

# MAGNETNI MONOPOLI V SPINSKEM LEDU

URH KLOPČIČ

Fakulteta za matematiko in fiziko  
Univerza v Ljubljani

V kristalih spinskega ledu se kot osnovne vzbuditve pojavijo kvazidelci z magnetnim nabojem oziroma magnetni monopoli. V članku je govora o splošnih lastnostih spinskega ledu, izvoru magnetnih monopolov v njem, dinamiki le-teh ter termodinamskem opisu spinskega ledu na podlagi magnetnih monopolov. Poudarjeno je, da magnetni monopoli v spinskem ledu ne predstavljajo osnovnih delcev, ki bi kakorkoli kršili Maxwelllove enačbe v uveljavljeni obliki. Na koncu je opisano, kako fraktalna dinamika magnetnih monopolov v spinskem ledu vpliva na merljive količine.

## MAGNETIC MONOPOLES IN SPIN ICE

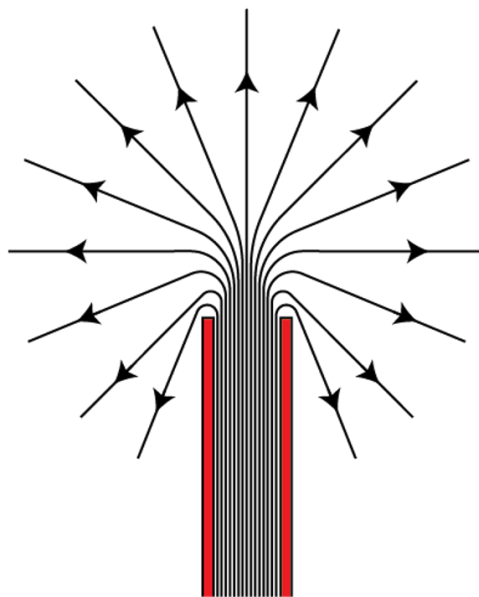
As elementary excitations in spin ice crystals, quasiparticles with magnetic charge or magnetic monopoles appear. This paper talks about common properties of spin ice, the emergence of magnetic monopoles within it and the thermodynamical description of the system. It is stressed that no discovery of an elementary particles violating Maxwell's equations is presented. In the end, the effect of fractal dynamics of magnetic monopoles in spin ice on observable quantities is described.

### 1. Uvod

Magnetni monopoli so za fizike uganka, odkar poznamo elektromagnetizem. Obstoj osnovnega delca, ki bi imel neničelen magnetni naboj, kljub mnogim poskusom do danes še niso potrdili. Leta 2008 so Castelnovo in kolegi [1] odkrili kvazidelce v posebni vrsti trdne snovi, imenovani spinski led, ki se obnašajo kot magnetni monopoli. Spinski led je kristal s podobno strukturo kot vodni led, mesta na kristalni mreži pa zasedajo magnetni dipoli. Zanj je značilna makroskopska entropija pri ničelni temperaturi. Plin magnetnih monopolov dveh različnih predznakov, ki se pojavijo kot vzbuditve sistema, lahko opišemo analogno dvokomponentni plazmi. Gibljejo se skoraj neodvisno eden od drugega, pri čemer upoštevajo nekaj specifičnih omejitev. V članku predstavimo osnove iskanja magnetnih monopolov, lastnosti spinskega ledu, izvor kvazidelcev z magnetnim nabojem in zanimivo dinamiko le-teh.

### 2. Magnetni monopoli

Kvantizacija električnega naboja je eden izmed tistih konceptov v fiziki, ki smo ga navajeni, tudi če ne poznamo mehanizma za njim. Eno od možnih razlag je ponudil Dirac v svojem članku o kvantiziranih singularnostih elektromagnetnega polja [2]. Najprej si zamislimo nek tuljavi podoben konstrukt, ki mu rečemo Diracova struna. Če konca tega konstrukta razmaknemo na poljubno razdaljo in se osredotočimo na enega od koncev, opazimo silnice gostote magnetnega polja  $\mathbf{B}$ , ki spominjajo na obliko silnic električnega polja v okolici električnih monopolov, kot prikazuje slika 1. Razlika med magnetnim in električnim primerom je le magnetni pretok znotraj Diracove strune. O magnetnih monopolih bi torej lahko govorili, če magnetnega polja znotraj strune ne bi mogli izmeriti. Tedaj bi bila Diracova struna le nek matematični konstrukt brez dejanskega fizikalnega pomena. Da to dosežemo, moramo izpolniti dva pogoja. Diracova struna mora biti enodimenzionalna krivulja, ker tako ne moremo v magnetno polje znotraj nje vstaviti nobenega delca. Drugi pogoj je nekoliko bolj zapleten. Oglejmo si Aharonov-Bohmov pojav. Če bi Diracovo struno obstreljevali z delci z neko valovno funkcijo, bi lahko izmerili interferenco delov te valovne funkcije, ki potujejo vsak po svoji strani strune. Fazni zamik med obema deloma je sorazmeren z magnetnim pretokom skozi struno. Ta pretok je nemerljiv le v primerih, ko je fazni zamik, ki ga zaradi magnetnega pretoka



**Slika 1.** Silnice gostote magnetnega polja  $\mathbf{B}$  v okolici Diracovega magnetnega monopola. Diracova struna je označena z rdečo barvo. Vir: [12].

valovna funkcija pridobi, večkratnik  $2\pi$ . Magnetni naboj  $g$  Diracovih magnetnih monopolov je tako kvantiziran po enačbi

$$g_0 = \frac{1}{2} \hbar c / e_0. \quad (1)$$

Diracovi magnetni monopoli torej nastopajo v parih nasprotno predznačenih nabojev, povezuje pa jih Diracova struna. V primeru njihovega obstoja se nekoliko spremenita Gaussov zakon za magnetizem in Faradayev zakon, in sicer pridobita člene zaradi gostote magnetnega naboja  $\rho_m$  ter gostote magnetnega toka  $\mathbf{j}_m$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \rho_m, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mu_0 \mathbf{j}_m.$$

Ker gostota magnetnega polja  $\mathbf{B}$  ni več brezizvorno polje, magnetni potencial  $\mathbf{A}$  ni več definiran po celotnem prostoru. Nedefiniran je prav vzdolž Diracove strune.

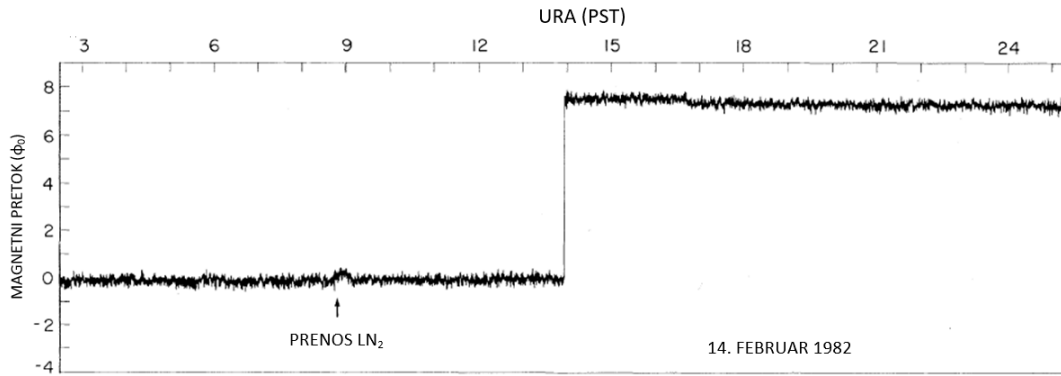
Teorije, ki združujejo elektromagneto, šibko in močno interakcijo, oziroma teorije GUT, napovedujejo takšne magnetne monopole v obliki delcev z zelo velikimi masami  $mc^2 \sim 10^{16}$  GeV. Tako velike mase še dolgo ne bodo dosegljive v trkalnikih delcev, kot je na primer LHC. Zato se lahko za zaznavo magnetnih monopolov zanašamo le na morebitno prisotnost takšnih delcev v kozmičnem sevanju.

## 2.1 Poskusi zaznave magnetnih monopolov

Morebitno prisotnost magnetnih monopolov v kozmičnem sevanju je s pomočjo detektorja SQUID meril Blas Cabrera s sodelavci [3]. SQUID je sestavljen iz superprevodne tuljave in ampermetra. Delec z magnetnim nabojem bi namreč pri preletu skozi superprevodno tuljavo s polmerom  $R$  in induktivnostjo  $L$  v njej inducirala tok. Časovno odvisnost toka opiše enačba

$$I(t) = \frac{\Phi_0}{L} \left[ 1 + \frac{\gamma vt}{\sqrt{(\gamma vt)^2 + R^2}} \right],$$

kjer je  $\Phi_0$  magnetni pretok, ki ustreza enemu Diracovemu naboju. V skupno 151 dneh merjenja naj bi prišlo do enega takega dogodka. Časovni potek električnega toka ob preletu je prikazan na sliki 2. Rezultat je skladen z Diracovo napovedjo. Ker meritev ni bila nikoli uspešno ponovljena, v znanstveni javnosti ni tretirana kot potrditev obstoja magnetnih monopolov.



Slika 2. Skok toka, ki ustreza preletu Diracovega magnetnega naboja skozi tuljavo. Prevedeno iz vira [3].

V devetdesetih letih je potekal še en eksperiment merjenja kozmičnega sevanja pod imenom MACRO [4]. Sestavljen je bil iz treh detektorjev, ki so merili vsak na svoj način in neodvisno eden od drugega. Meritev je potekala med leti 1989 in 2000. Detektor je imel mnogo večji presek od Cabrerove tuljave, bil pa je nameščen pod zemljo, kar je znatno zmanjšalo gostoto kozmičnega sevanja. Zaznan ni bil noben magnetni monopol, je pa eksperiment MACRO pokazal, da so magnetni monopoli v primeru obstoja izjemno redki.

### 3. Spinski led

V tem članku se ukvarjamo s pojavi v dveh vrstah spinskega ledu, in sicer v kristalih  $Dy_2Ti_2O_7$  in  $Ho_2Ti_2O_7$ . Ti kristali so magnetni izolatorji oziroma snovi z magnetnimi lastnostmi, ki ne prevajajo električnega toka. Ioni lantanoidov, se pravi disprozija oziroma holmija, imajo velik magnetni dipolni moment  $\mu \sim 10\mu_B$ . Če želimo obravnavano tematiko dobro razumeti, se je treba najprej poglobiti v kristalno strukturo in fizikalne lastnosti te snovi.

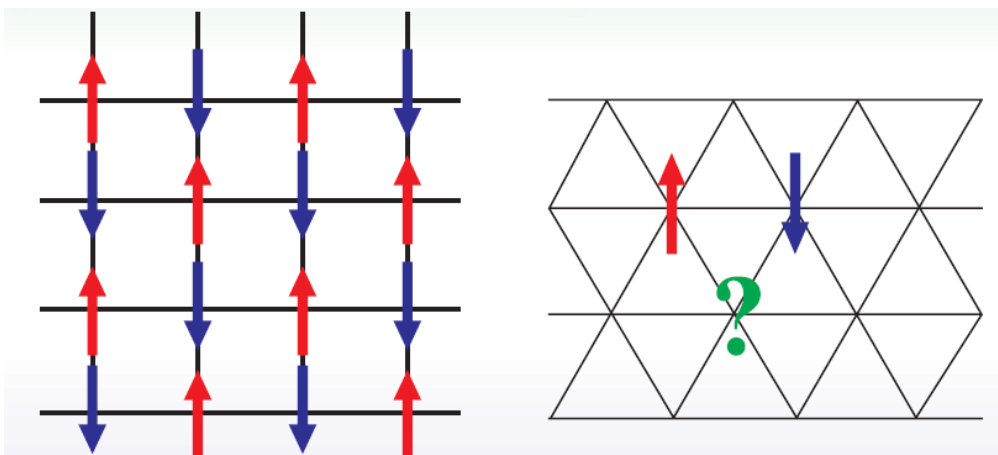
#### 3.1 Geometrijska frustracija

Za obnašanje feromagnetov in antiferomagnetov je odgovorna izmenjalna interakcija, ki izhaja iz Paulijevga izključitvenega načela. V hamiltonki torej nastopa člen

$$H = J \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j,$$

kjer indeks  $i$  teče po vseh delcih,  $j$  pa po najbližjih sosedih vsakega delca. Antiferomagnetni imajo pozitivno sklopitveno konstanto  $J$ , feromagnetni pa negativno. Za slednje je torej energijsko ugodno, da se spini posameznih delcev poravnajo v isto smer. V limiti nizkih temperatur se zgodi točno to. Do take ureditve lahko pride vedno, neodvisno od kristalne mreže. Pri antiferomagnetih je slika bolj zapletena [5].

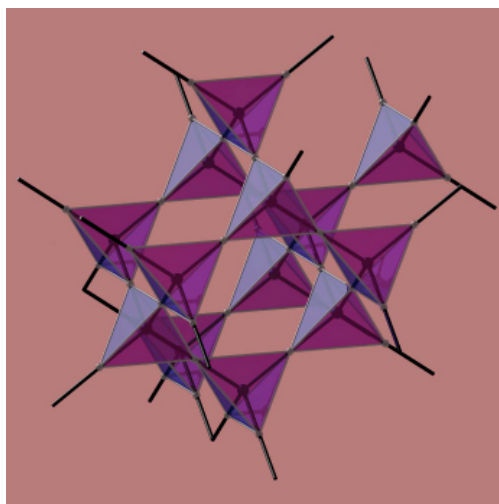
Oglejmo si najprej primer Isingovih spinov, se pravi takšnih, ki so lahko le v dveh stanjih z nasprotnima smerema. V eni dimenziji zaporedni spini izmenično kažejo v nasprotno smer, v večih



**Slika 3.** V antiferomagnetu na kvadratni mreži se spini pri ničelni temperaturi uredijo, kot je prikazano levo. V antiferomagnetu na trikotni mreži na desni pa se sosednja spina zlahka poravnata v nasprotnih smereh, tretji pa ne ve več, kako bi se obrnil. Temu pojavu pravimo geometrijska frustracija. Vir: [5].

dimenzijah pa lahko pride do težave. Obstajajo namreč take kristalne mreže, na katerih sosednji spini ne morejo vedno kazati v nasprotno smer. Dvodimenzionalen primer je prikazan na sliki 3. Ko preidemo v tri dimenzije se vse skupaj še bolj zaplete. Za nas bo pomembna frustracija na tridimenzionalni mreži sestavljeni iz tetraedrov, ki si delijo oglišča, zato si je vredno najprej poglobljeno ogledati primer trikotne mreže v dveh dimenzijah. Na sliki 3 vidimo, da prav na trikotni mreži pride do najpreprostejše oblike geometrijske frustracije.

### 3.2 Piroklorna kristalna mreža in vodni led

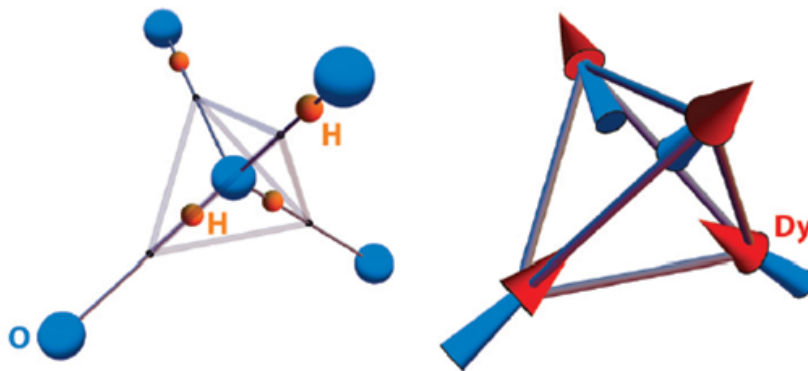


**Slika 4.** Piroklorna kristalna mreža, sestavljena iz tetraedrov, ki se stikajo v ogliščih. Če povežemo središča tetraedrov, dobimo dobro znano diamantno mrežo. Vir: [1].

Spinski led dobi ime zaradi svoje strukturne podobnosti vodnemu ledu. Oba kristala sta urejena v piroklorno mrežo, prikazano na sliki 4. V vodnem ledu se atomi kisika razporedijo v središča tetraedrov, atomi vodika pa vzdolž diamantnih vezi, kakor kaže slika 5. Na ta način je med dvema kisikoma vedno en vodik, ki pa ni na sredini. Vsak atom kisika ima tako po dva bližnja in dva bolj oddaljena atoma vodika.

V spinskem ledu magnetne dipole v ogliščih tetraedrov kristalna mreža prisili, da so obrnjeni v smeri diamantnih vezi. Ta sklopitev je približno za dva reda velikosti močnejša od medsebojne inte-

rakcije sosednjih dipolov. Zato govorimo o Isingovih spinih. V primeru antiferomagnetne sklopitve v spinskem ledu je sistem geometrijsko frustriran. Izkazuje se, da je energijsko najugodnejše stanje takšno, da sta v vsakem tetraedru dva dipola obrnjena navznoter in dva navzven. Temu rečemo pravilo „dva noter, dva ven“ ali pravilo ledu, ki je na sliki 5 že upoštevano. To je najlažje pokazati s pomočjo opisa s kvazidelci.



**Slika 5.** Na levi sliki je prikazana struktura vodnega, na desni pa spinskega ledu. Zaradi decentraliziranosti vodikovih atomov bi lahko v oglišča tetraedrov postavili nekakšne virtualne dipole. V spinskem ledu to vlogo prevzamejo ioni disprozija, ki imajo magnetni dipolni moment. Vir: [8].

### 3.3 Opis s kvazidelci

Spinski led smo do te točke opisali v realni sliki z magnetnimi dipoli v ogliščih tetraedrov. Energijo takega sistema opišemo s hamiltonko

$$H = \frac{J}{3} \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j + Da^3 \sum_{\langle i,j \rangle} \left[ \frac{\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j}{|\mathbf{r}_{ij}|^3} - \frac{3(\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{r}_{ij})(\hat{\mathbf{e}}_j \cdot \mathbf{r}_{ij})}{|\mathbf{r}_{ij}|^5} \right] S_i S_j, \quad (2)$$

kjer prvi člen predstavlja izmenjalno interakcijo med sosednjimi spini, drugi pa magnetno dipolno interakcijo med pari med seboj poljubno oddaljenih spinov. Konstanta  $a$  je razdalja med najbližjima dipoloma na piroklorni mreži,  $D = \mu_0 \mu^2 / (4\pi a^3)$  pa dipolna sklopitvena konstanta. Namesto dipolov na piroklorni mreži si lahko zamislimo magnetne monopole v središčih tetraedrov. Dva nasprotno predznačena magnetna monopola v sosednjih tetraedrih tvorita ravno magnetni dipol, ki ga želimo nadomestiti. Velikost posameznega magnetnega naboja je določena z velikostjo magnetnega dipolnega momenta  $\mu$  in mrežno konstanto  $a$ :

$$q_m = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \mu / a. \quad (3)$$

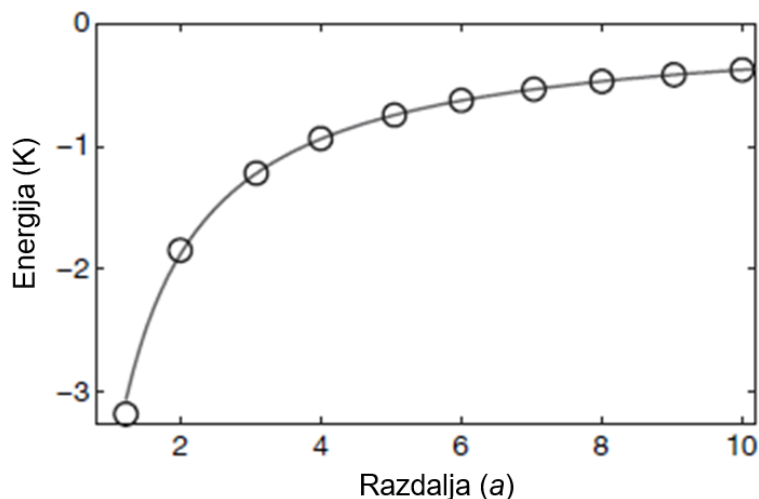
Numerični predfaktor je posledica razmerja med dolžinama piroklorne in diamantne vezi. Na vsakem mestu v diamantni mreži torej stoji kvazidelec z magnetnim nabojem  $Q$ , ki je vsota vseh štirih prispevkov sosednjih dipolov. Interakcija med posameznimi magnetnimi monopoli je podana v obliki potenciala

$$V(r_{\alpha\beta}) = \begin{cases} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_\alpha Q_\beta}{r_{\alpha\beta}}; & \alpha \neq \beta \\ \frac{1}{2} v_0 Q_\alpha^2; & \alpha = \beta, \end{cases}$$

kjer indeksa  $\alpha$  in  $\beta$  tečeta po strukturnih tetraedrih. Faktor  $v_0$  je določen tako, da reproducira enačbo (2). Tak opis je popolnoma ekvivalenten coulombski interakciji električno nabitih delcev z odbojnim potencialom na kratkih razdaljah. Če seštejemo prispevke po vseh parih, dobimo hamiltonko oblike

$$H = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\alpha, \beta} \frac{Q_\alpha Q_\beta}{r_{\alpha\beta}} + \frac{v_0}{2} \sum_{\alpha} Q_\alpha^2. \quad (4)$$

Na tej točki je očitno, da bo energija sistema minimalna, ko bodo vsi  $Q_\alpha = 0$ , oziroma ko bosta v vsakem tetraedru po dva magnetna dipola kazala navznoter in po dva navzven. Energijo torej res minimizira pravilo ledu. Ekvivalentnost hamiltonk (2) in (4) je prikazana na sliki 6.



**Slika 6.** Primerjava coulombske energije (4) kot funkcije razdalje med delci z numeričnimi izračuni dipolne interakcije (2). Krivulji sta prikazani le za  $a > 1$ , ker je to najmanjša smiselna razdalja za naš problem. Obravnavana je konfiguracija spinskega ledu iz slike 8 e. Prevedeno iz vira [1].

### 3.4 Paulingova entropija

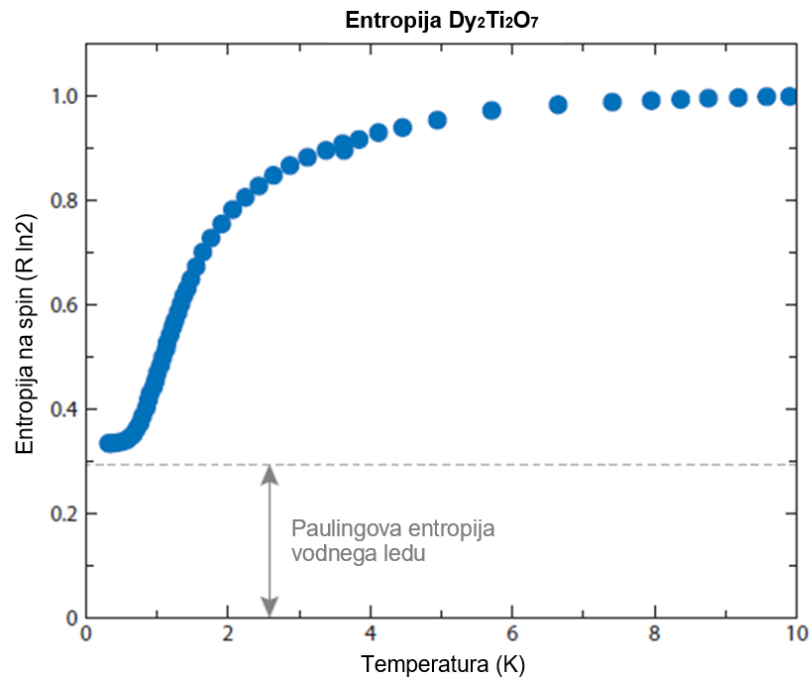
Zaradi pravila ledu pride do degeneracije osnovnega energijskega nivoja kristala. Obstaja namreč veliko število različnih stanj, ki vsa ustrezajo minimalni energiji sistema. Posledica tega je makroskopska entropija sistema, ohlajenega na absolutno ničlo. Tej residualni entropiji rečemo tudi Paulingova entropija [6]. Da bi to entropijo izračunali, začnimo z Boltzmannovo formulo za entropijo

$$S = k_B \ln W, \quad (5)$$

kjer je  $W$  število možnih stanj pri določeni energiji. Vseh stanj, ne glede na energijo, je  $2^N$ , kjer je  $N$  število vseh magnetnih dipolov. V enem tetraedru je  $2^4 = 16$  možnih stanj, saj lahko vsak izmed štirih spinov kaže v dve smeri. Od tega jih  $\binom{4}{2} = 6$  uboga pravilo ledu. Skupno število tetraedrov je  $N/2$ , vsak je namreč sestavljen iz štirih spinov, vsak spin pa si delita po dva tetraedra. Vseh stanj z minimalno energijo je torej  $W = (3/8)^{N/2} 2^N$ . Za primerjavo, v klasičnem feromagnetu sta taki stanji 2, ne glede na število delcev. Če dobljeni  $W$  vstavimo v enačbo (5), dobimo Paulingov rezultat za entropijo sistema na en spin:

$$\lim_{T \rightarrow 0} S/N = \frac{1}{2} k_B \ln \frac{3}{2}.$$

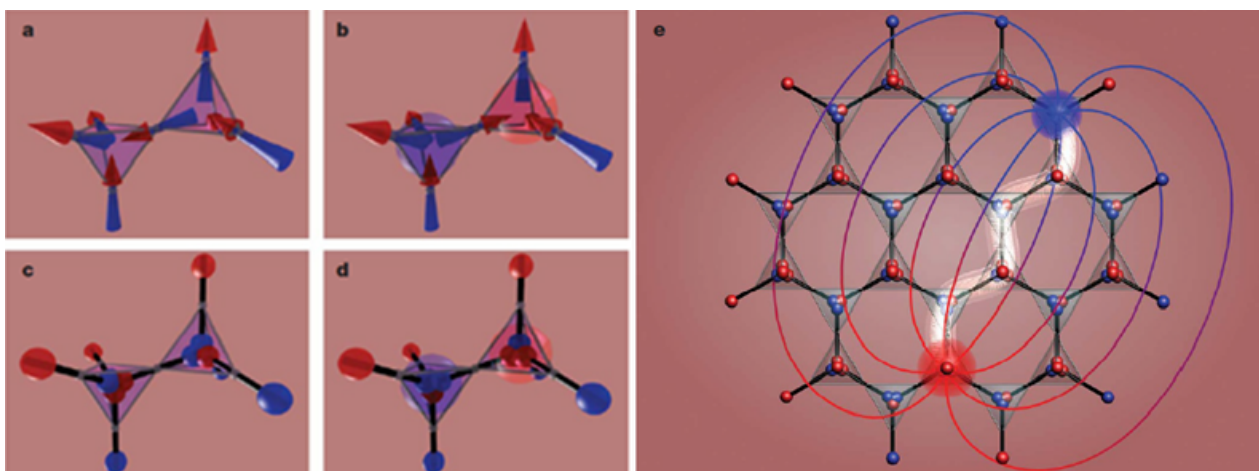
Pauling je sicer računal entropijo za vodni led, eksperiment [7] pa pokaže, da rezultat dobro velja tudi za kristal spinskega ledu  $\text{Dy}_2\text{Ti}_2\text{O}_7$ , kakor je prikazano na sliki 7.



**Slika 7.** Temperaturna odvisnost entropije spinskega ledu v limiti nizkih temperatur. Meritve se ujemaajo s Paulingovo napovedjo v okviru napake. Prevedeno iz vira [7].

#### 4. Monopoli kot osnovne vzbuditve

Če je kristal spinskega ledu ohlajen na ničelno temperaturo, bo pravilo ledu upošteevano globalno. V trenutku, ko v sistem dovedemo energijo, pride do termičnih vzbuditev. Naivno si lahko mislimo, da je osnovna vzbuditev našega sistema obrat enega samega magnetnega dipola, kot je prikazano na sliki 8 b. V prvem izmed dveh strukturnih tetraedrov, ki v oglišču gostita ta dipol, zdaj navzven kažejo trije dipoli, navznoter pa eden, v drugem tetraedru pa obratno. Če obrat dipola obravnavamo v opisu s kvazidelci, vidimo, da to vodi v nastanek dveh nasprotno predznačenih magnetnih monopolov v sosednjih tetraedrih, kar prikazuje slika 8 d. Magnetni naboj takšnih kvazidelcev je  $Q = \pm 2q_m$ , ker se prispevka dveh dipolov pokrajšata, preostala dva pa imata enak predznak. Če se v enem od dotičnih tetraedrov obrne še kateri od preostalih dipolov, se bo ta tetraeder vrnil v osnovno stanje,



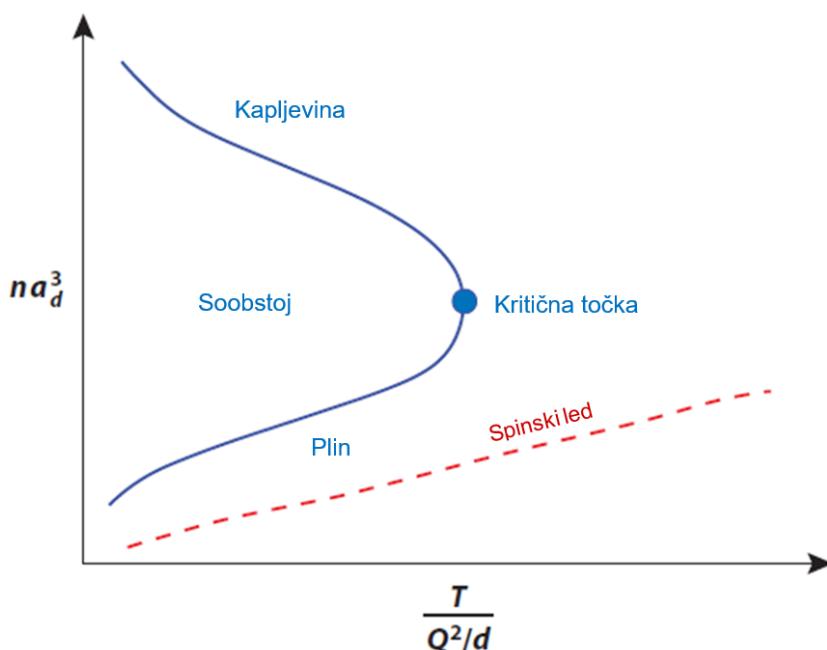
**Slika 8.** Na slikah a in b sta prikazani osnovno in vzbujeno stanje sosednjih tetraedrov v dipolni sliki, na slikah c in d pa v sliki kvazidelcev. Na sliki e sta prikazana razmaknjena monopola. Z belo barvo označena veriga obrnjenih dipolov je ekvivalent Diracove strune. Vrisane so tudi silnice jakosti magnetnega polja  $\mathbf{H}$ . Vir: [1].

vzbuditev pa se bo premaknila na sosednjega. Prav zaradi velike degeneracije osnovnega stanja je torej možno prosto potovanje nasprotno predznačenih magnetnih monopolov po kristalni mreži. Za premik monopola je potrebno dovesti samo toliko energije, da premagamo coulombski potencial, ki pa je vselej končen. Tako lahko zares govorimo o izoliranih polih magneta, ki ju lahko ločimo na poljubno razdaljo.

#### 4.1 Nepravi magnetni monopoli

Treba je poudariti, da se takšni magnetni monopoli precej razlikujejo od Diracovih. Z obravnavo opisa s kvazidelci smo uvedli mikroskopske izvore polja  $\mathbf{B}$ , ki jih v realni sliki ni. Zato se moramo zavedati, da vzbuditve v spinskem ledu niso dejanski delci z magnetnim nabojem, lahko pa z uvedbo takšnih kvazidelcev ekvivalentno opišemo dogajanje v kristalu na velikih razdaljah. Magnetni monopoli v spinskem ledu torej niso izvori oziroma ponori polja  $\mathbf{B}$ . Povezani so namreč z verigo obrnjenih magnetnih dipolov, skozi katero se njegove silnice sklenejo, podobno kot se to zgodi znotraj tuljave ali trajnega magneta. Ta veriga obrnjenih dipolov igra vlogo Diracove strune, je pa za razliko od prave Diracove strune njeno magnetno polje merljivo. Te sledi v splošnem ne moremo locirati, ker ne vemo, v katerem od osnovnih stanj se je nahajal sistem pred vzbuditvijo in po katerih poteh sta se magnetna monopola gibala. Ko imamo opravka z večjim številom parov magnetnih monopolov, niti ne vemo več, kateri spadajo skupaj.

Tako spinski led upošteva standardne Maxwellove enačbe brez dodatnih členov v primeru obstoja magnetnega naboja. Polje  $\mathbf{B}$  je še vedno brezizvorno. Vzbuditve v spinskem ledu torej niso pravi magnetni monopoli, kakršne opisuje poglavje 2. Izraz magnetni monopol se zanje vseeno uporablja, ker lahko interakcije med takimi vzbuditvami natančno opišemo z magnetno coulombsko interakcijo (4). Magnetni monopoli v spinskem ledu so le izvori oziroma ponori magnetizacije  $\mathbf{M}$  in s tem tudi jakosti magnetnega polja  $\mathbf{H}$ . Prav tako jih ne veže kvantizacijsko pravilo (1) in lahko njihov naboj celo zvezno spreminjamo. Spomnimo se, da v enačbi (3) kot parameter nastopa razdalja med delci. Tako se lahko naboj magnetnih monopolov v spinskem ledu spremeni s pomočjo zunanje tlaka ali temperature.



**Slika 9.** Fazni diagram plazme magnetnih monopolov v odvisnosti od temperature in številske gostote. Z rdečo je vrisana krivulja stanj, ki so dosegljiva v spinskem ledu. Prevedeno iz vira [8].

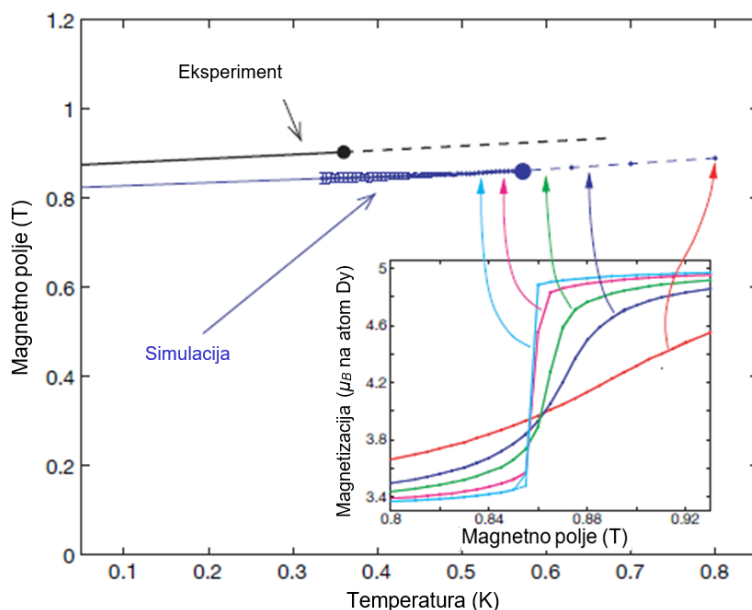


## 4.2 Opis z dvokomponentno plazmo

Če nas zanima termodinamski opis obnašanja magnetnih monopolov v spinskem ledu, hitro pomislimo na plazmo, ki jo opisuje Debye-Hückelova teorija [8]. V klasični dvokomponentni plazmi imamo pozitivno in negativno nabite ione, ki neodvisno potujejo po prostoru. Čutijo le coulombski potencial. V spinskem ledu je v prvem približku drugače le to, da so naboji magnetni. Pod normalnimi pogoji so vzbuditve v spinskem ledu dokaj redke in lahko govorimo o obnašanju, podobnemu plinasti fazi. V naslednjem koraku torej želimo raziskati možne fazne prehode plina magnetnih monopolov. Na sliki 9 vidimo skico faznega diagrama navadne plazme. Ker je spinski led trdna snov, ima velik prožnostni modul. Številsko gostoto v njem lahko zato nekoliko spreminjamo le s temperaturo. Če želimo plazmo spraviti v kapljevinsasto fazo, se pravi v gostejše, bolj urejeno stanje, potrebujemo dodaten parameter.

Ta dodatni parameter je zunanje homogeno magnetno polje, ki kaže v smeri ene od diamantnih vezi. Za primer lahko vzamemo navpično smer na slikah 8 a in b. Če je zunanje polje dovolj močno, bo imelo stanje na sliki b nižjo energijo od tistega na sliki a. Ekvivalent pravila ledu v primeru takšnega magnetnega polja je pravilo „trije noter, eden ven” oziroma „eden noter, trije ven”. Številska gostota monopolov je v tem primeru maksimalna, in sicer vsebuje polovica tetraedrov pozitivno, polovica pa negativno predznačene magnetne monopole.

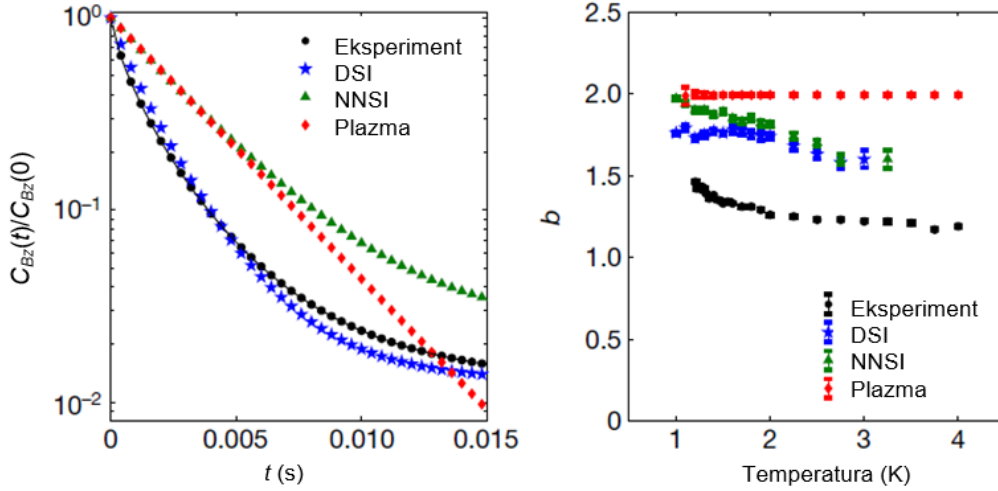
Opazljivka, s katero lahko kvantitativno merimo fazni prehod, je magnetizacija kristala. Na sliki 10 je prikazana odvisnost magnetizacije spinskega ledu od jakosti magnetnega polja pri različnih temperaturah, ki lepo razkrije navzočnost faznega prehoda. Graf temperaturne odvisnosti prikazuje tudi eksperimentalne podatke, a je večinski del analize opravljen na Monte Carlo simulacijah, ki na tej točki dobro reproducirajo eksperimentalne rezultate.



**Slika 10.** Graf faznega prehoda plina magnetnih monopolov. Glavna slika prikazuje temperaturno odvisnost fazne meje med plinasto in kapljevinsasto fazo plazme v magnetnem polju. Vložena slika prikazuje poljsko odvisnost magnetizacije pri različnih temperaturah. Z nje je lepo vidno, da je širina faznega prehoda sorazmerna s termično energijo  $\sigma_H \propto k_B T$ . Prevedeno iz vira [1].

## 4.3 Merjenje magnetnega šuma

V primeru spinskega ledu je Cabrerov način detekcije magnetnih monopolov praktično neuporaben. Opravka imamo namreč z velikim številom majhnih različno predznačenih magnetnih nabojev, ki spontano nastajajo in se rekombinirajo. V spinskem ledu merimo raje spektralno gostoto magne-



**Slika 11.** Leva slika prikazuje časovni potek avtokorelacijske funkcije magnetnega šuma v eksperimentu in v treh različnih teoretičnih modelih na levi, desna pa temperaturno odvisnost potence  $b$  iz enačbe (6). Model DSI je opis s coulombsko interakcijo in Diracovimi strunami, NNSI upošteva Diracove strune, ne pa coulombske interakcije, Free plazma pa je standarden opis plazme brez upoštevanja Diracovih strun, ki bi omejevale gibanje. DSI edini vsaj približno opiše avtokorelacijsko funkcijo, dejanski vrednosti  $b$  pa se ne približa noben model. Prevedeno iz vira [9].

tnega šuma [9]. Ta je ravno posledica pojavljanja in izginjanja monopolov. Spet lahko potegnemo vzporednico s klasično plazmo. Tam znamo izmeriti šum napetosti zaradi razpadanja molekul na ione in njihovih rekombinacij. Spektralna gostota šuma napetosti  $S_V$  je tesno povezana s spektralno gostoto fluktuacij v številu nosilcev naboja  $S_N$  z enačbo

$$S_V(\omega, T) = \left( \frac{V}{N_0} \right)^2 S_N(\omega, T),$$

kjer je  $N_0$  ravnovesno število nosilcev naboja,  $\omega$  frekvenca šuma,  $V$  pa napetost. Hitrost nastajanja oziroma generacije novih magnetnih monopolov opiše funkcija  $g(N, T)$ , hitrost rekombinacije pa  $r(N, T)$ . V ravnovesju je sistem stacionaren, torej  $g(N_0, T) = r(N_0, T)$ . Časovno skalo generacijsko-rekombinacijskega procesa opisuje karakteristični čas  $\tau$ , ki ga dobimo iz zveze

$$\tau(T) = \left[ \frac{dr(N, T)}{dN} - \frac{dg(N, T)}{dN} \right]^{-1} \Bigg|_{N_0}.$$

Debye-Hückelova teorija, ki uspešno opisuje dvokomponentno plazmo, napove spektralno gostoto fluktuacij v številu monopolov oblike

$$S_N(\omega, T) \propto \frac{\tau(T)}{1 + [\omega\tau(T)]^b}, \quad (6)$$

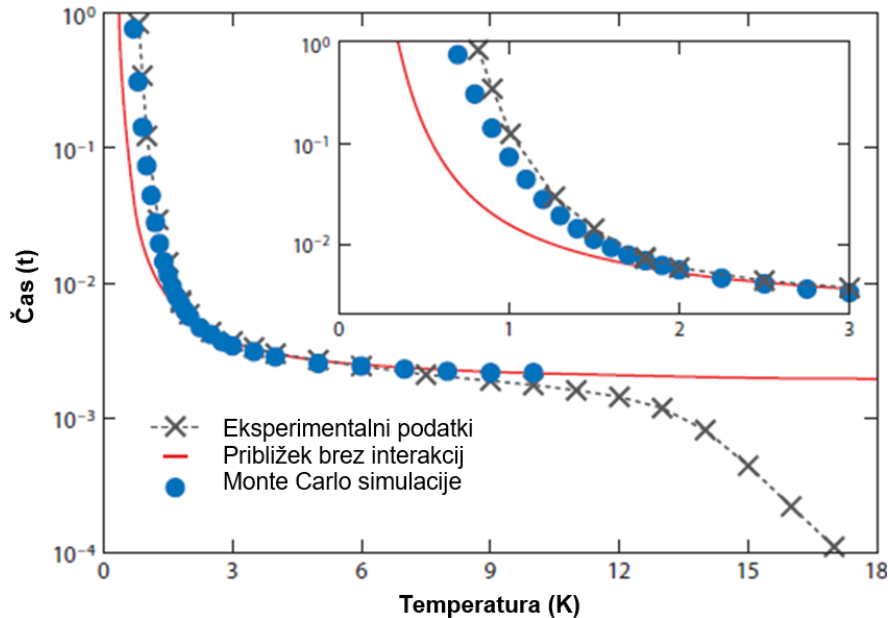
kjer je  $b = 2$ . Za velike  $\omega$  spektralna gostota pada kot  $\omega^{-b}$ . Kar se tiče vrednosti  $b$ , se eksperiment in teoretična napoved standardne teorije spinskega ledu, se pravi model z monopolnimi kvazidelci, med katerimi je coulombska interakcija, ne strinjata (slika 11). Rezultati Monte Carlo simulacij ležijo nekje vmes med eksperimentom in teorijo, saj gre za enak model kot v teoriji, le da je gibanje delcev nekoliko bolj omejeno. Namesto teoretično napovedane  $b = 2$  eksperiment pokaže, da za velike frekvence  $S_N(\omega)$  pada s potenco  $b \approx 1,5$ .

#### 4.4 Relaksacijski čas

Še eno od presenečenj za znanstvenike je prinesla hitra divergenca relaksacijskega časa magnetnih monopolov v spinskem ledu pri nizkih temperaturah [10]. To je časovna skala, v kateri sistem pride

v ravnovesje. Na sliki 12 so prikazani izmerjeni podatki, simulirani podatki in pa do nedavnega najboljša teoretična razlaga.

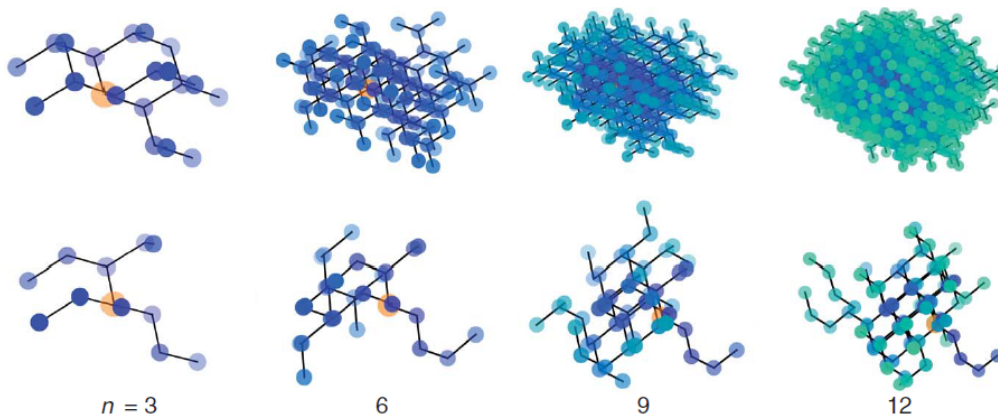
Pri nizkih in srednjih temperaturah (do 12 K) se sistem spreminja s pomočjo kvantnega tuneliranja skozi potencialne pregrade v kristalu. Pri višjih temperaturah vidimo, da se relaksacijski čas naglo zmanjša. Takrat se namreč lahko zapolnijo tudi višje energijska stanja v kristalu in sistema ni več mogoče opisati z Isingovimi spini. Opis z magnetnimi monopoli tako postane fundamentalno napačen.



**Slika 12.** Prikazana je temperaturna odvisnost relaksacijskega časa spinskega ledu pri nizkih temperaturah. Rdečo krivuljo opisuje Arrheniusov zakon za prosto difuzijo (eksponentna rast relaksacijskega časa). Vidimo, da ta teorija dobro opiše režim srednjih temperatur. Pri zelo nizkih pa modra in siva krivulja, ki opisujeta simulirane in eksperimentalno izmerjene podatke, divergirata mnogo hitreje. Prevedeno iz vira [10].

## 5. Fraktalna dinamika

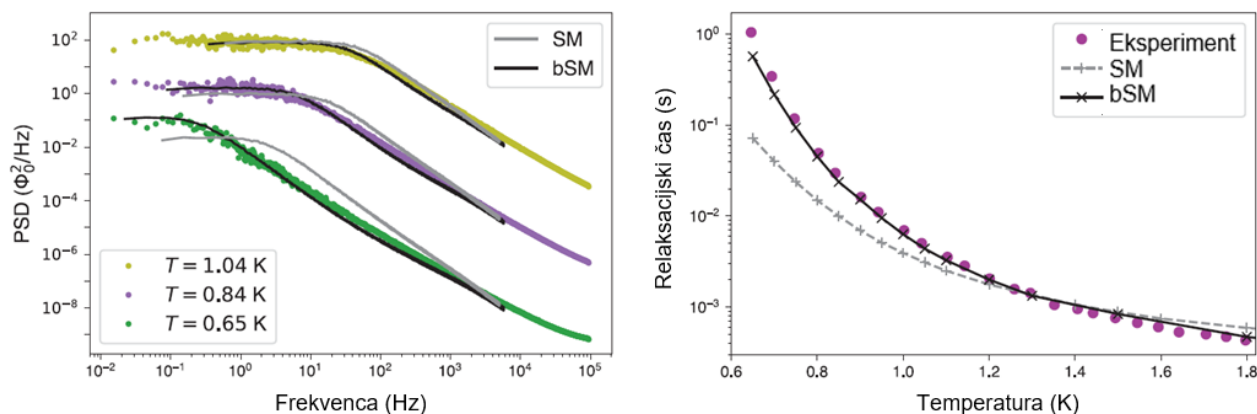
Do tukaj smo naleteli na dve točki nestrinjanja teorije in eksperimenta. Relaksacijski čas sistema pri nizkih temperaturah prehitro naraste, spektralna gostota magnetnega šuma pa pri velikih frekvencah pada s premajhno potenco. Izkaže se, da je za obe anomaliji odgovoren isti mehanizem. V članku



**Slika 13.** Prikaz mest v spinskem ledu, ki so v  $n$  korakih dosegljiva za določen magnetni monopol, ki je ob času  $t = 0$  na oranžno označenem mestu. Zgornja vrsta upošteva model SM, spodnja pa bSM. Vir: [11].

[11] so Hallén in sodelavci pokazali, da se kvazidelci v spinskem ledu gibljejo po omejeni geometriji. Zamislimo si pozitivno nabit magnetni monopol, ki vstopi v določen strukturni tetraeder v spinskem ledu preko določenega dipola. Ta dipol sedaj zagotovo kaže v ta tetraeder. Za naslednji korak se mora eden od dipolov, ki kažejo navznoter, obrniti navzven. Magnetni monopol lahko torej svojo pot nadaljuje le v dveh od preostalih treh smeri, lahko pa tudi nazaj. Tako v  $n$  korakih ne more priti do poljubnega za  $n$  oddaljenega tetraedra, kar prikazuje slika 13. Ta efekt je očiten predvsem na kratkih in srednje dolgih razdaljah. Ko preteče dovolj časa, lahko magnetni monopol do prej nedostopnih mest pride po drugi poti, ali pa nek drug monopol premeša postavitev magnetnih dipolov v bližini. Govorimo lahko o dinamičnem fraktalu, kar pomeni, da dimenzija prostora, po katerem se magnetni monopoli gibljejo, ni tri, pač pa je nekoliko manjša in ni več celo število.

Te nove omejitve so razlika med prej obravnavanim standardnim modelom (SM) spinskega ledu kot plazme različno predznačenih monopolov in na novo uvedenim modelom (bSM) z dodatnimi omejitvami gibanja. Glavni posledici te spremembe sta prav hitrejša divergenca relaksacijskega časa pri nizki temperaturi in padanje spektralne gostote pri velikih frekvencah s potenco  $b = 1,5$  (slika 14).



**Slika 14.** Na levi sliki je prikazana frekvenčna odvisnost magnetnega šuma v spinskem ledu pri različnih temperaturah, na desni pa temperaturna odvisnost relaksacijskega časa. Obe eksperimentalno izmerjeni odvisnosti sta primerjani z rezultati dveh modelov, SM in bSM. Prevedeno iz vira [11].

## 6. Zaključek

Pokazali smo, da znamo zelo natančno opisati obnašanje magnetnih monopolov v spinskem ledu pri nizkih temperaturah kot eksotičen primer magnetne plazme. Nismo pa žal nič bližje odkritju pravega magnetnega naboja, kakršnega je napovedal Dirac. Kot je v fiziki običajno, nova odkritja, poleg tega da odgovorijo na nekatera vprašanja, postavijo nove uganke. Dognanja na področju fraktalne dinamike so pokazala, da še nismo blizu popolnega razumevanja magnetnih sistemov kot je spinski led. Ker je stvar povsem nova, si težko predstavljamo, v kateri smeri bo potekal napredek v naslednjih letih. Zgodovina nas uči, da se bo prej ali slej pokazala tudi uporabna vrednost teh raziskav za vsakdanje življenje.

## 7. Zahvala

Rad bi se zahvalil mentorju, doc. dr. Martinu Klanjšku, za pomoč pri iskanju in interpretaciji strokovne literature.

## LITERATURA

- [1] C. Castellano et al. Magnetic Monopoles in Spin Ice. *Nature*, **451**: 42–45, (2008).

- [2] P. A. M. Dirac. Quantised Singularities in the Electromagnetic Field. *Proc. R. Soc. Lond.*, **133**: 60–72, (1931).
- [3] B. Cabrera. First Results from a Superconductive Detector for Moving Magnetic Monopoles. *Phys. Rev. Lett.*, **48**: 1378–1381, (1982).
- [4] The MACRO Collaboration. Final Results of Magnetic Monopole Searches With the MACRO Experiment. *Eur. Phys. J. C.*, **25**: 511–522, (2002).
- [5] R. Moessner, A. P. Ramirez. Geometrical Frustration. *Phys. Today*, **59**: 24–29, (2006).
- [6] L. Pauling. The Structure and Entropy of Ice and of Other Crystals with Some Randomness of Atomic Arrangement. *J. Am. Chem. Soc.*, **57**: 2680–2684, (1935).
- [7] A. P. Ramirez et al. Zero-Point Entropy in Spin Ice. *Nature*, **399**: 333–335, (1999).
- [8] C. Castelnovo et al. Spin Ice, Fractionalization, and Topological Order. *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.*, **3**: 35–55, (2012).
- [9] R. Dusad et al. Magnetic Monopole Noise. *Nature*, **571**: 234–239, (2019).
- [10] L. D. C. Jaubert, P. C. W. Holdsworth. Signature of Magnetic Monopole and Dirac String Dynamics in Spin Ice. *Nat. Phys.*, **5**: 258–261, (2009).
- [11] J. N. Hallén et al. Dynamical Fractal and Anomalous Noise in a Clean Magnetic Crystal. *Science*, **378**: 1218–1221, (2022).
- [12] T. Whyntie. *Dirac's Magnetic Monopole* (figure), Zenodo, Dec 2016.