HOMOTOPSKE GRUPE V FIZIKI

EMA OSOLNIK

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Veliko fizikalnih problemov se lahko formulira v kontekstu homotopskih grup. Še posebej uporabne so fundamentalne grupe, ki so zaradi svojih lepih matematičnih lastnosti uporabne pri razumevanju prostorov parametrov urejenosti ter tako orišejo fazne prehode, njihove aplikacije pa mnogokrat najdemo tudi v sistemih kondenziranih in trdnih snovi.

HOMOTOPY GROUPS IN PHYSICS

Many problems in physics can be formulated in the context of homotopy groups. Because of their clean mathematical properties, fundamental groups are especially helpful when it comes to understanding order parameter spaces and thus explaining phase transitions. We often find their applications in systems of condensed and solid matter.

1. Uvod

Povezava med fiziko in topologijo je stara, a še vedno aktualna. Leta 2016 so Nobelovo nagrado za fiziko prejeli David J. Thouless, F. Duncan M. Haldane in J. Michael Kosterlitz [1] za teoretična odkritja topoloških faznih prehodov in topoloških faz snovi. Preučevali so sisteme superprevodnikov in superfluidov s poudarkom na dvodimenzionalnih sistemih, kjer topološki defekti igrajo veliko vlogo pri faznih prehodih. V kvantnem svetu je odmevalo Haldanovo odkritje topološkega vpliva na spinske verige.

Osnovna pojma v topologiji sta okolica in zveznost. Točke, ki ležijo v neki okolici, so si blizu, zvezne preslikave pa to relacijo ohranjajo – bližnje točke se vselej preslikajo v bližnje točke. Posebej pomembne zvezne preslikave so homeomorfizmi in osnovni problem topologije je klasifikacija topoloških prostorov do homeomorfizma natančno [2]. Dva geometrijska objekta (ali prostora) sta v topologiji homeomorfna, če med njima obstaja zvezna bijekcija, ki ima zvezen inverz [3]. Krog in kvadrat sta na primer homeomorfna. Votla krogla, ki vsebuje manjšo polno kroglo je homeomorfna votli kocki s polno kocko znotraj nje. Funkciji, ki preslika točke prvega objekta v odgovarjajoče točke drugega in obratno, rečemo homeomorfizem.

Obravnavanje snovi in pojavov s pomočjo geometrije ni zgolj praktično, temveč mnogokrat tudi bolj intuitivno. Topologija je po eni strani posplošitev geometrije – medtem ko slednja ne loči med skladnimi liki, v okviru topologije ne delamo razlike med prostoroma, ki sta homeomorfna. Ker sta vsaka dva skladna lika tudi topološko ekvivalentna, obratno pa ne velja, je topološki pogled malo manj selektiven od geometrijskega. Prav tako lahko topologijo štejemo za posplošitev klasične analize, ker namesto evklidskih prostorov obravnava splošnejše topološke prostore, ki so lahko tudi brez kakršnekoli metrike.

Na prvi pogled bi morda rekli, da se v času študija s topologijo formalno še nismo srečali, a že znanje o metričnih prostorih je dober uvod v teme, ki sledijo. Na tem mestu ga torej osvežimo, saj je prehod iz metrike in metričnega prostora na topološkega gladek.

2. Osnove topologije

Oglejmo si nekaj osnovnih definicij pojmov, s katerimi se bomo srečavali v tem članku, in ki so povzeti po viru [2].

Definicija 1. Metrika na dani množici M je taka preslikava $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$, da velja:

1. za poljubni točki x in y v M velja $d(x, y) \geq 0$ in $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$ za poljubni točki $x, y \in M$,
3. za poljubne točke $x, y, z \in M$ velja trikotniška neenakost

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Množico M skupaj z metriko d imenujemo metrični prostor (M, d). Če je r neko pozitivno število, množico

$$K(x, r) = \{y \in M; d(x, y) < r\}$$

imenujemo odprta krogla s središčem x in radijem r. Če množica $U \subset M$ vsebuje kakšno odprto kroglo s središčem v x, se U imenuje okolica točke x. Množici U pravimo odprta, če je okolica vsake svoje točke. Vsaka odprta krogla je tudi odprta množica. Oglejmo si nekatere temeljne lastnosti odprtih množic v metričnem prostoru.

1. Poljubna unija odprtih množic je spet odprta množica.
2. Končni presek odprtih množic je tudi odprta množica.
3. Prazna množica in ves prostor M sta odprti množici.

Topološki prostor je prazaprav posplošitev metričnega prostora. V topološkem prostoru nimamo pojma razdalje (metrike) in tako tudi ne pojma (metričnih) krogel. Topološko strukturo damo množici M tako, da povemo, katere množice v njej so odprte. Za družino vseh odprtih množic pa zahtevamo, da zadošča zgornjim trem aksiomom. V pojmu grupe se povežeta množica in neka operacija [4].

Definicija 2. Naj bo G množica, ki je neprazna ($G \neq \emptyset$) in $\circ$ binarna notranja operacija na množici G. Potem je $(G, \circ)$ grupa, če velja:

1. Za $\forall a, b, c \in G$ velja: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$. (Asociativnost operacije $\circ$.)
2. $\exists e \in G$, tako da za $\forall a \in G$ velja: $a \circ e = e \circ a = a$. ($e$ je nevtralni element za operacijo $\circ$.)
3. Za $\forall a \in G$ $\exists a^{-1} \in G$, tako da velja: $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$. (Obstoj nasprotnega elementa a^{-1}.)

3. Homotopske grupe

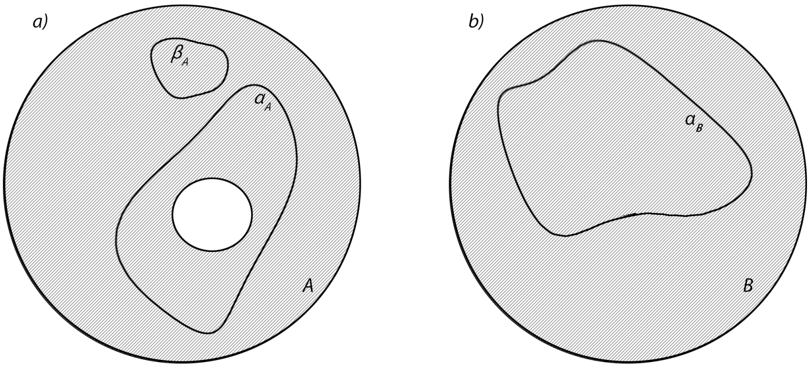
Pri obravnavi homotopskih grup se zanimamo za zvezne deformacije preslikav. Lažje si je predstavljati, da gre za deformacijo slik preslikav, saj opazujemo, če se ena lahko zvezno preslika v drugo [5].

Definicija 3. Naj bosta X in Y topološka prostora in naj bo $\mathcal{F}$ množica zveznih preslikav iz X v Y. Predstavimo ekvivalenčno relacijo v $\mathcal{F}$: pravimo, da sta preslikavi f, $g \in \mathcal{F}$ homotopni, če se slika $f(X)$ zvezno deformira v $g(X)$ v Y.

Za X izberemo standardni topološki prostor, katerega strukture so dobro poznane, na primer sfero v n dimenzijah. To je osnovna ideja homotopskih grup. Obravnava in definicije v nadaljevanju tega poglavja so povzete po viru [6].

3.1 Fundamentalne grupe

3.1.1 Osnovne ideje



Slika 1. Primera prostorov z ali brez luknje.

Oglejmo si sliko 1. Glavna razlika med prikazanima diskoma je, da ima eden luknjo, drugi pa ne. Kaj karakterizira to razliko? Opazimo, da je lahko vsaka zanka v B zvezno skrčena v točko, za zanke v A, ki zaobjemajo luknjo, pa to ne velja. Pravimo, da je neka zanka α homotopska na β, če lahko α dobimo iz β z zvezno deformacijo. Na primer, vsaka zanka v B je homotopska s točko. Homotopija je ekvivalenčna relacija in njen ekivalenčni razred se imenuje homotopski razred. Na B se navezuje le en homotopski razred, v A pa je vsak karakteriziran z $n \in \mathbb{Z}$, kjer n pove, kolikokrat zanka obkroži luknjo. Če je večji od 0, jo obkroži v nasproti smeri urinega kazalca, če je manjši, pa v pravi smeri (pozitivna, negativna orientacija). $\mathbb{Z}$ je aditivna grupa in operacija seštevanja ima geometrijski pomen: $n + m$ usreza obkrožanju luknje najprej n-krat, potem pa še m-krat. Množica homotopskih razredov s takšno operacijo ima strukturo grupe, ki jo imenujemo fundamentalna grupa.

3.1.2 Poti in zanke

Spomnimo se definicije zanke, saj so slednje ključne za razumevanje homotopije.

Definicija 4. Naj bo X topološki prostor in $I = [0, 1]$. Zvezna preslikava $\alpha : I \to X$ je pot z začetno točko x_0 in končno točko x_1, če $\alpha(0) = x_0$ in $\alpha(1) = x_1$. Če $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$, je pot zanka z bazno točko x_0 (ali zanka na x_0).

Za x in X je konstantna pot $c_x : I \to X$ definirana s $c_x(s) = x, s \in I$. Konstantna pot je prav tako konstantna zanka, saj $c_x(0) = c_x(1) = x$. Množica poti ali zank se lahko izraža z algebraično strukturo kot:

Definicija 5. Naj bosta $\alpha, \beta : I \to X$ taki poti, da $\alpha(1) = \beta(0)$. Produkt α in β, označen z $\alpha * \beta$, je pot v X definirana kot:

$$\alpha * \beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2s - 1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Ker $\alpha(1) = \beta(0)$, je $\alpha * \beta$ zvezna preslikava iz I v X. To geometrijsko pomeni, da $\alpha * \beta$ ustreza potovanju po sliki $\alpha(I)$ v prvi polovici, potem pa $\beta(I)$ v preostali polovici. Pri tem je hitrost podvojena.

Definicija 6. Naj bo $\alpha : I \to X$ pot od x_0 do x_1. Inverzna pot α^{-1} poti α je definirana kot

$$\alpha^{-1}(s) \equiv \alpha(1 - s) \quad s \in I.$$

α^{-1} ustreza 'potovanju' po poti α v nasprotni smeri, torej od x_1 do x_0. Ker je zanka posebna pot, kjer sta prva in zadnja točka enaki, je produkt zank in inverz zanke definiran na popolnoma enak način.

Na prvi pogled se zdi, da $\alpha * \alpha^{-1} = c_x$, vendar to ni res! Potrebujemo koncept homotopije, da definiramo grupno operacijo v prostoru krivulj in s tem tudi grupo samo.

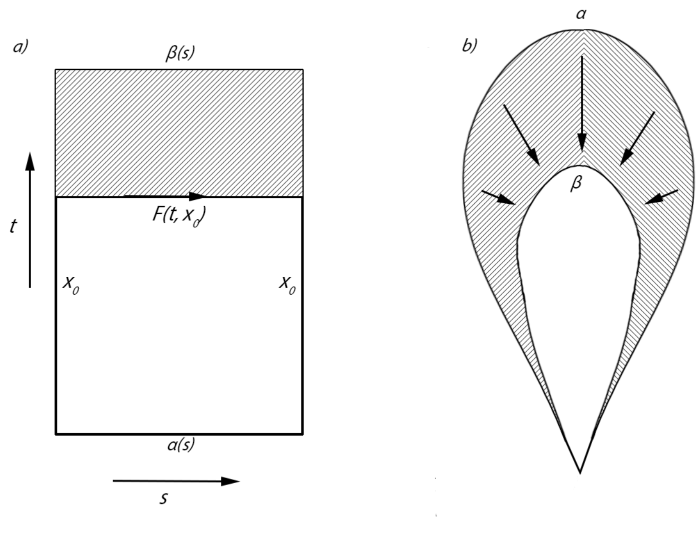
3.1.3 Homotopija

Klasificirati želimo poti glede na lepo ekvivalenčno relacijo, tako da ekvivalenčni razredi osvetlijo grupno strukturo. Izkaže se, da če identificiramo poti ali zanke, ki so lahko zvezno deformirane iz ene v drugo, ekvivalenčni razredi tvorijo grupo. Zanima nas formalna definicija homotopije za primer zank, ki sicer velja tudi za ostale zvezne preslikave med topološkima prostoroma.

Definicija 7. Naj bosta $\alpha, \beta : I \to X$ zanki na x_0. Pravimo, da sta homotopni (oznaka: $\alpha \sim \beta$), če obstaja zvezna preslikava $F : I \times I \to X$, za katero velja, da:

$$F(s,0) = \alpha(s), \quad F(s,1) = \beta(s) \quad \forall s \in I$$
$$F(0,t) = F(1,t) = x_0 \quad \forall t \in I.$$

Povezujoča preslikava F se imenuje homotopija med α in β. Primer takšne preslikave je prikazan na sliki 2.



Slika 2. K definiciji homotopije. a) Navpični stranici pravokotnika se preslikata v x_0. b) V prostoru X je slika objektov zvezno deformirana. Slika α se zvezno transformira v sliko β.

3.1.4 Fundamentalne grupe

Ekvivalenčni razred zank je označen z $[\alpha]$ in je homotopni razred za α. Produkt med zankama naravno definira produkt množice homotopnih razredov zank.

Definicija 8. Naj bo X topološki prostor. Množica homotopnih razredov zank na $x_0 \in X$ je označena s $\pi_1(X, x_0)$ in jo imenujemo fundamentalna grupa (ali prva homotopska grupa) X-a v x_0. Produkt homotopskih razredov $[\alpha]$ in $[\beta]$ je definiran kot:

$$[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta].$$

Če imamo pare zank, ki sta homotopni druga na drugo, tj. $\alpha \sim \alpha'$ in $\beta \sim \beta'$, potem velja, da je tudi njihov ustrezen produkt homotopen: $\alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$.

Fundamentalna grupa je grupa, zato se spomnimo lastnosti, ki veljajo zanje. Če so $\alpha, \beta, \ldots$ zanke in $x \in X$, je zadoščeno naslednjim zahtevam za grupe:

1. $([\alpha] * [\beta]) * [\gamma] = [\alpha] * ([\beta] * [\gamma])$,
2. $[\alpha] * [c_x] = [\alpha]$ in $[c_x] * [\alpha] = [\alpha]$ (nevtralni element),
3. $[\alpha] * \left[\alpha^{-1}\right] = [c_x]$, torej $[\alpha]^{-1} = \left[\alpha^{-1}\right]$ (inverz).

Na kratko, $\pi_1(X, x)$ je grupa, katere nevtralni element je homotopski razred konstantne zanke c_x. Produkt $[\alpha] * [\beta]$ je dobro definiran in zadosti aksiomu za grupo. Inverz $[\alpha]$ je $[\alpha]^{-1} = \left[\alpha^{-1}\right]$. V naslednjem odseku se bomo seznanili z z njihovimi osnovnimi lastnostmi.

3.2 Osnovne lastnosti fundamentalnih grup

3.2.1 Povezanost s potmi

Izrek 1. *Topološki prostor X je s potmi povezan, če za vsak $x_0, x_1 \in X$ obstaja taka pot α, da $\alpha(0) = x_0$ in $\alpha(1) = x_1$. Če imamo s potmi povezan topološki prostor X in točki $x_0, x_1 \in X$, sta $\pi_1(X, x_0)$ in $\pi_1(X, x_1)$ izomorfni – pri preslikavi se ohranja struktura.*

Če je X povezan s potmi, začetne točke ni treba definirati, saj $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$ za vsaka $x_0, x_1 \in X$. Zapišemo lahko le $\pi_1(X)$.

3.2.2 Homotopska invariantnost

Homotopska ekvivalenca poti in zank je lahko posplošena na poljubne preslikave. Naj bosta $f, g : X \to Y$ zvezni preslikavi. Če obstaja taka zvezna preslikava $F : X \times I \to Y$, da $F(x, 0) = f(x)$ in $F(x, 1) = g(x), f$ in g sta homotopska, označeno kot $f \sim g$. Preslikave F, f in g so tedaj homotopske.Želimo definirati relacijo med dvema topološkima prostoroma na podlagi homotopije.

Definicija 9. Naj bosta X in Y topološka prostora. X in Y sta istega homotopskega tipa, $X \simeq Y$, če obstaja taka zvezna preslikava $f : X \to Y$ in $g : Y \to X$, da $f \circ g \sim \mathrm{id}_Y$ in $g \circ f \sim \mathrm{id}_X$. Preslikava f je homotopska ekvivalenca in g njen homotopski inverz.

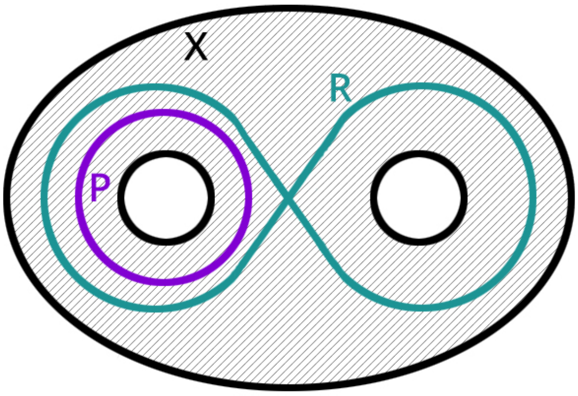
'Istega homotopskega tipa' je ekvivalenčna relacija v množici topoloških prostorov. Ena najpomembnejših lastnosti fundamentalnih grup je, da imata dva topološka prostora istega homotopskega tipa enako fundamentalno grupo.

Izrek 2. *Naj bosta X in Y topološka prostora istega homotopskega tipa. Če je $f : X \to Y$ homotopska ekvivalenca, sta $\pi_1(X, x_0)$ in $\pi_1(Y, f(x_0))$ izomorfna. Fundamentalna grupa je invariantna pod homeomorfizmi, torej je topološko invariantna.*

Fundamentalne grupe klasificirajo topološke prostore manj strogo kot homeomorfizmi. Če imata topološka prostora X in Y različni fundamentalni grupi, ne moreta biti homeomorfna. Dejstvo pa je, da imajo homotopske in s tem tudi fundamentalne grupe marsikatero aplikacijo v fiziki, kot bomo videli v nadaljevanju. Na tem mestu poudarimo, da glavna uporabnost homotopskih grup v fiziki ne leži v klasifikaciji prostorov, temveč preslikav ali konfiguracij polj.

Kaj pa je pravzaprav pomen 'istega homotopskega tipa'? V praksi sta topološka podprostora mnogokrat povezana tako, da je Y podprostor X. Potem trdimo, da $X \simeq Y$, če je Y pridobljen z zvezno deformacijo prostora X.

Definicija 10. Naj bo $R \neq \emptyset$ podprostor od X. Naj obstaja taka zvezna preslikava $H : X \to R$, da $f|_R = \mathrm{id}_X$. Pri tem se celoten X preslika v R, tako da so točke v R fiksne. Primer takega podprostora R je prikazan na sliki 3 skupaj s prostorom P, ki temu pogoju ne ustreza.



Slika 3. Podprostor R je skrčitev prostora X, medtem ko podprostor P obkroža le eno od dveh lukenj prostora X, zato ta ne bi mogel biti skrčen vanj z zvezno transformacijo.

Za podprostor R zdaj izberemo točko $a \in X$.

Definicija 11. Naj bo $c_a : X \to \{a\}$ zvezna preslikava. Če velja prejšnja definicija, definirajmo preslikavo $H : X \times I \to X$ tako, da $H(x, 0) = c_a(x) = a$ in $H(x, 1) = \mathrm{id}_X(x) = x$ za vsak $x \in X$ in tudi $H(a, t) = a$ za vsak $t \in I$. Homotopija H se imenuje skrčitev.

Oglejmo si preprost primer. $X = \mathbb{R}^n$ je skrčljivo na izhodišče 0. Pravzaprav če definiramo $H : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}$ z $H(x, t) = tx$, imamo (i) $H(x, 0) = 0$ in $H(x, 1) = x$ za vsak $x \in X$ in (ii) $H(0, 1) = 0$ za vsak $t \in I$. Zdaj je jasno, da je vsaka konveksna podmnožica $\mathbb{R}^n$ skrčljiva.

Izrek 3. *Fundamentalna grupa skrčljivega prostora X je trivialna, $\pi_1(X, x_0) \cong \{e\}$. Konkretno fundamentalna grupa $\mathbb{R}^n$, ki je $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) \cong \{e\}$. Če ima prostor, povezan s potmi, trivialno fundamentalno grupo, je preprosto povezan.*

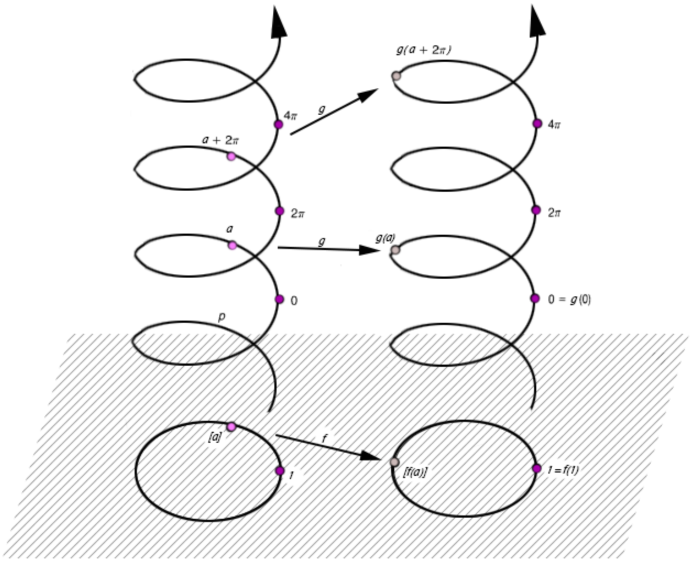
3.3 Primeri fundamentalnih grup

Rutinski proces za določevanje fundamentalnih grup v splošnem ne obstaja, vendar jih v določenih primerih dobimo precej preprosto. Opazujmo fundamentalne grupe kroga S^1 in sorodnih prostorov.

Izrazimo S^1 z $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, kot na sliki 4. Definiramo preslikavo $p : \mathbb{R} \to S^1$ kot $p : x \mapsto \exp(\mathrm{i}x)$. p preslika točko $0 \in \mathbb{R}$ v $1 \in S^1$, ki je začetna točka. Predstavljamo si, da se $\mathbb{R}$ s p ovije okoli S^1, kot je prikazano na sliki 4. Če $x, y \in \mathbb{R}$ zadoščata $x - y = 2\pi m (m \in \mathbb{Z})$, sta preslikana v isto točko v S^1. Tedaj pišemo $x \sim y$. To je ekvivalenčna relacija in ekvivalenčni razred $[x] = \{y \mid x - y = 2\pi m$ za nekatere $m \in \mathbb{Z}\}$ je določen s točko $\exp(\mathrm{i}x) \in S^1$. Sledi, da $S^1 \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Naj bo $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka zvezna preslikava, da $\tilde{f}(0) = 0$ in $\tilde{f}(x + 2\pi) \sim \tilde{f}(x)$. Očitno je, da $\tilde{f}(x + 2\pi) = \tilde{f}(x) + 2n\pi$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, kjer je n določeno celo število. Če $x \sim y(x - y = 2\pi m)$, imamo

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y) &= \tilde{f}(y + 2\pi m) - \tilde{f}(y) \\
&= \tilde{f}(y) + 2\pi mn - \tilde{f}(y) = 2\pi mn,
\end{aligned}$$

torej $\tilde{f}(x) \sim \tilde{f}(y)$. Temu primerno tudi $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ enolično definira zvezno preslikavo $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ z $f([x]) = p \circ \tilde{f}(x)$. Opazi, da f ohrani začetno točko $1 \in S^1$. Pravimo, da če imamo preslikavo $f : S^1 \to S^1$, ki pusti $1 \in S^1$ nepremično, lahko definiramo preslikavo $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tako, da $\tilde{f}(0) = 0$ in $\tilde{f}(x + 2\pi) = \tilde{f}(x) + 2\pi n$.



Slika 4. Preslikava $p : \mathbb{R} \to S^1$, definirana z $x \mapsto \exp(ix)$, preslika $x + 2m\pi$ v isto točko na S^1. Preslikava $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, taka da $\tilde{f}(0) = 0$ in $\tilde{f}(x + 2\pi) = \tilde{f}(x) + 2n\pi$ za točno določen n definira preslikavo $f : S^1 \to S^1$. Celo število n določa homotopski razred, ki mu f pripada.

Obstaja torej povezava med množico preslikav iz S^1 v S^1 z $f(1) = 1$ in množico preslikav iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$ in sicer taka, da velja $\tilde{f}(0) = 0$ in $\tilde{f}(x + 2\pi) = \tilde{f}(x) + 2\pi n$. Celemu številu n pravimo stopnja f in je označen z $\deg(f)$. Torej, medtem ko x obkroži S^1 enkrat, $f(x)$ obkroži S^1 n-krat.

Izrek 4. *Naj bosta f, g:* $S^1 \to S^1$ *taka, da velja* $f(1) = g(1) = 1$. *Tedaj* $\deg(f) = \deg(g)$, *če in samo če sta f in g homotopni. Za vsak* $n \in \mathbb{Z}$ *obstaja taka preslikava* $f : S^1 \to S^1$, *da velja* $\deg(f) = n$.

To nam pove, da z določitvijo celega števila $\deg(f)$ taki preslikavi $f : S^1 \to S^1$, za katero velja $f(1) = 1$, obstaja bijekcija med $\pi_1\left(S^1, 1\right)$ in $\mathbb{Z}$. Še več – to je izomorfizem. Če imamo preslikavi $f, g : S^1 \to S^1$, njun produkt $f * g$, definiran kot produkt zank, zadosti $\deg(f * g) = \deg(f) + \deg(g)$.

Ta princip je pravzaprav zelo preprost. Predstavljamo si, da valj obkrožimo z elastiko. Če ta valj obkroži n-krat, takšna konstrukcija ne more biti zvezno deformirana v neko drugo, kjer ta isti valj obkrožimo $m(\neq n)$-krat.

3.4 Višje homotopske grupe

Fundamentalna grupa klasificira homotopske razrede zank v topološkem prostoru X, temu prostoru pa na veliko različnih načinov lahko določimo tudi druge grupe. Na primer, klasificiramo lahko homotopske razrede sfer ali torusov v X. Izkaže se, da homotopski razredi sfere $S^n (n \geq 2)$ tvorijo grupo, ki je podobna fundamentalni grupi.

Naj $I^n (n \geq 1)$ označuje enoto n-kocke $I \times \cdots \times I$,

$$I^n = \{(s_1, \ldots, s_n) \mid 0 \leq s_i \leq 1 (1 \leq i \leq n)\}$$

Meja ∂I^n je geometrijska meja od I^n.

$$\partial I^n = \{(s_1, \ldots, s_n) \in I^n \mid \text{nekateri } s_i = 0 \text{ ali } 1\}$$

V fundamentalnih grupah se meja ∂I od $I = [0, 1]$ preslika v začetno točko x_0. Podobno lahko tudi tukaj sklepamo, da se bomo ukvarjali z zveznimi preslikavami $\alpha : I^n \to X$, ki preslikajo mejo ∂I^n v točko $x_0 \in X$. Ker gre za preslikavo v točno eno točko, smo pridobili S^n iz I^n. Če $I^n/\partial I^n$ označuje kocko I^n, katere meja ∂I^n je skrčena v točko, imamo $I^n/\partial I^n \cong S^n$. Preslikava α je n-zanka v x_0.

V splošnem ne obstajajo algoritmi za izračun višjih homotopskih grup $\pi_n(X)$. Za vsak topološki prostor z $n \geq 2$ je potrebna ad hoc metoda. V primeru $n = 1$ pa lahko fundamentalno grupo izračunamo posredno – če je prostor homeomorfen z nekim poliedrom, obstaja rutinski postopek za željeni izračun [7]. Podobno lahko za prostore, ki so sestavljeni iz preprostejših topoloških podprostorov, uporabimo van Kemp(e)nov teorem [8].

4. Uporaba v fiziki

Geometrija, in z njo z roko v roki tudi topologija, sta izredno pomembni pri preučevanju sistemov kondenzirane snovi. Opazovali bomo aplikacijo homotopskih grup na klasifikacijo defektov v urejenih materialih ter fazne prehode v kondenziranih sistemih na primerih spontane magnetizacije in faznega prehoda v nematskih tekočih kristalih.

Ob faznem prehodu se simetrija sistema spremeni, kar nakazuje parameter urejenosti. Z njim opišemo stopnjo urejenosti sistema, katerega fazni prehod opazujemo. Je količina, za katero velja, da je pod temperaturo faznega prehoda od nič različna, nad njo pa enaka nič [9]. Meri torej urejenost nizkotemperaturne faze – nizkotemperaturna faza je vedno bolj urejena od visokotemperaturne, kar se lepo vidi na primeru ledu in vode.

Fazni prehodi so lahko zvezni ali pa nezvezni. Pri slednjih parameter urejenosti ob prehodu doživi nenaden skok, pri zveznih pa z nižanjem temperature zvezno narašča. Prehod med feromagnetom in paramagnetom je tipičen zvezni prehod, prehod iz neurejene v nematsko fazo pa je nezvezen, četudi parameter urejenosti ob prehodu le malo poskoči.

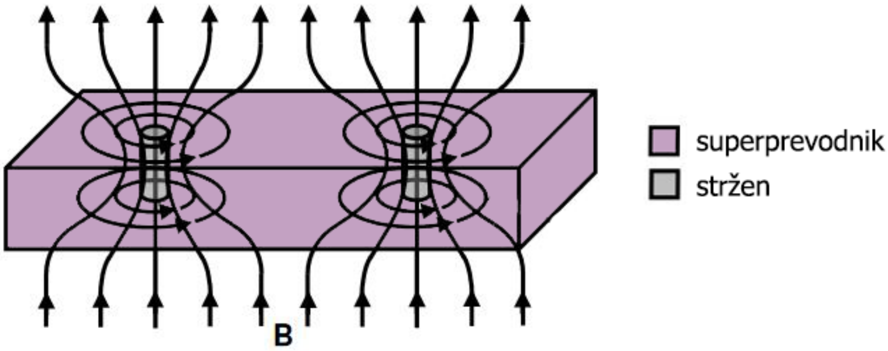
4.1 Sistemi trdne snovi

Opazujemo na primer tridimenzionalni model superprevodnika. Pri tem parameter urejenosti prevzame obliko $\psi(x) = \Delta_0(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(x)}$. Ko obravnavamo homogen sistem pri enotnih zunanjih pogojih (temperatura, tlak itd.), je amplituda Δ_0 enolično fiksirana z minimiziranjem kondenzacijske proste energije, saj ta doseže minimum v ravnovesnem stanju v termodinamskih sistemih s stalno prostornino in stalno temperaturo. Še vedno pa nam ostane veliko maneverskega prostora – ψ lahko zavzame katerokoli vrednost na krogu $S^1 \cong \mathrm{U}(1)$, ki je določen s fazo $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. Na tak način homogen sistem zavzame svojo vrednost v prostoru parametra urejenosti M. Za superprevodnik velja $M = U(1)$, za Heisenbergov spinski sistem $M = S^2$ (enotska sfera v dveh dimenzijah), za nematski tekoči kristal pa $M = \mathbb{R}P^2$ (projektivna ravnina/zvita sfera – razširitev pojma ravnine, v kateri se v natanko eni točki sekata katerikoli dve premici, tudi vzporedni).

Če je sistem v nehomogenem stanju, gradient proste energije ni zanemarljiv in ψ morda ni v M. V primeru, ko je karakteristična velikost variacije parametra urejenosti veliko večja od koherenčne dolžine, lahko še vedno sklepamo, da se vrednost parametra urejenosti nahaja v M, kjer je vrednost tedaj funkcija položaja. Lahko obstajajo točke, črte in površine v takem modelu, kjer parameter ni točno določen – to so defekti. Poznamo točkaste defekte (monopole), črtne defekte (vrtince) in površinske defekte (domenske stene) [10]. Ti defekti so klasificirani s homotopskimi grupami.

Naj bo X prostor, napolnjen z določenim modelom, ki ga obravnavamo. Parameter urejenosti je klasično polje $\psi(x)$, ki je mnogokrat obravnavano tudi kot preslikava $\psi : X \to M$. Recimo, da je v našem modelu defekt, vzemimo na primer črtni defekt (vrtinčne niti) v tridimenzionalnem superprevodniku, ki ga prikazuje slika 5. V superprevodniku I. vrste se superprevodnost poruši, v superprevodniku II. vrste pa nad prvim kritičnim poljem magnetno polje sicer prodre v superprevodnik, vendar tok še vedno teče brez upora. Del vzorca ostane superprevoden, del pa preide v normalno fazo v obliki vrtinčnih niti, znotraj katerih magnetno polje ni enako 0.

Predstavljamo si krožnico S^1, ki ga zaobjame. Če je vsak del S^1 daleč stran od defekta, mnogo dalje kot je koherenčna dolžina ξ, lahko sklepamo, da parameter urejenosti vzdolž S^1 zavzame svojo vrednost v prostoru parametra urejenosti $M = U(1)$.

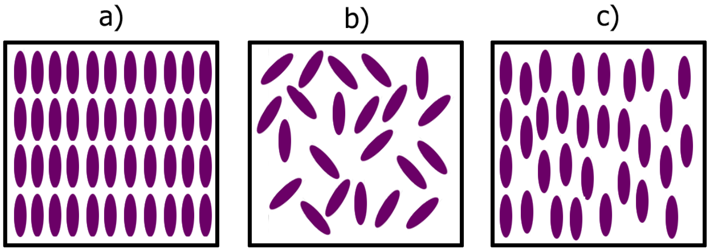


Slika 5. V superprevodnike II. vrste prodira magnetno polje v obliki vrtinčnih niti, ki so pri nizkih temperaturah ujete v nečistoče v kristalu. Superprevodnost zato poruši šele precej večje magnetno polje, ki ga imenujemo drugo kritično polje.

Preko tega koncepta se srečamo s fundamentalnimi grupami. Govorimo o zankah v topološkem prostoru $U(1)$. Preslikava $S^1 \to U(1)$ je klasificirana s homotopskim razredom. Vzemimo točko $r_0 \in S^1$ ter zahtevajmo, da se r_0 preslika v $x_0 \in M$. Ker $\pi_1(U(1), x_0) = \mathbb{Z}$, lahko takemu defektu dodelimo neko celo število – ker nam pove, kolikokrat slika S^1 obkroži prostor $U(1)$, je to kar ovojno število. Če imata dva črtna defekta enako ovojno število, je lahko eden zvezno deformiran v drugega. Če se torej združita dva, A in B, novi črtni defekt pripada homotopskemu razredu produkta homotopskih razredov, katerima sta pripadala A in B pred združitvijo. Ker je grupna operacija v $\mathbb{Z}$ seštevanje, je novo ovojno število kar vsota starih. Homogena porazdeljenost parametra urejenosti je povezana z zvezno preslikavo $\psi(x) = x_0 \in M$, ki pripada elementu $0 \in \mathbb{Z}$. Zanimivo je torej, da če združimo dva defekta z nasprotnima ovojnima številoma, lahko dobimo konfiguracijo brez defekta.

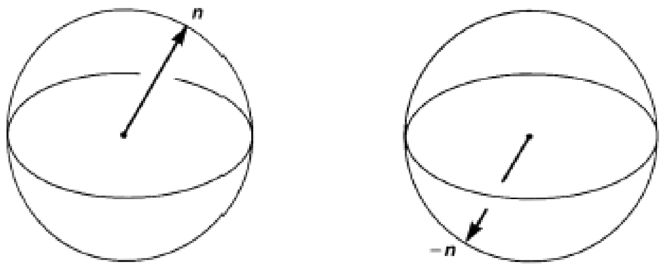
4.2 Fazni prehod v tekočih kristalih

Določeni organski kristali imajo zanimive optične lastnosti, ko so v svojih tekočih fazah. To so tekoči kristali, ki so karakterizirani s svojo optično anizotropijo. Tu se zanimamo za nematske tekoče kristale, pri katerih nas zanima prehod v nematsko fazo. Simetrijske razlike med fazami so prikazane na sliki 6.



Slika 6. Različne faze tekočih kristalov: a) prikazuje trdno stanje, v katerem so molekule urejene orientirano in periodično, v tekoči fazi b) niso urejene, v nematski fazi c) pa so orientirane, a ne tudi periodične.

Molekula nematskega kristala je podolgovata in direktor, v tem primeru tudi parameter urejenosti, je podan s povprečno smerjo palčke. Četudi pri sami molekuli ni določeno, kateri del je začetek ali konec, ima direktor določeno simetrijo: nima smisla razlikovati med direktorjema $n = \rightarrow$ in $-n = \leftarrow$. Direktor bi radi določili s točko na S^2. Dve nasprotni točki $n = (\theta, \phi)$ in $-n = (\pi - \theta, \pi + \phi)$ predstavljata isto stanje, ki je prikazano na sliki 7.



Slika 7. Direktorja $n = \rightarrow$ in $-n = \leftarrow$, ki predstavljata enako stanje.

Tako je parameter urejenosti nematskega kristala projektivna ravnina $\mathbb{R}P^2$. Polje direktorja je v splošnem odvisno od položaja r. Tedaj lahko definiramo preslikavo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}P^2$. Taki preslikavi pravimo tekstura – prav tako se tako imenuje dejanska konfiguracija parametra urejenosti v $\mathbb{R}^3$. Črtne defekte v nematskih tekočih kristalih klasificiramo s fundamentalno grupo $\pi_1\left(\mathbb{R}P^2\right) \cong \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. Tekstura z ovojnim številom 0 opisuje stanje brez defekta, tekstura z ovojnim številom 1 pa stanje s stabilnim defektom. V nematskih tekočih kristalih najdemo tudi točkovne defekte, ki jih klasificiramo z drugo homotopsko grupo $\pi_2\left(\mathbb{R}P^2\right) = \mathbb{Z}$.

4.3 Prehod iz fero- v paramagnetno fazo

V primeru prehoda med feromagnetom in paramagnetom kot parameter urejenosti služi spontana magnetizacija (namagnetenost). Globoko pod Curijevo temperaturo doseže največjo možno vrednost, z višanjem temperature pa se manjša vse do vrednosti 0, ki jo ima v neurejeni paramagnetni fazi.

Naj bo H Hamiltonian, ki opisuje sistem trdne snovi. Sklepamo, da je H invarianten na določeno simetrijsko operacijo. Ni nujno, da najnižje energijsko stanje takega sistema ohranja simetrijo H – v tem primeru se v sistemu zgodi spontan zlom simetrije. Za ilustracijo tega pojava si ogledamo Heisenbergov Hamiltonian [3]

$$H = -J \sum_{(i,j)} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + \mathbf{h} \cdot \sum_i \mathbf{S}_i,$$

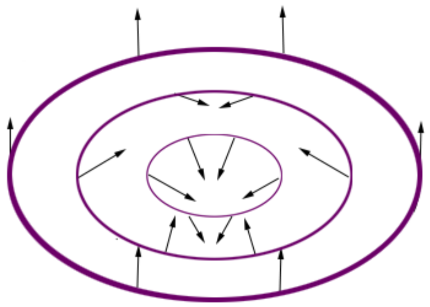
ki opisuje N feromagnetnih Heisenbergovih spinov $\{S_i\}$. Parameter J je pozitivna konstanta, vsota pa teče po parih sosedov (i, j). h opisuje nespremenljivo zunanje magnetno polje. Statistična vsota (opisuje sistem v ravnovesju) je $Z = \operatorname{tr} \mathrm{e}^{-\beta H}$, kjer $\beta = 1/T$, tr pa označuje sled. Sledi, da je prosta energija F definirana s pomočjo $\exp(-\beta F) = Z$. Povprečna magnetizacija na spin je [6]

$$\mathbf{m} \equiv \frac{1}{N} \sum_i \langle \mathbf{S}_i \rangle = \frac{1}{N\beta} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{h}}.$$

Ogledamo si limito, ko h$\to 0$. Četudi je H invarianten v množici SO(3) rotacij vseh $\mathbf{S}_i$, v tej limiti vemo, da $\mathbf{m}$ ne izgine za dovolj velike β in sistem ne izraža simetrije SO(3). V sistemu lahko opazujemo spontano magnetizacijo. Maksimalno temperaturo, pri kateri $m \neq 0$, imenujemo kritična temperatura.

Vektor $\mathbf{m}$ je parameter urejenosti, ki opisuje fazni prehod med urejenim ($m \neq 0$) in neurejenim ($m = 0$) stanjem. Sistem je še vedno simetričen za SO(2) rotacije okoli magnetizacijske osi $\mathbf{m}$.

Zanimamo se za mehanizme, ki opisujejo takšen fazni prehod. Prosta energija je $F = \langle H \rangle - TS$, kjer je S entropija. Za nizke temperature lahko zanemarimo TS v F in tako dobimo minimum F preko $\langle H \rangle$, ki je najmanjši, ko so vsi $\mathbf{S}_i$ poravnani v isti smeri. Pri visokih temperaturah je zanemarljiv energijski člen, minimum proste energije pa določa maksimum S, ki nastopi takrat, ko so smeri $\mathbf{S}_i$ popolnoma naključne.



Slika 8. Skica Belavin-Polyakovega monopola. $\mathbf{m}$ se približuje konstantnemu vektorju, v tem primeru $\hat{z}$, tako da energija ne divergira. Ta pogoj zagotavlja stabilnost tega vzbujanja – nemogoče je deformirati tako konfiguracijo v enotno, ko je $\mathbf{m}$ fiksen daleč od izhodišča.

Vzemimo sistem pri konstantni temperaturi. Velikost magnetizacije $|m|$ je neodvisna od položaja $\mathbf{m}$ in je določena zgolj s smerjo. V osnovnem stanju pričakujemo, da je $\mathbf{m}$ neodvisen od položaja. Na tem mestu je za opis smeri $\mathbf{m}$ najbolj elegantno preiti v polarne koordinate (θ, ϕ). Tako bolje orišemo povezavo med $\mathbf{m}$ in točko na sferi S^2. Za trenutek recimo, da je $\mathbf{m}$ funkcija položaja $\mathbf{m} = \mathbf{m}(x)$. V vsaki točki x tega prostora je pripisana točka (θ, ϕ) iz S^2 in s tem dobimo preslikavo $(\theta(x), \phi(x))$ in prostora S^2. Poleg osnovnega stanja (ter vzbujenih stanj, ki jih lahko opišemo z majhnimi nihanji okoli osnovnega stanja) lahko sistem vsebuje različna vzbujena stanja, ki jih iz osnovnega ne moremo pridobiti z zgolj majhnimi premiki. Kateri prehodi med stanji so mogoči, je odvisno od dimenzije prostora ter parametra urejenosti. Na primer, če je prostor dvodimenzionalen (opazujemo ravninski magnet), lahko Heisenbergov feromagnet izseva Belavin-Polyakov monopol, prikazan na sliki 8. Ker smo neskončno oddaljene točke identificirali, se ravnina preslika v sfero S^2.

Vzbuditve, katerih stabilnost je odvisna od topoloških argumentov, so imenovane topološke vzbuditve. Polje $\mathbf{m}(x)$ definira preslikavo $\mathbf{m} : S^2 \to S^2$ in je tako klasificiran s homotopsko grupo $\pi_2\left(S^2\right) = \mathbb{Z}$.

5. Zaključek

Težko bi bilo zanikati vsestransko uporabnost homotopskih grup v fiziki – do sedaj so do izraza najbolj prišle fundamentalne grupe, a pri njih se zgodba šele začne. Ozrimo se za hip še na ostale homotopske grupe. Najprej nas zanima dimenzionalnost defekta in sfera S^n, ki ga obkroža: imamo na primer točkasti defekt v tridimenzionalnem sistemu. Lahko je obkrožen s S^2 in tedaj določen s $\pi_2(M, x_0)$. Če ima M mnogo komponent, je $\pi_0(M)$ netrivialen. Zanimiv je Isingov model [8], za katerega je $M = \{\downarrow\} \cup \{\uparrow\}$. Potem je tam domenska stena, na kateri parameter urejenosti ni definiran. Na primer, če $S = \uparrow$ za $x < 0$ in $S = \downarrow$ za $x > 0$, obstaja domenska stena na yz-ravnini v točki $x = 0$. V splošnem je m -dimenzionalni defekt v d -dimenzionalnem modelu določen s homotopsko grupo $\pi_n(M, x_0)$, kjer $n = d - m - 1$. V primeru Isingovega modela so $d = 3, m = 2$; torej $n = 0$.

Četudi ta članek zgolj potopi prste v ocean topologije, podaja osnovno besedišče in temeljne koncepte, s katerimi se srečujemo, ko v roke vzamemo to uporabno orodje. Opis fizikalnih pojavov s pomočjo homotopije ponuja elegantne rešitve problemom, ki bi jih sicer težko reševali ali celo zgolj izrazili.

6. Zahvala

Zahvaljujem se mentorju dr. Roku Žitku, ki mi je neznane koncepte predstavil na razumljiv način in obenem spodbujal samostojno raziskovanje.

LITERATURA

[1] *Scientific Background on the Nobel Prize in Physics 2016*, spletna stran: `https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/advanced-physicsprize2016.pdf`, 1, (ogled: 8.3. 2021).

[2] Matija Cencelj in Dušan Repoš, *Topologija*, Pitagora, (2011).

[3] *Homeomorfizem*, spletna stran: `http://wiki.fmf.uni-lj.si/wiki/Homeomorfizem`, (ogled: 4.3. 2021).

[4] Valentina Petelin, *Hamiltonske grupe*, Fakulteta za matematiko in fiziko, (2010).

[5] Aleš Vavpetič, *Homotopija*, spletna stran: `https://www.fmf.uni-lj.si/~vavpetic/AT/V_Homotopija.pdf`, (ogled: 28.2. 2021).

[6] Mikio Nakahara, *Geometry, topology, and physics*, Taylor & Francis (2003).

[7] Chen Ning Yang, Mo-Lin Ge in Yang-Hui He, *Topology and Physics*, World Scientific (2019).

[8] Aaron Landesman, *Notes on the Fundamental Group*, spletna stran: `https://web.stanford.edu/~aaronlan/assets/fundamental-group.pdf`, 24-27, (ogled: 4.3. 2021).

[9] Daniel Svenšek, *Podhlajena tekočina*, spletna stran: `https://kvarkadabra.net/2000/01/podhlajeno/`, (ogled: 25.2. 2021).

[10] Martin Ulaga, *Mikroskopska teorija domenske stene in povezava s teorijo Landau-a*, spletna stran: `http://burana.ijs.si/wiki19/images/f/fd/Ulaga.pdf`, (ogled: 1.3. 2021).