta(G).$$

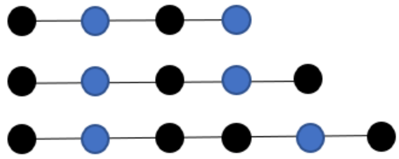
Dokaz. Vozlišče grafa G, ki lahko dominira največ vozlišč, je vozlišče v z $\deg(v) = \Delta(G)$. To vozlišče dominira sebe in še $\Delta(G)$ svojih sosedov, skupaj $1 + \Delta(G)$ vozlišč. Če graf G vsebuje n vozlišč, njegova najmanjša dominantna množica torej vsebuje vsaj $\lceil \frac{n}{1+\Delta(G)} \rceil$ vozlišč in sledi $\gamma(G) \geq \lceil \frac{n}{1+\Delta(G)} \rceil$. V najslabšem primeru so vsa vozlišča, ki niso dominirana z vozliščem v, izolirana vozlišča, torej mora biti vsako izmed njih vsebovano v najmanjši dominantni množici. V tem primeru je izoliranih vozlišč $n-(1+\Delta(G))$, v najmanjšo dominantno množico pa poleg njih dodamo še vozlišče v. Tedaj najmanjša dominantna množica vsebuje $n - \Delta(G)$ vozlišč in sledi $\gamma(G) \leq n - \Delta(G)$. ∎

Trditev 2. $\gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Dokaz. Če je $n \geq 3$, je $\Delta(P_n) = 2$ in $\gamma(P_n)$ je po trditvi 1 navzdol omejena z $\lceil \frac{n}{3} \rceil$. Za vsako pot P_n, $n \geq 3$, lahko tudi najdemo dominantno množico velikosti $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ po sledečem postopku: prvo vozlišče izpustimo, naslednjega vzamemo v dominantno množico, nato pa izpuščamo po dve vozlišči pred izbiro naslednjega. Če nam po izbiri vozlišča v dominantno množico ostanejo vsaj 3 vozlišča, nadaljujemo s postopkom. Če po izbiri vozlišča v dominantno množico ostaneta 2 vozlišči, damo eno izmed njiju v dominanto množico, če ostane le eno zaključimo. Torej je $\gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$, za $n \geq 3$.

Poti P_1 in P_2 očitno lahko dominiramo z enim samim vozliščem, kar ustreza obliki $\gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Torej velja $\gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$, za vsak $n \in \mathbb{N}$. ∎

Zgled 6. Dokaz trditve 2 nam tudi opiše, kako v primeru $n \geq 3$ najdemo najmanjšo dominantno množico poti P_n, v primeru $n = 1, 2$ pa je izbira seveda očitna. Najmanjše dominantne množice poti P_4, P_5 in P_6, dobljene po postopku, opisanem v dokazu, so z modro barvo označene na spodnji sliki.



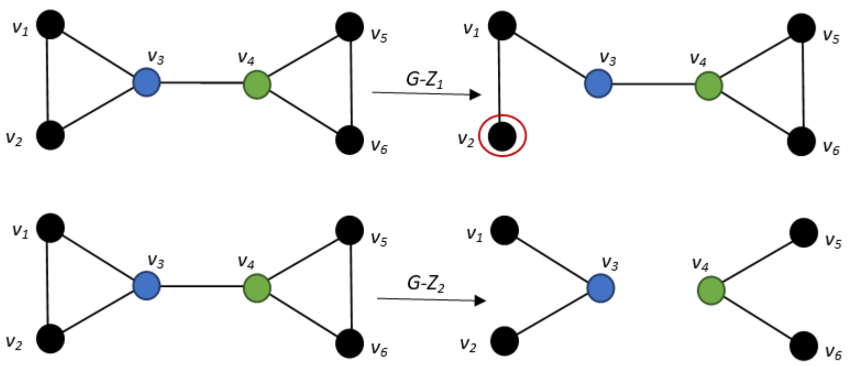
Slika 5. Najmanjše dominantne množice poti P_4, P_5 in P_6, dobljene po postopku, opisanem v dokazu trditve 2.

4. Kritična množica povezav in povezavno kritično število

Sedaj si oglejmo, kaj se zgodi z dominantno množico in dominantnim številom, če grafu odstranimo nekaj povezav.

Naj bo S dominantna množica grafa G in $Z \subseteq E(G)$. Ko grafu G odstranimo povezave iz Z, imamo dve možnosti: množica S tudi v grafu $G - Z$ dominira vsa vozlišča ali pa katero od vozlišč ni več dominirano. Množica S torej ni nujno dominantna množica grafa $G - Z$. Obe možnosti sta predstavljeni v spodnjem zgledu.

Zgled 7. Na sliki 6 je označena dominantna množica $S = \{v_3, v_4\}$ grafa G. Naj bo $Z_1 = \{v_2v_3\}$ in $Z_2 = \{v_1v_2, v_3v_4, v_5v_6\}$. Po odstranitvi množice povezav Z_1 iz grafa G, vozlišče v_2 ni več dominirano z množico S, zato S ni dominantna množica grafa $G - Z_1$. Če grafu G odstranimo množico povezav Z_2, množica S še vedno dominira vsa vozlišča, torej je dominantna množica grafa $G - Z_2$. Čeprav je $|Z_1| < |Z_2|$, S ni dominantna množica grafa $G - Z_1$ in je dominantna množica grafa $G - Z_2$. Pri odstranjevanju povezav torej ni pomembno le število odstranjenih povezav, temveč tudi njihova izbira.

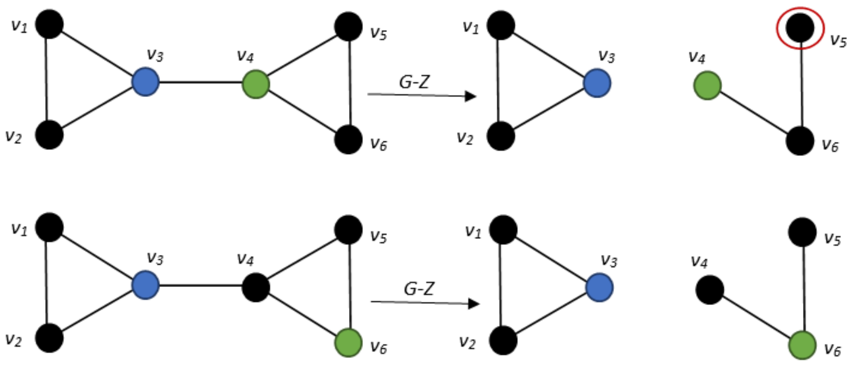


Slika 6. Vpliv odstranitve dveh različnih množic povezav na isto dominantno množico.

Odstranitev iste množice povezav iz grafa G ima lahko različen vpliv na različne dominantne množice grafa. Naj bosta S_1 in S_2 dominantni množici grafa G in $Z \subseteq E(G)$. Lahko se zgodi, da po odstranitvi množice Z iz grafa G, ena od množic S_1, S_2 dominira graf $G - Z$, druga pa ne. Tak primer je predstavljen v zgledu 8.

Zgled 8. Na sliki 7 sta označeni dominantni množici S_1 in S_2 grafa G, $S_1 = \{v_3, v_4\}$, $S_2 = \{v_3, v_6\}$. Grafu G odstranimo množico povezav $Z = \{v_3v_4, v_4v_5\}$. Množica S_2 še vedno dominira vsa vozlišča, torej je dominantna množica grafa $G - Z$, množica S_1 pa ne dominira vozlišča v_5, torej ni dominantna množica grafa $G - Z$.

Sedaj se bomo osredotočili na to, kaj se ob odstranjevanju povezav dogaja z dominantnim številom. Ker je dominantno število enako moči najmanjše dominantne množice, si moramo ogledati,



Slika 7. Vpliv odstranitve iste množice povezav na različni dominantni množici.

kaj se ob odstranjevanju povezav dogaja z njimi. Naj bo $M \in NDM(G)$. Iz zgornjih zgledov je razvidno, da M ni nujno dominantna množica grafa $G-Z$, kjer je Z množica odstranjenih povezav. Še vedno pa je mogoče, da obstaja neka druga množica $N \in NDM(G)$, ki dominira graf $G-Z$. Če taka množica obstaja, je $\gamma(G-Z) = \gamma(G)$, drugače pa je $\gamma(G-Z) > \gamma(G)$. Dominantno število grafa se torej z odstranjevanjem povezav poveča ali pa ostane enako.

Definicija 9. Množica $Z \subseteq E(G)$ je *kritična množica povezav (za dominacijo)* nepraznega grafa G, če velja:

$$\gamma(G-Z) > \gamma(G).$$

Množica $Z \subseteq E(G)$ je torej kritična množica povezav nepraznega grafa G, če njena odstranitev povzroči, da nobena množica $M \in NDM(G)$ ni dominantna množica grafa $G-Z$.

Kritična množica povezav nepraznega grafa seveda vedno obstaja. Če graf G z n vozlišči ni prazen, namreč velja $\Delta(G) \geq 1$ in po trditvi 1 sledi $\gamma(G) \leq n-1$. Če grafu G odstranimo množico povezav $Z = E(G)$, je graf $G-Z$ sestavljen iz n izoliranih vozlišč. Posledično ga lahko dominiramo le z množico $S = V(G)$ in velja $\gamma(G-Z) = n > \gamma(G)$. Množica povezav $E(G)$ je torej vedno kritična množica povezav nepraznega grafa G.

Ker kritična množica povezav nepraznega grafa vedno obstaja, se osredotočimo na iskanje najmanjše take množice. Motivacijo nam daje zgled 9.

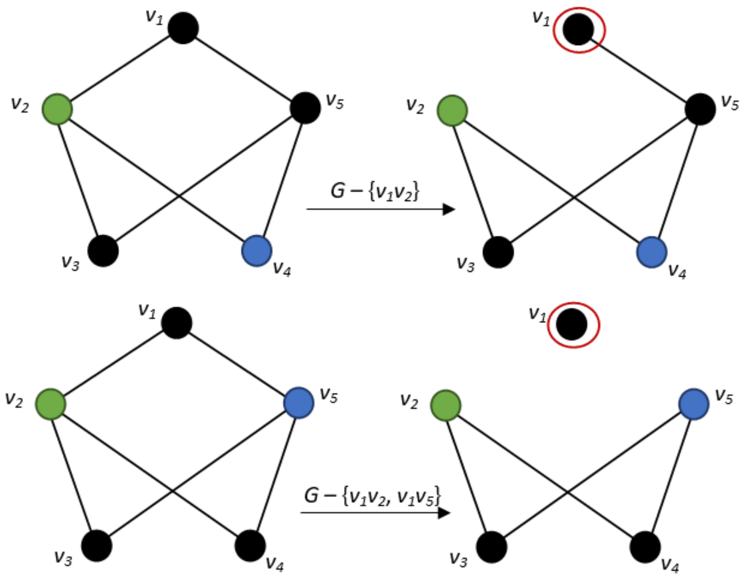
Zgled 9. Naj graf $G = (V, E)$ predstavlja računalniško omrežje, kjer vozlišča predstavljajo računalnike (oziroma njihove procesorje), dva procesorja pa sta sosedna, če med njima obstaja direktna komunikacijska povezava. Vsak procesor lahko pošilja podatke tistim procesorjem, s katerimi ima direktno komunikacijsko povezavo, občasno pa želimo zbrati informacije z vseh procesorjev. To storimo tako, da definiramo nekaj zbiralnih procesorjev, kamor preostali procesorji pošiljajo svoje informacije. Ker želimo, da je proces zbiranja kar se da hiter, dovolimo le neposredno pošiljanje zbiralnim procesorjem (ne dovolimo torej prepošiljanja informacij), želimo pa tudi, da je zbiralnih procesorjev čim manj. Spet torej iščemo najmanjšo dominantno množico grafa G.

Toda kaj se zgodi, če naenkrat propade ena ali več povezav med procesorji? Lahko imamo srečo in še vedno obstaja izmenjava informacij med ostalimi procesorji, lahko pa naš sistem propade. Občutljivosti omrežij (ta pogosto predstavimo z grafi oziroma njihovimi produkti) na odstranjevanje povezav obravnavamo preko spodaj definiranega povezavnega kritičnega števila.

Definicija 10. *Povezavno kritično število (za dominacijo)* grafa G je moč najmanjše kritične množice povezav grafa G. Označimo ga z $b(G)$.

Zgled 10. Poiščimo povezavno kritično število poti P_4. V zgledu 4 smo že poiskali vse njene najmanjše dominantne množice. Najti moramo torej najmanjšo tako množico povezav Z, da nobena izmed množic $M \in NDM(P_4)$ ni dominantna množica grafa $P_4 - Z$. Če odstranimo povezavo v_1v_2, so vsa vozlišča dominirana z množico $\{v_1, v_3\}$, če pa odstranimo povezavo v_2v_3, so vsa vozlišča dominirana z $\{v_2, v_3\}$. Odstranitev povezave v_3v_4 nam seveda da graf, izomorfen tistemu po odstranitvi v_1v_2. Torej je $b(P_4) > 1$. Ko poti P_4 odstranimo katerikoli dve povezavi, pot razpade na dve izolirani vozlišči in pot dolžine dva. Za dominacijo takega grafa potrebujemo tri vozlišča, kar je več od $\gamma(P_4) = 2$ in sledi $b(P_4) = 2$.

Zgled 11. Na sliki 8 sta označeni različni najmanjši dominantni množici S_1 in S_2 grafa G. Velja $S_1 = \{v_2, v_4\}$, $S_2 = \{v_2, v_5\}$. Poiščimo najmanjšo množico povezav Z, katere odstranitev povzroči, da S_1 ni dominantna množica grafa $G-Z$. Dovolj je odstraniti povezavo v_1v_2, saj potem vozlišče v_1 ni dominirano. To pa seveda ne pomeni $b(G) = 1$. S_1 po odstranitvi ene povezave sicer ni dominantna množica grafa $G - \{v_1v_2\}$, še vedno pa morda obstaja kaka druga množica $S \in NDM(G)$, ki dominira graf $G - \{v_1v_2\}$. Premislimo, da $S_2 = \{v_2, v_5\}$ dominira graf $G - \{v_1v_2\}$ in katerikoli podgraf, ki ga iz G dobimo z odstranitvijo le ene povezave. Če odstranimo katerokoli povezavo s krajiščem v v_2, je vozlišče na drugem krajišču te povezave še vedno dominirano z v_5. Zaradi simetrije enako velja tudi za odstranitev katerekoli povezave s krajiščem v v_5. S tem smo pokrili vse povezave grafa G. Torej moramo odstraniti vsaj dve povezavi, da S_2 ni dominantna množica grafa $G - Z$ in posledično $b(G) \geq 2$. Če odstranimo povezavi v_1v_2 in v_1v_5, graf razpade na izolirano vozlišče, ki mora biti vsebovano v najmanjši dominantni množici, in cikel C_4, ki ga dominiramo z najmanj dvema vozliščema. Torej velja $\gamma(G - \{v_1v_2, v_1v_5\}) = 3 > \gamma(G)$ in sledi $b(G) = 2$.



Slika 8. Odstranjevanje povezav z namenom uničenja najmanjše dominantne množice.

Sedaj si oglejmo, kolikšni sta povezavni kritični števili polnega grafa K_m in poti P_n.

Izrek 3. *Za $m \geq 2$ je $b(K_m) = \lceil \frac{m}{2} \rceil$.*

Dokaz. Naj bo H podgraf grafa K_m, ki ga dobimo z odstranitvijo manj kot $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ povezav iz grafa K_m. Ker smo odstranili manj kot $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ povezav, v grafu H obstaja vozlišče stopnje $m - 1$, ki lahko dominira vsa preostala vozlišča. Torej je $\gamma(H) = 1 = \gamma(K_m)$ in sledi $b(K_m) \geq \lceil \frac{m}{2} \rceil$. Dokazati je potrebno še, da je dovolj odstraniti natanko $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ povezav.

Če je m sod, odstranitev $\frac{m}{2}$ povezav brez skupnega vozlišča zniža stopnjo vsakega od vozlišč na $m-2$. Torej nobeno vozlišče ne more samo dominirati nastalega podgrafa H in v najmanjšo dominantno množico moramo izbrati poljubno vozlišče v in vozlišče u, ki z njim edino ni sosedno. Torej je $\gamma(H) = 2 > \gamma(K_m)$.

Če je m lih, po odstranitvi $\frac{m-1}{2}$ povezav brez skupnega vozlišča ostane natanko eno vozlišče stopnje $m-1$. Odstranimo še poljubno povezavo s krajiščem v tem vozlišču in nastali podgraf H nima več vozlišča stopnje $m-1$. Torej nobeno vozlišče ne more samo dominirati podgrafa H in $\gamma(H) = 2 > \gamma(K_m)$. ∎

Izrek 4. *Za $n \geq 2$ je*

$$b(P_n) = \begin{cases} 2, & \text{če } n \equiv 1 \pmod 3; \\ 1, & \text{če } n \equiv 0, 2 \pmod 3. \end{cases}$$

Dokaz. Dokaz razdelimo na dva dela, glede na vrednost $n \pmod 3$.

Primer 1. $n \equiv 1 \pmod 3$.

Ko grafu P_n odstranimo poljubno povezavo, graf razpade na poti P_{n_1} in $P_{n_2}, n_1 + n_2 = n$. Nastali graf označimo s H. Ker je $n \equiv 1 \pmod 3$, velja $n_1 \equiv n_2 \equiv 2 \pmod 3$ ali $n_1 \equiv 0 \pmod 3$ in $n_2 \equiv 1 \pmod 3$ (primer $n_1 \equiv 1 \pmod 3$ in $n_2 \equiv 0 \pmod 3$ lahko zaradi simetrije izpustimo).

Podprimer 1.1. $n_1 \equiv n_2 \equiv 2 \pmod 3$.

Velja: $\gamma(H) = \gamma(P_{n_1}) + \gamma(P_{n_2}) = \lceil \frac{n_1}{3} \rceil + \lceil \frac{n_2}{3} \rceil = \frac{n_1+1}{3} + \frac{n_2+1}{3} = \frac{n+2}{3} = \lceil \frac{n}{3} \rceil = \gamma(P_n)$. V primeru $n \equiv 1 \pmod 3$ in $n_1 \equiv n_2 \equiv 2 \pmod 3$ torej velja $b(P_n) \geq 2$.

Podprimer 1.2. $n_1 \equiv 0 \pmod 3$ in $n_2 \equiv 1 \pmod 3$.

Velja: $\gamma(H) = \gamma(P_{n_1}) + \gamma(P_{n_2}) = \lceil \frac{n_1}{3} \rceil + \lceil \frac{n_2}{3} \rceil = \frac{n_1}{3} + \frac{n_2+2}{3} = \frac{n+2}{3} = \lceil \frac{n}{3} \rceil = \gamma(P_n)$. V primeru $n \equiv 1 \pmod 3$, $n_1 \equiv 0 \pmod 3$ in $n_2 \equiv 1 \pmod 3$ torej velja $b(P_n) \geq 2$.

Od tod sledi $b(P_n) \geq 2$ za $n \equiv 1 \pmod 3$.

Pokažimo, da je dovolj odstraniti 2 povezavi. Odstranimo povezavi v_1v_2 in v_2v_3. Nastali graf H sestoji iz izoliranih vozlišč v_1, v_2 in poti dolžine $n-2$, $n-2 \equiv 2 \pmod 3$. Velja $\gamma(H) = |\{v_1\}| + |\{v_2\}| + \gamma(P_{n-2}) = 2 + \lceil \frac{n-2}{3} \rceil = 2 + \frac{(n-2)+1}{3} = 2 + \frac{n-1}{3} = 2 + (\lceil \frac{n}{3} \rceil - 1) = 1 + \gamma(P_n)$.

Torej v primeru $n \equiv 1 \pmod 3$ velja $b(P_n) = 2$.

Primer 2. $n \equiv 0, 2 \pmod 3$.

Dovolj je pokazati, da je $b(P_n)$ navzgor omejeno z 1, saj iz tega sledi $b(P_n) = 1$. Odstranimo povezavo v_1v_2. Nastali graf H sestoji iz izoliranega vozlišča v_1 in poti dolžine $n-1$. Velja $\gamma(H) = |\{v_1\}| + \gamma(P_{n-1}) = 1 + \lceil \frac{n-1}{3} \rceil = 1 + \lceil \frac{n}{3} \rceil = 1 + \gamma(P_n)$. Od tod sledi $b(P_n) \leq 1$ in posledično velja $b(P_n) = 1$ za $n \equiv 0, 2 \pmod 3$. ∎

5. Krepki produkt

Kot je omenjeno že v uvodu, povezovalna omrežja pogosto konstruiramo z grafovskimi produkti. Med njimi ima posebno vlogo krepki produkt, definiran v nadaljevanju. Njegova pomembnost je podrobneje predstavljena v [2, 27.1 poglavje], še več njegovih lastnosti pa v [2, 4. poglavje].

Definicija 11. *Krepki produkt* grafov G in H označimo z $G \boxtimes H$.

Njegova množica vozlišč je definirana kot:

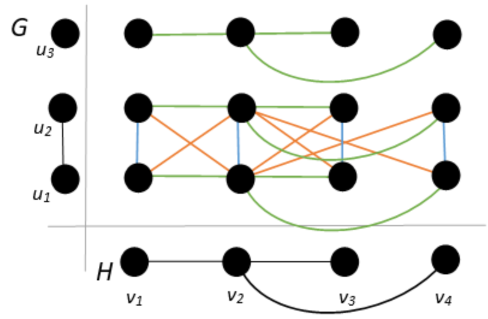
$$V(G \boxtimes H) = V(G) \times V(H) = \{(g,h) |\, g \in V(G) \text{ in } h \in V(H)\}.$$

Množica povezav je definirana kot:

$$\begin{aligned} E(G \boxtimes H) =& \{(g,h)(g',h') |\, g = g' \text{ in } hh' \in E(H)\} \cup \\ & \{(g,h)(g',h') |\, gg' \in E(G) \text{ in } h = h'\} \cup \\ & \{(g,h)(g',h') |\, gg' \in E(G) \text{ in } hh' \in E(H)\}. \end{aligned}$$

Iz definicije takoj sledi, da je preslikava $(g,h) \mapsto (h,g)$ izomorfizem med $G \boxtimes H$ in $H \boxtimes G$. Krepki produkt je torej komutativen, v smislu, da je $G \boxtimes H \cong H \boxtimes G$. V nadaljevanju zato ni pomembno, kateri graf je v produktu napisan prvi, oziroma kateri izmed grafov je narisan na levi in kateri spodaj.

Zgled 12. Na sliki 9 je prikazan krepki produkt dveh grafov. Povezave tipa $\{(u,v)(u',v')|\, u = u' \text{ in } vv' \in E(H)\}$ so narisane z zeleno barvo, povezave tipa $\{(u,v)(u',v')|\, uu' \in E(G) \text{ in } v = v'\}$ z modro, povezave tipa $\{(u,v)(u',v')|\, uu' \in E(G) \text{ in } vv' \in E(H)\}$ pa z oranžno.



Slika 9. Krepki produkt grafov G in H.

Zgled 13. Oglejmo si, kakšne so stopnje vozlišč v krepkem produktu polnega grafa K_m in poti P_n. V primeru $n = 1$, je $K_m \boxtimes P_n \cong K_m$, v primeru $n = 2$, pa je $K_m \boxtimes P_n \cong K_{2m}$. Graf $K_m \boxtimes P_n$ ima $m \cdot n$ vozlišč, torej za $n \in \{1,2\}$ velja $\deg((u_i, v_j)) = mn - 1$ za vsako vozlišče $(u_i, v_j) \in K_m \boxtimes P_n$.

V primeru $n > 2$, ima pot P_n dve vozlišči stopnje 1 in $n-2$ vozlišč stopnje 2, v grafu K_m pa imajo seveda vsa vozlišča stopnjo $m-1$. Stopnja vozlišča $(u_i, v_j) \in K_m \boxtimes P_n$ je torej odvisna od tega ali je $j \in \{1,n\}$ oziroma v_j krajišče poti P_n. Oglejmo si najprej stopnjo vozlišča (u_i, v_j) v primeru $j \in \{1,n\}$. Zaradi simetrije je dovolj ugotoviti le stopnjo vozlišča v primeru $j = 1$. Vozlišče (u_i, v_1) je po definiciji krepkega produkta sosedno z vozlišči oblike (u_i, v_2), vozlišči oblike (u_k, v_1), kjer $k \neq i$ in vozlišči oblike (u_k, v_2), kjer spet velja $k \neq i$. Prvi obliki ustreza natanko eno vozlišče, drugi $m-1$ vozlišč, tretji zopet $m-1$ vozlišč. Skupaj ima vozlišče (u_i, v_1) torej $2m-1$ sosedov. Velja, da je $\deg((u_i, v_j)) = 2m - 1$ za $j \in \{1, n\}$.

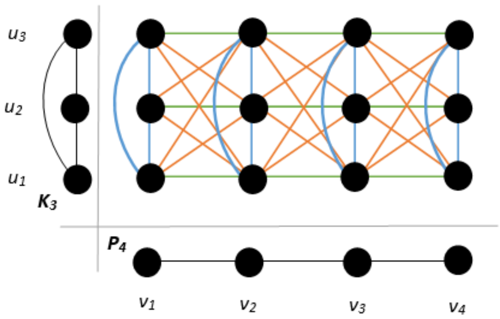
Sedaj ugotovimo še stopnjo vozlišča (u_i, v_j) v primeru $j \notin \{1,n\}$. Vozlišče (u_i, v_j) je po definiciji krepkega produkta sosedno z vozlišči oblike (u_i, v_l), kjer je $l \in \{j-1, j+1\}$, vozlišči oblike (u_k, v_j), kjer $k \neq i$ in vozlišči oblike (u_k, v_l), kjer velja $k \neq i$ in $l \in \{j-1, j+1\}$. Prvi obliki ustrezata natanko dve vozlišči, drugi $m-1$ vozlišč, tretji pa $2(m-1)$ vozlišč. Skupaj ima vozlišče torej $3m-1$ sosedov. Velja $\deg((u_i, v_j)) = 3m - 1$ za $j \notin \{1,n\}$. To sta tudi edini možni stopnji vozlišč grafa $K_m \boxtimes P_n$. Za $n > 2$ torej velja $\Delta(K_m \boxtimes P_n) = 3m - 1$ in $\delta(K_m \boxtimes P_n) = 2m - 1$.

Zgled 14. Na sliki 10 je prikazan krepki produkt polnega grafa K_3 in poti P_4. Povezave so obarvane na enak način kot v zgledu 12.

Kot smo ugotovili v zgledu 13, imajo vozlišča oblike (u_i, v_j), $j \in \{1, n\}$, oziroma v našem primeru vozlišča oblike (u_i, v_1) in (u_i, v_4) stopnjo $2m - 1 = 5$, preostala vozlišča pa stopnjo $3m - 1 = 8$.

6. Dominantno število in kritično povezavno število grafa $K_m \boxtimes P_n$

Za zaključek določimo dominantno število in kritično povezavno število grafa $K_m \boxtimes P_n$. Izkaže se, da je dominantno število krepkega produkta polnega grafa K_m in poljubnega grafa H neodvisno od velikosti m, zato poiščemo dominantno število malo širšega spektra grafov. Določili bomo dominantno število $\gamma(K_m \boxtimes H)$ za popolnoma poljuben graf H.



Slika 10. Krepki produkt K_3 in P_4.

Izrek 5. $\gamma(K_m \boxtimes H) = \gamma(H)$.

Dokaz. Dokažimo najprej, da je $\gamma(K_m \boxtimes H) \geq \gamma(H)$. Naj bo $M^{'} \subseteq V(K_m \boxtimes H)$ in naj velja $|M^{'}| < \gamma(H)$. Dovolj je dokazati, da množica $M^{'}$ ne more dominirati grafa $K_m \boxtimes H$, saj od tod sledi $\gamma(K_m \boxtimes H) \geq \gamma(H)$. Naj bo M množica vozlišč, definirana kot $M = \{h_i | (u_j, h_i) \in M^{'}\}$. Ker je $|M| < \gamma(H)$, obstaja vozlišče $h_x \in H$, ki v grafu H ni dominirano z množico M. Torej velja $h_x \notin M$ in $h_x h_i \notin E(H)$ za vsak $h_i \in M$. Ker velja $h_x \notin M$ in $h_x h_i \notin E(H)$ za vsak $h_i \in M$, po definiciji krepkega produkta nobeno od vozlišč oblike (u_j, h_x) ne more biti sosedno z nobenim od vozlišč v množici M'. Torej množica $M^{'}$ ne more dominirati vozlišč oblike (u_j, h_x) in posledično grafa $K_m \boxtimes H$. Sledi $\gamma(K_m \boxtimes H) \geq \gamma(H)$.

Dokažimo še, da je $\gamma(K_m \boxtimes H) \leq \gamma(H)$. Naj bo $N = \{h_{i_1}, h_{i_2}, \ldots, h_{i_{\gamma(H)}}\}$ najmanjša dominantna množica grafa H. Dovolj je dokazati, da množica vozlišč $N^{'} = \{(u_1, h_{i_1}), (u_1, h_{i_2}), \ldots, (u_1, h_{i_{\gamma(H)}})\}$, kjer je $u_1 \in V(K_m)$, dominira graf $K_m \boxtimes H$. Ker je $|N^{'}| = \gamma(H)$, od tod namreč sledi $\gamma(K_m \boxtimes H) \leq \gamma(H)$. Vzemimo poljubno vozlišče (u_j, h_i) grafa $K_m \boxtimes H$, ki ni vsebovano v N'. Pokazati je treba, da je vozlišče (u_j, h_i) sosedno z vsaj enim vozliščem v množici $N^{'}$ in posledično dominirano z množico N'. Vozlišče (u_j, h_i) je sosedno z vozliščem $(u_1, h_x) \in N'$, kjer je h_x tisto vozlišče iz množice N, ki dominira vozlišče h_i v grafu H. Velja namreč $u_j = u_1$ ali $u_j u_1 \in E(K_m)$ in $h_i h_x \in E(H)$, zato sta vozlišči po definiciji krepkega produkta sosedni. Torej je $N^{'}$ dominantna množica grafa $K_m \boxtimes H$ in sledi $\gamma(K_m \boxtimes H) \leq \gamma(H)$.

Z upoštevanjem zgornje in spodnje meje za $\gamma(K_m \boxtimes H)$ dobimo točno vrednost $\gamma(K_m \boxtimes H) = \gamma(H)$. ■

Izrek 6. $\gamma(K_m \boxtimes P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Dokaz. Po izreku 5 velja $\gamma(K_m \boxtimes P_n) = \gamma(P_n)$, po izreku 2 pa je $\gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. ■

Opomba 1. Izrek 6 je formuliran in dokazan v [4], vendar pa je tamkajšnji dokaz drugačen. V dokazu je namreč uporabljeno k-pakiranje, ki bi ga morali vpeljati zgolj za potrebo tega dokaza. Med pisanjem članka se je izkazalo, da se da izrek 6 dokazati tudi na način, zapisan zgoraj. V želji izogniti se vpeljavi novih definicij zgolj za potrebo enega dokaza, je izrek 6 dokazan na izviren način, najprej z izvirno formulacijo in dokazom izreka 5 in nato uporabo le tega pri dokazu izreka 6.

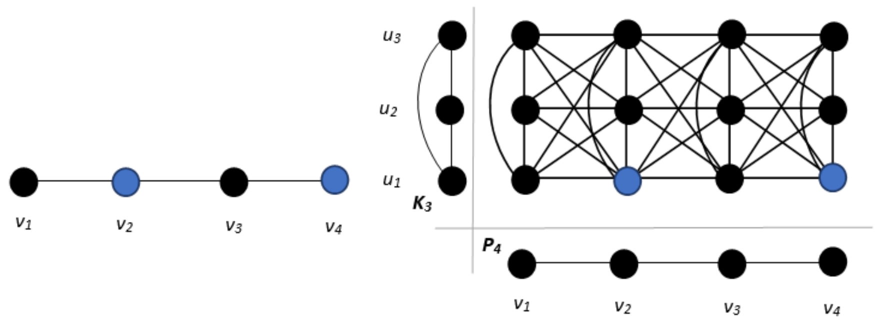
Opomba 2. Izrek 6 bi lahko dokazali tudi brez formulacije in uporabe izreka 5. V primeru $n > 2$ smo v zgledu 13 namreč ugotovili, da je $\Delta(K_m \boxtimes P_n) = 3m - 1$. Z uporabo izreka 1 nato dobimo spodnjo mejo za $\gamma(K_m \boxtimes P_n)$. Velja namreč $\left\lceil \frac{mn}{1+\Delta(K_m \boxtimes P_n)} \right\rceil = \left\lceil \frac{mn}{1+(3m-1)} \right\rceil = \lceil \frac{n}{3} \rceil \leq \gamma(K_m \boxtimes P_n)$. Nato po istem principu kot v dokazu izreka 2 in drugem delu dokaza izreka 5 pokažemo, da $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ vozlišč zadostuje za dominacijo. V primeru $n = 1$ velja $K_m \boxtimes P_n \cong K_m$, v primeru $n = 2$ pa

$K_m \boxtimes P_n \cong K_{2m}$, in posledično oba grafa lahko dominiramo z enim samim vozliščem. Torej je $\gamma(K_m \boxtimes P_n) = 1$, kar za $n = 1, 2$ ustreza obliki $\lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Izrek 6 smo z uporabo izreka 5 dokazali zato, ker z njegovo formulacijo in dokazom dobimo širšo sliko dominacije krepkega produkta polnega grafa K_m in poljubnega grafa H.

Zgled 15. Dokaz izreka 5 nam tudi pokaže, kako lahko hitro najdemo najmanjšo dominantno množico grafa $K_m \boxtimes H$, če znamo najti najmanjšo dominantno množico grafa H. Če ugotovimo, da je množica $M = \{h_{i_1}, h_{i_2}, \ldots, h_{i_k}\}$ najmanjša dominantna množica grafa H, potem je za poljuben $u_j \in V(K_m)$ množica $M' = \{(u_j, h_{i_1}), (u_j, h_{i_2}), \ldots, (u_j, h_{i_k})\}$ najmanjša dominantna množica grafa $K_m \boxtimes H$.

Zgled 16. Na sliki 11 je predstavljena najmanjša dominantna množica grafa $K_3 \boxtimes P_4$. Množica je izbrana po postopku, opisanem v dokazu izreka 5 in zgledu 15. Na levi je prikazana najmanjša dominantna množica poti P_4, ki smo jo upoštevali pri izbiri najmanjše dominantne množice grafa $K_3 \boxtimes P_4$.



Slika 11. Najmanjša dominantna množica grafa $K_3 \boxtimes P_4$, izbrana glede na najmanjšo dominantno množico poti P_4.

Sedaj določimo še povezavno kritično število grafa $K_m \boxtimes P_n$. Njegova vrednost je podana brez dokaza, saj je ta precej dolg. Izrek je v celoti dokazan v [4].

Izrek 7. *Če je $n \geq 2$, potem je*

$$b(K_m \boxtimes P_n) = \begin{cases} \lceil \frac{m}{2} \rceil, & \text{če je } n \equiv 0 \pmod 3; \\ m, & \text{če je } n \equiv 2 \pmod 3; \\ \lceil \frac{3m}{2} \rceil, & \text{če je } n \equiv 1 \pmod 3. \end{cases}$$

7. Zaključek

Dominantne množice se naravno pojavljajo kot matematični model za reševanje problemov na povezovalnih omrežjih in matematičnih problemih s šahovnico. Iskanje dominantne množice grafa je v splošnem NP-težek problem, zato se pri iskanju najmanjših dominantnih množic in števila osredotočimo na posamezne podskupine grafov s podobnimi lastnostmi. Poleg dominacije, predstavljene v članku, obstajajo še druge vrste dominacije, kot so na primer neodvisna dominacija, povezana dominacija in rimska dominacija. Vsaka od njih predstavlja dodatne omejitve pri iskanju dominantne množice, kar omogoča bolj natančno modeliranje različnih realnih situacij in problemov.

LITERATURA

[1] Queen's graph, Wikipedia, the free encyclopedia. `http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Queen's\%20graph&oldid=1136086355`, 2023. [ogled 5. 5. 2023].

[2] Richard Hammack, Wilfried Imrich, Sandi Klavžar. *Handbook of product graphs.* CRC press, 2011.

[3] Teresa W. Haynes, Stephen Hedetniemi, Peter Slater. *Fundamentals of domination in graphs.* CRC press, 1998.

[4] Weisheng Zhao, Heping Zhang. *The bondage number of the strong product of a complete graph with a path and a special starlike tree. Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, 8(01):1650006, 2016.