

ANYONI

VITA MOVRIN

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Vse elementarne delce lahko razvrstimo v dva razreda: fermione in bozone. Anyoni ne sodijo ne v enega ne v drugega. Njihova definirajoča lastnost je poljubna (angl. *any*) faza, ki jo pridobi valovna funkcija pri menjavi dveh delcev. Slednja torej ni niti simetrična niti antisimetrična glede na zamenjavo obeh delcev. Tovrstni pojav ni možen v trirazsežnem prostoru, temveč ga lahko opazimo šele, ko je gibanje elektronov omejeno na dve dimenziji, saj je, kot se izkaže, kvantna statistika odraz topologije svetovnic. Eksperimentalno je najzanimivejši t.i. kvantni Hallov pojav, ki je vzbudil teoretično zanimanje za anyonske kvazidelce, z obstojem katerih ga je mogoče pojasniti. V članku obravnavamo koncepte, ki so ključni za razumevanje tega pojava, in zaključimo z opisom nedavne eksperimentalne potrditve anyonov.

ANYONS

All elementary particles can be classified into two categories: fermions and bosons. Anyons do not belong to either of these categories. Their defining characteristic is an arbitrary phase, referred to as "any", acquired by the wave function when two particles are exchanged. Consequently, the wave function is neither symmetric nor antisymmetric with respect to the interchange of both particles. Such a phenomenon is not possible in three-dimensional space. However, it can be observed when the motion of electrons is confined to two dimensions, as quantum statistics in this case becomes a reflection of the topology of worldlines. The most intriguing experimental phenomenon is the so-called quantum Hall effect, which has stimulated theoretical interest in anyonic quasi-particles, whose existence can explain this effect. In the article, we explore the key concepts crucial for understanding this phenomenon and conclude with a description of recent experimental confirmation of anyons.

1. Uvod

V sistemih, kjer je gibanje elektronov omejeno na dve dimenziji, je mogoč obstoj delcev, ki niso ne bozoni ne fermioni, temveč t.i. anyoni. Eksperimentalno realizacijo takšnega sistema omogoča ulomljeni kvantni Hallov pojav (angl. *fractional quantum Hall effect*, v nadaljevanju FQHE), prvič opažen leta 1982. Teoretične napovedi, da imajo kvazidelci, ključni za fizikalni opis FQHE, le del osnovnega naboja in se podreajo nenavadni – *anyonski* – statistiki, so bile tudi eksperimentalno potrjene.

V članku se najprej osredotočimo na teoretično motivacijo in vpeljavo anyonov, si podrobneje ogledamo svetovnice delcev v dveh dimenzijah in uvedemo t.i. grupo $U(1)$. V nadaljevanju obravnavamo kvantni Hallov pojav, ki ga razložimo s pomočjo kvazidelcev z delnim nabojem in anyonsko statistiko. Omenimo še nekaj fenomenoloških lastnosti prevodnosti v kvantnem Hallovem sistemu in obnovimo osrednje koncepte, kot so Landauovi nivoji in Berryjeva faza. Zaključimo s pregledom nedavne eksperimentalne potrditve anyonov ([1]), ki sloni na kvantnem Hallovem pojavu.

2. Kvantna statistika

Kvantna statistika temelji na identičnosti oz. nerazločljivosti kvantnih delcev. Spomnimo se, da v tridimenzionalnem (3D) prostoru delimo delce v dva glavna razreda: bozone in fermione. V statistični fiziki porazdelitev bozonov po energijskih nivojih v ravnovesnem stanju določa Bose-Einsteinova statistika, porazdelitev fermionov pa Fermi-Diracova statistika. V kvantni mehaniki je odločilen fazni faktor, ki ga pridobi večdelčna valovna funkcija ob zamenjavi dveh delcev: za bozone je ta enak $+1$, za fermione pa -1 . Pripomnimo, da zvezo med "zamenjalno statistiko" delcev in spinom podaja t.i. izrek o spinski statistiki. Ta pravi, da imajo bozoni, katerih valovna funkcija

je simetrična na zamenjavo dveh delcev, celoštevilski spin, nasprotno pa imajo fermioni, delci z antisimetrično valovno funkcijo, polštevilski spin [2].

Obravnavajmo valovno funkcijo dveh delcev, $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, kjer sta $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \mathbb{R}^d$ koordinati delcev in d dimenzija prostora. Ob zamenjavi delcev ψ pridobi t.i. statistično fazo, ki je na nek način analogna Aharonov-Bohmovi fazi. Iz nerazločljivosti delcev sledi, da mora po menjavi valovna funkcija opisovati isto kvantno stanje, torej velja

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = e^{i\theta} \psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1).$$

V treh dimenzijah ($d = 3$) je dvakratna zamenjava ekvivalentna identični transformaciji, se pravi

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = e^{i2\theta} \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv e^{i2\pi\alpha} \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2).$$

Od tod sledi

$$\alpha \in \mathbb{Z} \text{ oziroma } \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \pm \psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1), \quad (1)$$

kar ustreza bozonski in fermionski statistiki. Kot bomo videli, enačba (1) velja le za $d \geq 3$, sicer pa je α poljubno (*any*) število – od tod ime anyoni [3].

Izkaže se, da je kvantna statistika odraz topologije svetovnic delcev v prostor-času, zato si v nadaljevanju ogledamo nekaj topoloških pojmov, ki vodijo do omenjenih lastnosti anyonskih delcev.

2.1 Konfiguracijski prostor identičnih delcev

Sprva obravnavamo konfiguracijski prostor sistema N identičnih delcev, tj. prostor vseh možnih položajev oziroma stanj takšnega sistema. Naj bo X konfiguracijski prostor enega delca. Naivno bi lahko sklepali, da je posplošitev za N delcev kartezični produkt X^N , kar pa drži samo lokalno. Ker obravnavamo povsem identične delce, ne razlikujemo med točkami v X^N , ki se med seboj razlikujejo le v vrstnem redu koordinat, tj. v razporeditvi posameznih delcev po določenih položajih v prostoru. Konfiguracijski prostor zapišemo torej kot kvocientni prostor X^N/S_N , kjer je S_N simetrična grupa permutacij. Intuitivno to pomeni, da vse točke s permutiranimi koordinatami obravnavamo kot iste oz. jih “zlepimo skupaj” ter tako dobimo nov topološki prostor [4, 5].

Zaradi enostavnosti natančneje preučimo konfiguracijski prostor dveh delcev ($N = 2$), ki se gibljeta v d -dimenzionalnem evklidskem prostoru ($X = \mathbb{R}^d$), imamo torej $(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)/S_2$. Če za opis konfiguracije uporabimo koordinato težišča

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{2}$$

in relativno koordinato

$$\delta\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1,$$

točkama $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ in $(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$ ustrežata $(\tilde{\mathbf{x}}, \delta\mathbf{x})$ in $(\tilde{\mathbf{x}}, -\delta\mathbf{x})$. Tako se konfiguracijski prostor prepiše v $\mathbb{R}^d \times (\mathbb{S}^{d-1}/S_2) \times (0, \infty)$, kjer je \mathbb{S}^{d-1} ($d - 1$)-dimenzionalna enotska sfera, $(0, \infty)$ ustreza razdalji med delcema, S_2 pa permutaciji diametralno nasprotnih točk – identificiramo torej $\delta\mathbf{x}$ in $-\delta\mathbf{x}$.

2.2 Fundamentalna grupa

Poglejmo, kje pride do bistvene razlike med primeroma identičnih delcev v treh in dveh dimenzijah. Matematično se ta razlika izraža v fundamentalni grupi konfiguracijskega prostora. Omenjeno grupo tvorijo paroma nehomotopne sklenjene poti skozi izbrano točko v danem prostoru skupaj z operacijo seštevanja oz. komponiranja poti. Operacija je asociativna, inverz predstavlja pot v nasprotni smeri, enoto pa konstanta. Spomnimo se, dve zanki $\gamma, \gamma' : [0, 1] \mapsto X$ sta homotopni, če lahko,

intuitivno, eno zvezno deformiramo v drugo. Povedano drugače, fundamentalna grupa topološkega prostora X je grupa ekvivalenčnih razredov sklenjenih poti glede na relacijo homotopije, označimo jo s $\pi_1(X, \mathbf{x}_0)$, torej

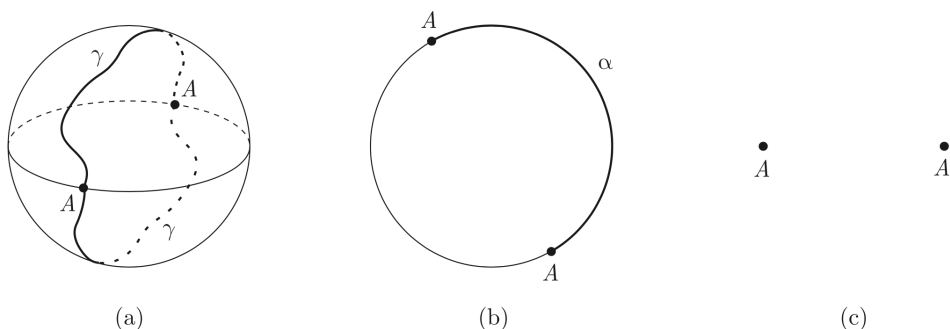
$$\pi_1(X, \mathbf{x}_0) = \{\text{nehomotopne zanke v prostoru } X \text{ skozi točko } \mathbf{x}_0 \in X\}.$$

Nadaljujemo z obravnavo dveh identičnih delcev. Za konfiguracijski prostor velja

$$\pi_1(\mathbb{R}^d \times (\mathbb{S}^{d-1}/S_2) \times (0, \infty)) = \pi_1(\mathbb{S}^{d-1}/S_2),$$

saj sta prostora \mathbb{R}^d in $(0, \infty)$ enostavno povezana (“brez lukenj”), ali ekvivalentno, vse sklenjene poti homotopne konstanti – fundamentalna grupa je trivialna [4, 5].

Na sferi v 3D lahko prav tako vsako sklenjeno pot zvezno deformiramo v točko, torej je fundamentalna grupa trivialna, $\pi_1(\mathbb{S}^2) = 0$. Enako velja za višje dimenzije. Nekoliko drugače se izkaže za prostor \mathbb{S}^{d-1}/S_2 in $d \geq 3$. Ker ne razločujemo med diametralno nasprotnimi točkami, imamo ob običajnih sklenjenih krivuljah na sferi še (do homotopije natančno) pot med poloma sfere (γ na sliki 1(a)), ki jo, ker sta začetna in končna točka identični, prav tako pojmuje kot sklenjeno. Vidimo, da tovrstne poti niso homotopne konstanti, saj jih zaradi predpisanega začetka in konca na nasprotnih polih ni mogoče zvezno deformirati v zgolj eno točko. Glede na relacijo homotopije imamo torej dva ekvivalenčna razreda in tako s komponiranjem poti dobimo ciklično grupo reda 2, ki je izomorfna $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, torej $\pi_1(\mathbb{S}^{d-1}/S_2) = \mathbb{Z}_2$. Opazimo, da γ ravno predstavlja zamenjavo identičnih delcev, med tem ko kompozitum $\gamma \circ \gamma$ predstavlja dve zaporedni zamenjavi [4, 5].



Slika 1. Sklenjene poti v prostorih \mathbb{S}^{d-1}/S_2 , ki ustrezajo zamenjavi delcev v prostoru \mathbb{R}^d . Imamo fundamentalne grupe: (a) $\pi_1(\mathbb{S}^2/S_2) = \mathbb{Z}_2$, (b) $\pi_1(\mathbb{S}^1/S_2) = \mathbb{Z}$ in (c) $\pi_1(\mathbb{S}^0/S_2) = 0$. Prirejeno po [4].

Sklenjene poti na krožnici (1-sferi) predstavljajo večkratna navitja na krog, zato je fundamentalna grupa izomorfna celim številom (ta ustrezajo številu navitij), se pravi $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$. V primeru konfiguracijskega prostora za $d = 2$ dobimo enako: $\pi_1(\mathbb{S}^1/S_2) = \mathbb{Z}$. Res, pot α na sliki 1(b) v danem primeru obravnavamo kot sklenjeno, prav tako pa tudi vse poti oblike α^n , $n \in \mathbb{Z}$, ki so vse paroma nehomotopne. Posplošitev krogle na eno dimenzijo je interval, posledično 0-sfero (rob 1-krogle) predstavljata dve točki. Če je prostor \mathbb{S}^0 nepovezan, za $d = 1$ (slika 1(c)) dobimo $\pi_1(\mathbb{S}^0/S_2) = 0$, saj med točkama sploh ne razlikujemo. Sicer je definicija zamenjalne statistike v eni dimenziji precej problematična, saj je ta neizogibno povezana z lokalnimi interakcijami – delca gresta pri izmenjavi nujno eden skozi drugega.

Za splošen problem N identičnih delcev nas zanima fundamentalna grupa prostora $(\mathbb{R}^d)^N/S_N$, kar je nekoliko zahtevnejši primer s področja algebraične topologije. Izkaže se, da velja

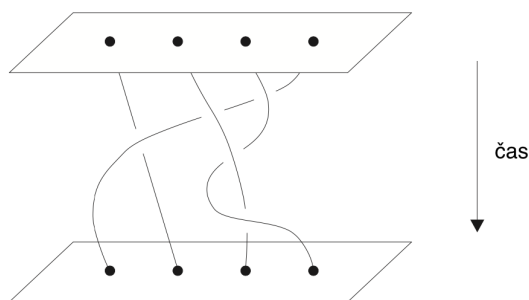
$$\begin{aligned} \pi_1((\mathbb{R}^d)^N/S_N) &= B_N \quad \text{za } d = 2, \\ \pi_1((\mathbb{R}^d)^N/S_N) &= S_N \quad \text{za } d \geq 3, \end{aligned}$$

kjer je B_N grupa kit (angl. *braid group*) N objektov in S_N permutacijska grupa [4, 5].

2.3 Grupa kit in svetovnice

Pri obravnavi zamenjalne statistike nas zanima časovni razvoj stanja N identičnih delcev, ki se gibljejo v prostoru. V izbranem časovnem intervalu opazujemo nastale trajektorije v prostor-času, t.i. svetovnice, katerih začetne in končne točke so torej fiksirane, kot prikazuje slika 2. Pri gibanju delcev v treh dimenzijah je prostor-čas 4-razsežen, svetovnice (angl. *worldlines*) pa lahko vedno razpletemo. V splošnem lahko namreč vsak vozal razvozlamo v štirih dimenzijah, saj lahko v “presečiščih” zamenjamo, katera krivulja je “zgoraj”. Lahko si namreč mislimo, da četrto koordinato predstavimo z barvo. Na presečišču v treh dimenzijah ene krivulje ne moremo preprosto zapeljati čez drugo, sedaj pa lahko to storimo tako, da se prestavimo v četrto dimenzijo. To pomeni: zamenjamo barvo problematičnega dela krivulje in na ta način dobimo dve različni točki v \mathbb{R}^4 . Od tod sledi, da je pri gibanju v treh dimenzijah ključna le permutacija delcev po položajih v prostoru, saj so si družine različno prepletenih svetovnic med izbrano začetno in končno razporeditvijo delcev v tem primeru med seboj homotopne [4, 5].

Kot vidimo na sliki 2, so v primeru dvodimenzionalnega gibanja časovnice delcev krivulje v $(2+1)$ -razsežnem prostor-času. Izkaže se, da le-te tvorijo kite (ob predpostavki, da sta začetna in končna konfiguracija enaki), topologijo prostor-časa in trajektorij v njem pa tedaj opisuje grupa B_N , ki jo v nadaljevanju nekoliko podrobneje preučimo.

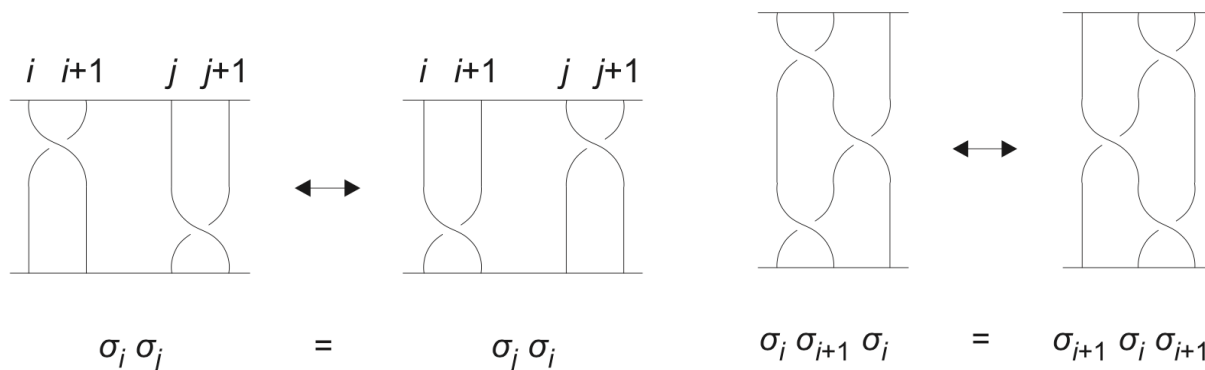


Slika 2. Časovnice štirih identičnih delcev v $(2+1)$ -dimenzionalnem prostor-času.

Najprej definiramo elementarno operacijo σ_j kot premik delca j “čez” delec $j + 1$, tako da se njuna položaja zamenjata, ostali delci pa ostanejo na svojih mestih. Produkt teh operacij predstavlja zaporedne zamenjave parov delcev, od koder sledi, da $\sigma_1, \dots, \sigma_{N-1}$ generirajo grupo B_N . Veljajo sledeče zveze, ki jih prikazuje slika 3,

$$\begin{aligned} \sigma_j \sigma_i &= \sigma_i \sigma_j \text{ za } |j - i| \geq 2, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \\ \sigma_j^{-1} \sigma_j &= \sigma_j \sigma_j^{-1} = 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Pripomnimo, da bi dodatni zvezi $\sigma_j^2 = 1$ dobili simetrično grupo S_N [2, 4]. Preverimo lahko, da je za $N = 2$ grupa B_2 izomorfna \mathbb{Z} , nasprotno pa je $S_2 = \mathbb{Z}_2$, kot smo pokazali na primeru konfiguracijskega prostora dveh delcev v dveh in treh dimenzijah.



Slika 3. Zveze med generatorji grupe kit σ_j , $j \in \{1, \dots, N - 1\}$. Vir: [4].

Poglejmo še t.i. enodimenzionalne upodobitve grupe B_N . Generatorju σ_j priredimo kompleksno število $e^{i\alpha_j}$, $\alpha_j \in [0, 2\pi]$. Iz zveze (2) sledi $e^{i\alpha_1} = \dots = e^{i\alpha_{N-1}} \equiv e^{i\alpha}$. Torej imamo preslikavo

$$\rho_\alpha : \sigma_j \mapsto e^{i\alpha}, \quad j \in \{1, 2, \dots, N - 1\}.$$

Opazimo, da za razliko od permutacijske grupe z upodobitvijo ρ_α razlikujemo med identiteto in σ_j^2 (če le velja $\alpha \neq 0, \pi$). Dejansko se grupa S_N razlikuje od B_N le za dodatno zahtevo $\sigma_j^2 = 1$ in ima posledično samo dve enodimenzionalni upodobitvi, namreč $\rho_\pm : \sigma_j \mapsto \pm 1$. Le-ti ravno ustrezata bozonski in fermionski statistiki [4].

Videli smo torej, da je 3D prostor, kar se topologije svetovnic tiče, res precej drugačen od 2D. Topološke lastnosti slednjega omogočajo obstoj delcev s poljubno statistično fazo α , t.i. anyonov. Pri eksperimentalnem raziskovanju tovrstnih eksotičnih delcev se je torej potrebno osredotočiti na sisteme, kjer se fizika dogaja v 2D plasteh.

3. Kvantni Hallov pojav

Kvantni Hallov pojav je primer topološkega stanja snovi, ki ga opazimo, ko dvodimenzionalni elektronski sistem (2DES) ohladimo do nizkih temperatur in postavimo v močno magnetno polje. V kvantnem Hallovem režimu glavnina snovi tvori izolator, naboj pa teče v robnih tokovih, ki so topološko zaščiteni pred povratnim sipanjem in kažejo kvantizirano prevodnost. Za razliko od klasičnega Hallovega pojava osnovne vzbuditve ulomljenih kvantnih Hallovih stanj niso le elektroni, ki se podrejajo fermionski statistiki, temveč tudi kvazidelci, za katere se predvideva, da imajo zelo eksotične lastnosti, vključno z delnim nabojem in anyonsko statistiko. Eksperimentalne meritve ulomljene statistike so se izkazale za precej zahtevne. Tako so šele leta 2020 ([1]) prvič zares uspeli eksperimentalno potrditi obstoj anyonov, in sicer v kvantnem Hallovem stanju $\nu = \frac{1}{3}$. Da lahko natančneje preučimo izvedbo eksperimenta, najprej pojasnimo kvantni Hallov pojav in obnovimo koncepte, kot so Landauovi nivoji, Berryjeva faza in kvazidelci [3].

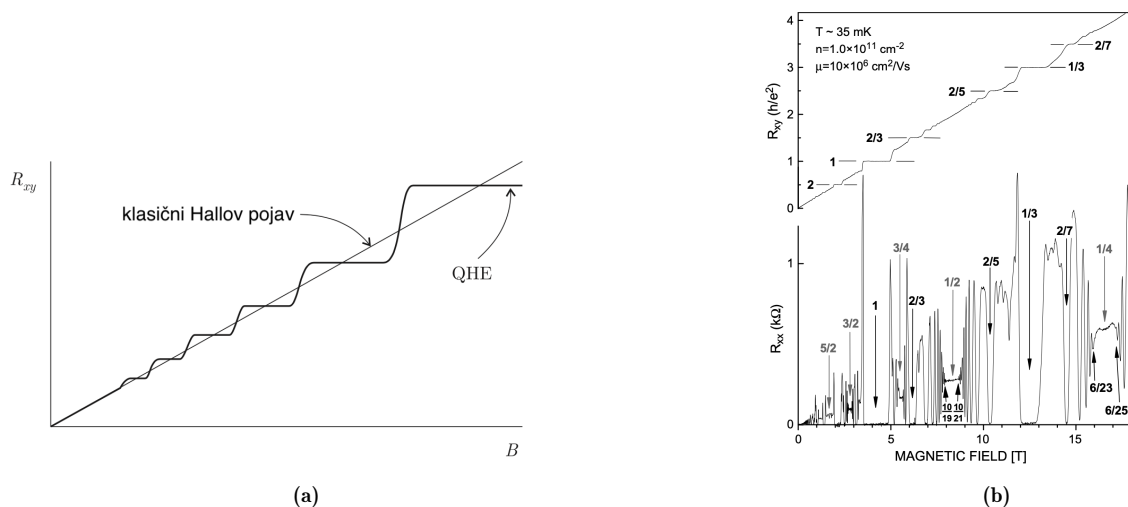
Hallov pojav je pojav električne napetosti prečno na smer električnega toka v prisotnosti magnetnega polja. Na elektrone, ki se gibljejo v ravnini xy s hitrostjo $\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{e}}_x$ v zunanjem polju $\mathbf{B} = B \hat{\mathbf{e}}_z$, deluje Lorentzova sila in gibanje opisuje enačba $m\dot{\mathbf{v}} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Za stacionarno stanje (konstantna hitrost) dobimo pogoj $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ oziroma $E_y = -v_x B$. V homogenem elektronskem plinu s številsko gostoto n je gostota toka enaka $\mathbf{j} = -env$ in velja torej zveza

$$j_x = \frac{ne}{B} E_y,$$

kjer je e osnovni naboj. Razmerje med E_y in j_x ,

$$R_{xy} \equiv \frac{E_y}{j_x} = \frac{B}{ne},$$

imenujemo Hallov upor. V dvodimenzionalnih sistemih elektronov opazimo t.i. kvantni Hallov pojav (QHE). Gre za pojav kvantiziranega Hallovega upora. Če je, klasično, pri konstantni gostoti nosilcev naboja (n) Hallov upor R_{xy} linearna funkcija B , eksperimentalno ugotovimo, da se pri nizkih temperaturah in močnih magnetnih poljih pojavijo odstopanja, ki jih prikazuje slika 4(a).



Slika 4. (a) Pri konstantni gostoti elektronskega plina klasična teorija napoveduje linearno odvisnost Hallovega upora R_{xy} od velikosti magnetnega polja. Pri nizkih temperaturah in močnih magnetnih poljih izmerimo “stopničasto” odvisnost oz. dobimo platoje s konstantno vrednostjo R_{xy} in ničelnim vzdolžnim uporom R_{xx} . Prirejeno po [3]. (b) Eksperimentalno izmerjeni odvisnosti $R_{xy}(B)$ in $R_{xx}(B)$ [6].

Upor narašča v skokih in tako izkazuje platoje pri določenih vrednostih

$$R_{xy} = \frac{1}{\nu} \frac{2\pi\hbar}{e^2}, \quad (3)$$

kjer je \hbar reducirana Planckova konstanta. V primeru celoštevilskega QHE je ν celo število, pri ulomljenem QHE pa ulomek oz. racionalno število. Presenetljivo je, da se izmerki izjemno natančno ujema z enačbo (3) ter da so vrednosti Hallovega upora na platojih univerzalne, tj. neodvisne od natančne geometrije in vrste vzorca, stopnje nečistoč, natančne vrednosti magnetnega polja, itd. Določata jih le osnovni naboj in Planckova konstanta. Nadalje se izkaže, da longitudinalni upor R_{xx} v območju platojev pade na nič, kot vidimo na sliki 4(b) [3, 6, 7].

3.1 Landauovi nivoji in kiralna robna stanja

Da bi razumeli QHE, najprej obnovimo (kvantno) mehaniko elektronov, omejenih na xy ravnino ob prisotnosti magnetnega polja $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{e}}_z$. Izberemo simetrično umeritev,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(-y, x) = \frac{r}{2}\hat{\mathbf{e}}_\phi.$$

Hamiltonov operator, $H = \frac{1}{2m_e}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2$, kjer je m_e efektivna masa elektrona, je tedaj cilindrično simetričen. Ob uvedbi ciklotronske frekvence $\omega_c = |e|B/m_e$, se pravi frekvence kroženja elektronov v homogenem magnetnem polju, in magnetne dolžine $l_B = \sqrt{\hbar/m_e\omega_c}$ ter ustreznih kreacijskih in anihilacijskih operatorjev izračunamo lastne funkcije

$$\Psi_{nm}(z) = C_{nm} z^m L_n^m \left(\frac{|z|^2}{l_b^2} \right) \exp \left(-\frac{|z|^2}{2l_b^2} \right),$$

kjer je $n \in \mathbb{N}$, m kvantno število vrtilne količine, $z = x + iy$ in so L_n^m posplošeni Laguerrovi polinomi. Ker je H rotacijsko invarianten, so Ψ_{nm} hkrati tudi lastne funkcije operatorja vrtilne količine, $J = i\hbar(x\partial_y - y\partial_x)$. Torej velja

$$\begin{aligned} H\Psi_{nm} &= \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right)\Psi_{nm}, \\ J\Psi_{nm} &= \hbar m\Psi_{nm}. \end{aligned} \quad (4)$$

Lastne energije $E_n = \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right)$, t.i. *Landauovi nivoji*, so neodvisne od kvantnega števila m in imajo visoko stopnjo degeneracije. Verjetnostna gostota $|\Psi_{nm}|^2$ ima obliko $n + 1$ koncentričnih krožnic okoli izhodišča. Kot vidimo v enačbi (4), je energija sorazmerna z ω_c in torej z B , zato se z večanjem jakosti magnetnega polja lastne energije povečujejo, posledično pa se elektroni postopoma selijo v nižje Landauove nivoje. Nazadnje, pri zelo visokih magnetnih poljih, vsi elektroni ostanejo v najnižjem nivoju. Tedaj tako zadošča obravnavati le osnovni Landauov nivo, za katerega so enodelčne valovne funkcije (vse z energijo $\frac{1}{2}\hbar\omega_c$) oblike

$$\Psi_{0m}(z) = C_{0m}z^m \exp\left(-\frac{|z|^2}{4l_B^2}\right). \quad (5)$$

Verjetnostna gostota $|\Psi_{0m}|^2$ doseže maksimum na krožnici s polmerom $r = \sqrt{2m}l_B$ [8, 7]. Največja možna vrednost m na disku z radijem R (in površino $S = \pi R^2$) je tako enaka

$$m_{\max} \equiv \mathcal{N} = \frac{R^2}{2l_B^2} = \frac{S}{2\pi l_B^2} = \frac{BS}{\Phi_0}, \quad (6)$$

kjer je $\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar}{e}$ t.i. kvant pretoka, ki si ga lahko predstavljamo kot magnetni pretok skozi površino $2\pi l_B^2$. Imamo torej \mathcal{N} -kratno degeneracijo vsakega nivoja.

Pomemben koncept je še t.i. polnilno razmerje ν , ki ustreza številu napolnjenih Landauovih nivojev,

$$\nu = \frac{N}{\mathcal{N}}, \quad (7)$$

kjer je N število vseh elektronov in \mathcal{N} degeneracija energijskih (Landauovih) nivojev. Pripomnimo, da pravkar uvedena količina ravno ustreza vrednostim ν , ki nastopajo v uporih na platojih v celoštevilskem QHE, $R_{xy} = \frac{1}{\nu} \frac{2\pi\hbar}{e^2}$. Kot približna utemeljitev služi klasično izračunan Hallov uporn, $R_{xy} = \frac{B}{ne}$. Če namreč želimo dobiti upor na ν -tem platoju, mora biti številska gostota elektronov enaka

$$n \equiv \frac{N}{S} = \frac{B}{\Phi_0} \nu,$$

kar je po enačbah (6) in (7) ravno gostota elektronov, pri kateri je zapolnjenih prvih $\nu \in \mathbb{Z}$ Landauovih nivojev [3, 7].

Omenimo še ključno posebnost prevodnosti v kvantnih Hallovih sistemih – kiralna robna stanja, ki jih spet le približno razložimo v semiklasični sliki. Mislimo si delce v zunanem magnetnem polju, ki se v ravnini gibljejo po ciklotronskih orbitah. Le-ti se na robu vzorca odbijejo in tako opišejo le polovico ciklotronske krožnice, preden začnejo z novo. Dobimo neto gibanje nosilcev naboja na robu, kot prikazuje slika 5. Delcem, katerih gibanje je omejeno na premike vzdolž premice v določeni smeri, pravimo kiralni. Vidimo, da na nasprotnih straneh vzorca delci potujejo v nasprotni smeri – imajo nasprotno kiralnost. Očitno ob odsotnosti zunanjega električnega polja tako ni neto električnega toka [3].

3.2 Berryjeva faza in Aharonov-Bohmov pojav

Poglejmo si še teoretične osnove, s pomočjo katerih izračunamo statistično fazo, ki jo pridobi valovna funkcija pri zamenjavi delcev, prav tako pa tudi pri gibanju delcev v magnetnem polju. Spomnimo se, da pri adiabatsni spremembi parametrov \mathbf{Q} sistem ostaja ves čas v n -tem lastnem stanju operatorja $H(\mathbf{Q})$, vendar je pri lastnem vektorju $|\Psi_n(\mathbf{Q})\rangle$ dopustna sprememba od časa odvisne faze $e^{i\Phi_n(t)}$. Lahko izračunamo ([8])

$$\Phi_n(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt' + \int_{\mathbf{Q}(0)}^{\mathbf{Q}(t)} i \langle \Psi_n | \nabla_{\mathbf{Q}} \Psi_n \rangle \cdot d\mathbf{Q},$$

kjer prvi člen predstavlja dinamično fazo, drugi člen pa geometrijsko ali t.i. Berryjevo fazo. Matrični element $\mathcal{A}_n(\mathbf{Q}) = i \langle \Psi_n | \nabla_{\mathbf{Q}} \Psi_n \rangle$ se imenuje Berryjeva povezava ali Berryjev potencial. Če spremenimo parametre \mathbf{Q} tako, da imajo na koncu spet začetne vrednosti, po prostoru parametrov izrišemo zaključeno pot. To pomeni, da se Hamiltonov operator vrne v začetno obliko, $H(\mathbf{Q}(t)) = H(\mathbf{Q}(0))$, stanje pa je, razen s trivialno dinamično, pomnoženo še z Berryjevo fazo

$$\gamma_{Berry}(t) = \oint \mathcal{A}_n(\mathbf{Q}) \cdot d\mathbf{Q}.$$

Aharonov-Bohmov pojav lahko obravnavamo kot poseben primer, pri katerem je $\mathcal{A}_n(\mathbf{x}) = \frac{e}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{x})$, kjer je \mathbf{A} vektorski magnetni potencial [8, 3]. Ko delec z nabojem e obkroži območje z magnetnim pretokom Φ_B , njegova valovna funkcija torej pridobi fazo

$$e^{i\gamma} = \exp\left(\frac{ie}{\hbar} \oint \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}\right) = e^{\frac{ie\Phi_B}{\hbar}}. \quad (8)$$

3.3 FQHE in kvazidelci

Pri zelo čistih vzorcih dobimo platoje Hallovega upora, $R_{xy} = \frac{1}{\nu} \frac{2\pi\hbar}{e^2}$, tudi pri racionalnih vrednostih ν . Pojav je bil opažen leta 1982, zanj pa je bila podeljena Nobelova nagrada (leta 1998, Laughlin, Stöermer, Tsui). Opis ulomljenega kvantnega Hallovega pojava je precej zahtevnejši, saj je potrebno upoštevati še medsebojne elektronske interakcije.

Sklepamo lahko, da bo valovna funkcija N delcev v osnovnem Landauovem nivoju oblike

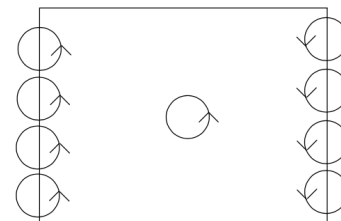
$$\Psi(z_1, \dots, z_N) = f(z_1, \dots, z_N) \prod_{i=j}^N \exp\left(-\frac{z_j^2}{4l_B^2}\right), \quad (9)$$

kjer je f analitična funkcija. Nadalje, f mora biti antisimetrična glede na zamenjavo dveh delcev $z_i \leftrightarrow z_j$, saj obravnavamo elektrone (fermione). Za osnovno stanje s polnilnim razmerjem $\nu = \frac{1}{m}$, kjer je m liho naravno število, je Laughlin predlagal (nenormalizirano) rešitev

$$\Psi(z_1, \dots, z_N) = \prod_{i<j} (z_i - z_j)^m \prod_{j=1}^N \exp\left(-\frac{z_j^2}{4l_B^2}\right), \quad (10)$$

kjer je $z_j = x_j + iy_j$. Za lihe m je ta res antisimetrična. Opazimo, da gre predfaktor proti nič z redom m , kadarkoli se dva elektrona približata. Numerični izračuni pokažejo več kot 99% ujemanje valovne funkcije 10 z osnovnim stanjem, ki upošteva še Coulombske interakcije in ostale odbojne potenciale.

Preverimo lahko, da Laughlinovo stanje z $m = 1$, torej $\nu = 1$, opisuje zapolnjen osnovni Landauov nivo [6, 3]. Če namreč ne upoštevamo interakcij med elektroni, antisimetrično večdelčno valovno



Slika 5. Kiralna robna stanja – semiklasična razlaga [3].

funkcijo dobimo s Slaterjevo determinanto

$$\Psi(z_1, \dots, z_N) = \begin{vmatrix} \Psi_1(z_1) & \Psi_1(z_2) & \dots & \Psi_1(z_N) \\ \Psi_2(z_1) & \Psi_2(z_2) & \dots & \Psi_2(z_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_N(z_1) & \Psi_N(z_2) & \dots & \Psi_N(z_N) \end{vmatrix}.$$

Nato vstavimo obliko valovnih funkcij (5) v osnovnem Landauovem nivoju in tako ugotovimo, da je funkcija $f(\mathbf{z})$ v splošni obliki iz enačbe (9) do normalizacijske konstante natančno dana s t.i. Vandermondovo determinanto

$$f(z_1, \dots, z_N) = \begin{vmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \dots & z_N^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & \dots & z_N^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \dots & z_N^{N-1} \end{vmatrix} = \prod_{i < j} (z_i - z_j).$$

Do sedaj smo obravnavali osnovna stanja kvantnega Hallovega sistema v stanju $\nu = \frac{1}{m}$. Poglejmo še vzbuditve oz. t.i. kvazidelce, koncept, ki ga je v 1930-ih letih vpeljal ruski fizik Lev Landau. Gre za pojav, ko se mikroskopsko zapleten sistem delcev in interakcij med njimi vede, kot bi vseboval med seboj šibko interagirajoče delce v vakuumu – te imenujemo kvazidelci. Vzbuditve nekega stanja sistema lahko torej obravnavamo kot delce z določeno maso, nabojem, gibalno količino itd. Na primer, vzbuditve mrežnih nihanj v kristalu imenujemo fononi.

S pomočjo rešitve (10) konstruiramo valovno funkcijo, ki opisuje M kvazivrzeli v kvantnem Hallovem sistemu na položajih $\eta_j = x_j + iy_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \dots, M$,

$$\Psi_M(\mathbf{z}; \eta_j) = \prod_{j=1}^M \prod_{i=1}^N (z_i - \eta_j) \prod_{k < l} (z_k - z_l)^m \prod_{k=1}^N \exp\left(-\frac{z_k^2}{4l_B^2}\right).$$

Vidimo, da je elektronska gostota na položajih η_j res enaka nič. Izpeljemo lahko tudi presenetljivo lastnost: kvazivrzeli imajo naboj $e^* = \frac{e}{m}$, kjer je $-e$ naboj elektrona. Intuitivno lahko to pojasnimo na sledeč način: če postavimo m vrzeli na isti položaj η , dobimo

$$\Psi_m(\mathbf{z}; \eta) = \prod_{i=1}^N (z_i - \eta)^m \prod_{k < l} (z_k - z_l)^m \prod_{k=1}^N \exp\left(-\frac{z_k^2}{4l_B^2}\right),$$

ki predstavlja Laughlinovo valovno funkcijo z odsotnostjo elektronske gostote na položaju η . To pomeni, da se m vrzeli vede kot primanjkljaj enega elektrona, od koder sledi omenjeni delni naboj [7, 3].

Tako naboj kot tudi kvantno statistiko kvazivrzeli v Laughlinovem stanju $\nu = \frac{1}{m}$ lahko izračunamo s pomočjo Berryjeve faze, ki se pojavi ob gibanju vrzeli. Izpeljava je v [3], str. 92, tukaj navedemo le rezultat. Če predpostavimo, da se ena izmed kvazivrzeli giblje po zaključeni zanki C , pri čemer ne obide preostalih kvazidelcev, pri tem pridobi fazo

$$\gamma_{Berry} = \frac{e\Phi_B}{m\hbar} = \frac{e^*\Phi_B}{\hbar},$$

kjer je Φ_B magnetni pretok skozi zanko C . Gre torej za Aharonov-Bohmov pojav, pri čemer je naboj vpletenih delcev po enačbi (8) enak $e^* = e/m$. Nadalje, če kvazivrzeli, npr. η_1 , ob gibanju po zanki C obide eno izmed vrzeli, npr. η_2 , dobimo še drugi prispevek,

$$e^{i\gamma} = \exp\left(-\frac{1}{2m} \oint_C \frac{d\eta_1}{\eta_1 - \eta_2}\right) = e^{2\pi i/m},$$

od koder razberemo α v enačbi (1),

$$\alpha = \frac{1}{m}.$$

Tako ugotovimo, da so kvazivrzeli pri ulomljenem kvantnem Hallovem pojavu anyoni. Nasprotno so pri celoštevilskem QHE oz. pri napolnjenem osnovnem Landauovem nivoju ($m = 1$) kvazivrzeli fermioni, gre torej za dejanske vrzeli. Pripomnimo, da pravzaprav tudi vrzeli predstavljajo kvazidelce, s pomočjo katerih, na primer v polprevodnikih, kolektivno gibanje elektronov v kristalni strukturi opišemo kot gibanje pozitivnih delcev na mestih z ničelno elektronsko gostoto [3].

3.4 Detekcija anyonov z interferometrom

Prva neposredna eksperimentalna potrditev obstoja anyonov, in sicer v kvantnem Hallovem stanju $\nu = \frac{1}{3}$, je uspela šele leta 2020. Raziskovalci (Nakamura et al. [1]) so zasnovali strukturo iz tankih plasti galijevega arzenida, ki omejuje gibanje elektronov na dve dimenziji, jo ohladili do 20 mK in izpostavili ustrezno močnemu magnetnemu polju. Tako so dobili želeno stanje snovi - t.i. ulomljeni kvantni Hallov izolator v stanju $\nu = \frac{1}{3}$. Osnovne vzbuditve tega so kvazidelci s tretjino osnovnega naboja, za katere se je že dlje časa predvidevalo, da naj bi bili anyoni, natančneje, da naj bi ob prepletanju dveh delcev njuna valovna funkcija pridobila statistično fazo $\frac{2\pi}{3}$. Kot smo videli, lahko tok delcev s tretjinskim nabojem teče le po robu vzorca, na vsaki strani v svojo smer [9].

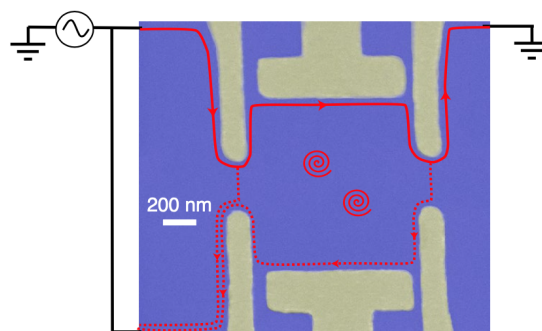
Eksperimentalna postavitve, prikazana na sliki 6, predstavlja neke vrste interferometer. Na skrajni levi imamo izvor nabojev, vijolična barva pa predstavlja kvantno Hallovo tekočino. Tok teče v nasprotni smeri urinega kazalca (rdeče črte na sliki 6), pri čemer zožitvi omogočata tuneliranje na drugo stran vzorca. S tem mislimo, da del valovne funkcije prečka zožitev in se vrne nazaj proti izvoru.

Z dvema zožitvama imajo robna stanja dve možnosti za tuneliranje, kar pomeni, da lahko ob vrnitvi valovni funkciji konstruktivno ali destruktivno interferirata. Razliko njunih faz opiše Aharonov-Bohmov pojav, $\theta = \frac{e^*}{\hbar}BS = \frac{e^*}{\hbar}\Phi_B$. Ob spreminjanju jakosti magnetnega polja v vzorcu se zato spreminja fazna razlika valovnih funkcij, prav tako pa se periodično spreminja električni tok (in zato tudi upor), $I_B = \cos^2 \frac{e^*}{2\hbar}\Phi_B$. Očitno dobimo periodično spreminjanje tudi v odvisnosti od površine S , ki jo obkroži tok. Izkaže se, da lahko to opazujemo s spreminjanjem napetosti stranskih vrat (angl. *side gate voltage*), saj ta vpliva na Fermijevo energijo, ki je povezana s položajem robnih stanj in posledično tudi efektivno površino vzorca.

Nazadnje še ključni element – na sredini vzorca imamo N kvazidelcev, predstavljenih z rdečo spiralo na sliki 6. Ko robna stanja le-te obkrožijo, sedaj pridobijo fazo

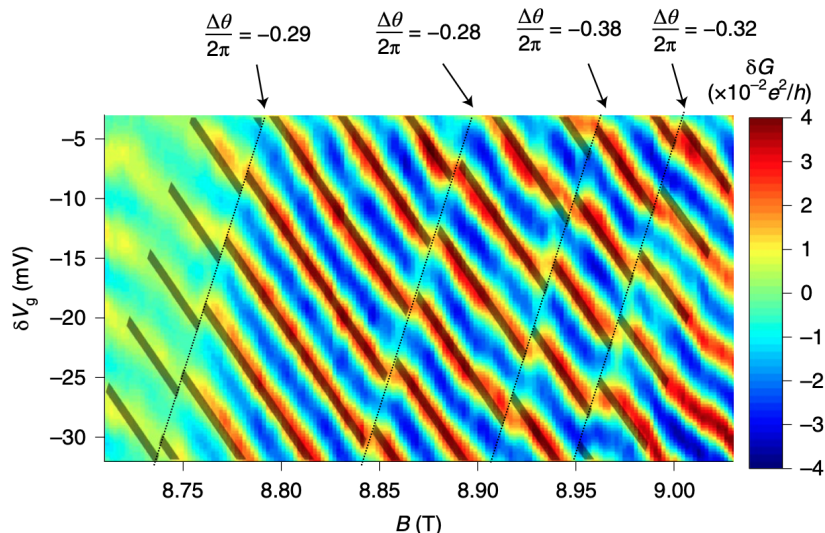
$$\theta = \frac{e^*}{\hbar}\Phi_B + 2\pi N\alpha, \quad (11)$$

kjer je $2\pi\alpha$ statistična faza [1, 9].



Slika 6. Prikaz eksperimentalne postavitve: vijolično področje ustreza GaAs z dvo-dim elektronskim plinom, ki je ujet med kovinska vrata (svetla barva). V ulomljenem kvantnem Hallovem stanju $\nu = \frac{1}{3}$ tok prenašajo kvazidelci, ki potujejo v kiralnih robnih stanjih (rdeče črte). Kvazidelci (rdeče spirale) se lahko nahajajo še v notranjosti vzorca. Le-te obkrožijo delci, ki se sipajo nazaj, kar omogoča meritev statistične faze [1].

ANYONI



Slika 7. Rezultati meritev upora v odvisnosti od gostote magnetnega polja in napetosti stranskih vrat [1].

Merimo torej upor (prepuščen tok) kot funkcijo gostote magnetnega polja in napetosti stranskih vrat. Rezultate, ki jih prikazuje slika 7, razložimo s pomočjo enačbe (11). Lokalno opazimo pričakovano odvisnost upora (v barvah), bistveno pa je, da ob periodičnem spreminjanju dobimo še skoke oz. diskretne fazne premike. Smiselna razlaga se zdi, da v sredini vzorca nastajajo nove kvazivrzeli, s čimer se spreminja N v enačbi (11). Ob spreminjanju parametrov namreč kvantna tekočina v stanju $\nu = \frac{1}{3}$ skuša minimizirati energijo, kar lahko ob večanju magnetnega polja doseže npr. z zmanjšanjem števila kvazidelcev, kar ustreza povečanju števila kvazivrzeli. Od tod lahko torej razberemo anyonsko statistično fazo α . Izmerjene fazne razlike so podane na vrhu slike 7 in so vse zelo blizu $\alpha \equiv \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{1}{3}$, kot je pričakovano za kvantno Hallovo stanje $\nu = \frac{1}{3}$. Imamo tudi delna odstopanja, ki so lahko posledica nereda v materialu ali naključno nastalih kvazidelcev zaradi termičnih fluktuacij. Vsekakor se rezultati zdijo dovolj prepričljivi in tako sledi sklep, da je šlo za neposredno meritev definirajoče lastnosti anyonov – faze, ki jo delca pridobita pri zamenjavi oz. analogno, ko eden potuje okoli drugega [1, 10].

4. Zaključek

Vse od odkritja so anyoni v središču pozornosti tako teoretičnih kot eksperimentalnih fizikov na področju teorije kondenzirane snovi. Še vedno nerešeno vprašanje je na primer mikroskopska razlaga kvantnega Hallovega stanja z $\nu = \frac{5}{2}$. Zanimanje za te eksotične delce je v zadnjem času še posebej naraslo. Pari anyonskih kvazidelcev lahko namreč shranjujejo informacije o prepletanju, statistična faza, ki jo pridobi valovna funkcija ob zamenjavi, pa je topološke narave, od koder sledi večja stabilnost in odpornost na razne perturbacije. Anyoni tako ponujajo eno izmed obetavnejših podlag za topološko kvantno računalništvo [11, 10].

LITERATURA

- [1] J. Nakamura, S. Liang, G. C. Gardner, and M. J. Manfra. Direct observation of anyonic braiding statistics. *Nature Physics*, 16(9):931–936, 2020.
- [2] Frank Wilczek. New kinds of quantum statistics. *The Spin*, page 61–69, 2009.
- [3] David Tong. Lectures on the quantum hall effect, Sep 2016.
- [4] Avinash Khare. *Fractional statistics and quantum theory*. World Scientific, 2005.
- [5] J. M. Leinaas and J. Myrheim. On the theory of identical particles. *Il Nuovo Cimento B Series 11*, 37(1):1–23, 1977.
- [6] Ady Stern. Anyons and the quantum hall effect—a pedagogical review. *Annals of Physics*, 323(1):204–249, 2008.
- [7] Steven M. Girvin. Introduction to the fractional quantum hall effect. *The Quantum Hall Effect*, page 133–162, 2005.
- [8] Anton Ramšak. *Kvantna Mehanika*. Založba Univerze v Ljubljani, 2021.
- [9] Rui-Rui Du. Braided anyons. *Nature Physics*, 16(9):899–900, 2020.
- [10] Davide Castelvecchi. Welcome anyons! physicists find best evidence yet for long-sought 2d structures. *Nature*, 583(7815):176–177, 2020.
- [11] Wilczek. Inside the knotty world of “anyon” particles. *Quanta Magazine*, March 2019.