RIESZOV FUNKCIJSKI RAČUN

ŽIGA GLADEK

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

V tem delu je predstavljena konstrukcija Rieszovega funkcijskega računa, ki je posplošitev predpisa, ki holomorfne funkcije izvrednoti v matriki. Na poti do tja se posploši pojem spektra in definira pojem holomorfne funkcije, ki slika v Banachovo algebro. Večina teorije iz običajne kompleksne analize se nato prenese na ta primer in to nam omogoča podati ustrezen predpis preko krivuljnega integrala.

THE RIESZ FUNCTIONAL CALCULUS

In this work the construction of the Riesz functional calculus is examined, which is a generalization of the calculus that evaluates holomorphic functions in matrices. In order to achieve this, the notions of spectrum and holomorphic function are generalized to the setting of Banach algebras. Most of the ordinary results from complex analysis transfer to this setting which allows us to define a functional calculus using the line integral.

1. Uvod

V linearni algebri poznamo smiselen način, kako funkcijo izvrednotiti v matriki, vendar pa pri tem na žalost ne pride v poštev prav vsaka funkcija. Deluje na primer, ko je funkcija holomorfna na okolici spektra matrike, tj. na okolici množice njenih lastnih vrednosti. Take znamo namreč razviti v potenčne vrste, matrike pa znamo izvrednotiti v delnih vsotah. S tem nato dobimo predpis, ki ima lepe algebraične lastnosti. Bodimo bolj natančni in označimo z $M_n(\mathbb{C})$ algebro $n\times n$-matrik nad $\mathbb{C}$. Naj bo $A \in M_n(\mathbb{C})$ in naj $\mathrm{Hol}(A)$ označuje algebro kompleksnih funkcij, ki so holomorfne na kaki odprti okolici spektra A. Izkaže se, da je predpis

$$\begin{aligned}\mathrm{Hol}(A) &\to M_n(\mathbb{C})\\ f &\mapsto f(A)\end{aligned}$$

homomorfizem algeber, ki ga imenujemo funkcijski račun za A. Matrike tipično predstavljajo linearne operatorje med končno-dimenzionalnimi prostori, ker pa bi lahko imeli opravka tudi z neskončno-dimenzionalnimi prostori, v katerih ta predpis ne pride v poštev, bi ga radi posplošili na širši razred objektov. Stvar se takoj zakomplicira, saj v neskončno-dimenzionalnih algebrah opis spektra elementa ni tako enostaven, kot na primer pri matrikah, zato bomo najprej ta pojem posplošili in si ogledali njegove osnovne lastnosti.

2. Banachove algebre in spektralna teorija

Da bo imel spekter lepe lastnosti, se moramo omejiti na dovolj lep razred objektov, ki bo še vedno zajemal algebre matrik. Tak razred so na primer Banachove algebre. Pred definicijo se spomnimo, da je Banachov prostor normiran vektorski prostor, ki je glede na metriko, ki jo inducira norma, poln.

Definicija 1. Algebra $\mathcal{A}$ nad poljem $\mathbb{F}$, opremljena z normo $\|.\|$, je *Banachova algebra*, če je glede na to normo Banachov prostor in če za poljubna elementa $a, b \in \mathcal{A}$ velja $\|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|$. Če ima $\mathcal{A}$ enoto $1_{\mathcal{A}}$, zahtevamo še $\|1_{\mathcal{A}}\| = 1$.

Opomba 1. Polje $\mathbb{F}$ bo za nas polje kompleksnih ali pa realnih števil in vedno bomo predpostavljali, da imajo naše algebre enoto.

Opomba 2. Lastnost $\|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|$ se imenuje *submultiplikativnost* in nam zagotavlja, da je glede na to normo množenje zvezno.

Primer Banachove algebre je na primer prostor zveznih funkcij $C([a, b])$ na intervalu $[a, b]$, opremljen s supremum normo. Bolj splošno je prostor zveznih funkcij $C(X)$ na kompaktnem prostoru X s supremum normo vedno Banachova algebra.

Spomnimo se sedaj, da je spekter matrike A definiran kot množica njenih lastnih vrednosti. Naj bo λ torej lastna vrednost in v pripadajoči lastni vektor. Tedaj je $Av = \lambda v$, kar lahko ekvivalentno opišemo s pogojem, da $A - \lambda I$ ni obrnljiva matrika. Vendar ta ekvivalenca velja le zato, ker neobrnljivost implicira, da ima $A - \lambda I$ netrivialno jedro, kar pa ne velja nujno v neskončnih dimenzijah, kot ponazori naslednji primer. Vektorje zamenjajmo z zaporedji in za $x = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definirajmo

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Če se omejimo na zaporedja, za katere vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ konvergira, dobimo Banachov prostor. Izkaže se, da je prostor zveznih operatorjev na prostoru takih zaporedij Banachova algebra, če ga opremimo z operatorsko normo. Ta je za operator A definirana s predpisom

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}.$$

V tej algebri imamo operator desnega premika S, ki je definiran tako, da zaporedje zamakne za eno mesto v desno. Torej je

$$S((a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)) = (0, a_1, a_2, a_3, \ldots).$$

Ta je očitno injektiven, torej ima trivialno jedro, zato 0 ni lastna vrednost. Vendar pa $A - 0I = A$ ni obrnljiv, saj ima levi inverz, ki zaporedje zamakne v levo, ki pa ni njegov desni inverz. To nam pove, da je ta drugi opis spektra splošnejši.

Definicija 2. Naj bo $\mathcal{A}$ Banachova algebra nad $\mathbb{F}$ in $a \in \mathcal{A}$. *Spekter elementa a* je množica

$$\sigma(a) = \{\alpha \in \mathbb{F} \mid a - \alpha \text{ ni obrnljiv}\}.$$

Resolventna množica elementa a je množica $\rho(a) = \mathbb{F} \setminus \sigma(a)$.

Opomba 3. Tu je α dejansko oznaka za identiteto, pomnoženo z α. Ta definicija je nasploh smiselna le, če ima $\mathcal{A}$ enoto, kar pa mi privzemamo.

Zgled 1. Naj bo X kompaktna množica in $f \in C(X)$. Trdimo, da je spekter f enak kar $f(X)$. Res, če je $\alpha = f(x)$ za nek $x \in X$, ima $f - \alpha$ ničlo in zato ni obrnljiva. Obratno, če α ni v sliki, $f - \alpha$ nima ničel. Zato je $\frac{1}{f - \alpha}$ dobro definirana zvezna funkcija in zato je $f - \alpha$ obrnljiva, torej $\alpha \notin \sigma(f)$.

Naš glavni cilj v tem poglavju je, da dokažemo, da je spekter elementa kompleksne Banachove algebre vedno neprazna kompaktna množica. Nad poljem realnih števil je spekter lahko prazna množica. Matrika $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ nima realnih lastnih vrednosti, saj je njen karakteristični polinom enak $\lambda^2 + 1$, ki nad $\mathbb{R}$ nima ničel, medtem ko jih nad $\mathbb{C}$ ima. Naš cilj je torej, da dokažemo:

Izrek 1. *Naj bo $\mathcal{A}$ kompleksna Banachova algebra in $a \in \mathcal{A}$. Tedaj je $\sigma(a)$ neprazna kompaktna podmnožica $\mathbb{C}$.*

Lotimo se najprej prvega dela, torej da je spekter kompaktna množica. Pred dokazom potrebujemo nekaj pomožnih rezultatov.

Lema 2. *Naj bo $\mathcal{A}$ Banachova algebra in naj bo 1 njena enota. Naj bo še $x \in \mathcal{A}$ tak, da zanj velja $\|1 - x\| < 1$. Tedaj je x obrnljiv element.*

Dokaz. Označimo $y = 1 - x$. Tedaj je $r = \|y\| < 1$. Ker v Banachovi algebri velja $\left\|y^2\right\| \leq \|y\|^2$, induktivno dobimo $\|y^n\| \leq \|y\|^n = r^n$ za poljuben $n \in \mathbb{N}$. Od tod sledi, da vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} \|y^n\|$ konvergira. Zato za poljuben $\epsilon > 0$ in za dovolj velika $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$, velja

$$\left\| \sum_{j=n+1}^{m} y^j \right\| \leq \sum_{j=n+1}^{m} \left\|y^j\right\| < \epsilon.$$

Zaradi polnosti zaporedje delnih vsot vrste $\sum_{n=0}^{\infty} y^n$ konvergira proti nekemu $z = \sum_{n=0}^{\infty} y^n$ v $\mathcal{A}$. Trdimo, da je z inverz od x. Pišimo $x = 1 - y$ in $z_n = 1 + y + y^2 + \ldots y^n$. Velja

$$z_n(1 - y) = (1 + y + \ldots + y^n) - (y + y^2 + \ldots y^{n+1}) = 1 - y^{n+1}.$$

Ker velja $\left\|y^{n+1}\right\| \leq r^{n+1}$, zaporedje y^{n+1} konvergira k 0, ko gre n proti neskončno. Sledi

$$z(1 - y) = \lim z_n(1 - y) = \lim \left(1 - y^{n+1}\right) = 1.$$

Podobno dobimo tudi $(1 - y)z = 1$, torej je z res inverz od $1 - y = x$. ■

Trditev 3. *Naj bo $\mathcal{A}$ Banachova algebra. Tedaj so množice levo obrnljivih, desno obrnljivih in obrnljivih elementov odprte v $\mathcal{A}$ in preslikava $a \mapsto a^{-1}$ je zvezna na množici obrnljivih elementov.*

Dokaz. Naj bosta $a_0, b_0 \in \mathcal{A}$ taka, da velja $a_0 b_0 = 1$. Naj bo $a \in \mathcal{A}$ tak element, da zanj velja $\|a - a_0\| < \|b_0\|^{-1}$. Tedaj velja

$$\|b_0 a - 1\| = \|b_0(a - a_0)\| \leq \|b_0\| \|a - a_0\| < 1.$$

Po lemi 2 je $x = b_0 a$ obrnjiv. Definirajmo $b = x^{-1} b_0$. Sedaj velja $ba = x^{-1} b_0 a = 1$, zato je a levo obrnljiv. Sledi torej, da je množica levo obrnljivih elementov odprta in analogno to pokažemo za desno obrnljive elemente. Ker je množica obrnljivih elementov presek teh dveh množic, je tudi sama odprta.

Ostane nam pokazati, da je invertiranje zvezno na množici obrnljivih elementov. To bomo pokazali preko karakterizacije zveznosti z zaporedji. Dovolj je videti, da za zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obrnljivih elementov, ki konvergira k enoti $1 \in \mathcal{A}$, velja, da tudi $(a_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira k 1. Od tod trditev takoj sledi, saj je množenje v Banachovih algebrah zvezno in zato za zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ki konvergira k a velja, da $(a^{-1} a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira k enoti, torej tudi $(a_n^{-1} a)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira k enoti. Po množenju z a^{-1} z desne dobimo, da a_n^{-1} konvergirajo k a^{-1}. Naj torej $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira k 1. Naj bo $0 < \delta < 1$ in naj bo n tako velik, da velja $\|a_n - 1\| < \delta$. Po lemi 2 je a_n obrnljiv in njegov inverz je oblike

$$a_n^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - a_n)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (1 - a_n)^k.$$

Sledi

$$\left\|a_n^{-1} - 1\right\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (1 - a_n)^k \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|1 - a_n\|^k < \frac{\delta}{1 - \delta}.$$

Naj bo $\epsilon > 0$. Zaradi zveznosti funkcije $t \mapsto \frac{t}{1-t}$ obstaja $\delta_0 > 0$, da je $0 < \frac{\delta}{1-\delta} < \epsilon$ za $0 < \delta < \delta_0$. Sledi, da $(a_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti 1. ■

Pripravljeni smo, da pokažemo prvi del prej navedenega izreka.

Izrek 4. *Naj bo $\mathcal{A}$ Banachova algebra z enoto nad $\mathbb{F}$ in naj bo $a \in \mathcal{A}$. Tedaj je $\sigma(a)$ kompaktna podmnožica $\mathbb{F}$.*

Dokaz. Pokažimo najprej omejenost $\sigma(a)$. Naj bo $|\alpha| > \|a\|$. Tedaj je $\alpha - a = \alpha(1 - \frac{a}{\alpha})$. Zaradi predpostavke je $\left\|\frac{a}{\alpha}\right\| < 1$. Če zapišemo $\frac{a}{\alpha} = (1 - (1 - \frac{a}{\alpha}))$, nam lema 2 pove, da je $1 - \frac{a}{\alpha}$ obrnljiv element. Torej je tudi $\alpha(1 - \frac{a}{\alpha}) = \alpha - a$ obrnljiv element, zato α ni v spektru. Sledi, da je $\sigma(a)$ omejena množica.

Pokažimo še zaprtost $\sigma(a)$. Označimo z G množico obrnljivih elementov v $\mathcal{A}$ in definirajmo preslikavo $f : \mathbb{F} \to \mathcal{A}$ s predpisom $\alpha \mapsto (\alpha - a)$. To je očitno zvezna preslikava, zato je praslika G odprta množica in je enaka $\rho(a)$. Ker je $\sigma(a) = \mathbb{F} \setminus \rho(a)$, je $\sigma(a)$ zaprta. Kompaktnost torej sledi. ∎

Naslednji cilj je dokaz nepraznosti spektra elementa kompleksne Banachove algebre. Ključno vlogo bo odigrala posplošitev pojma holomorfne funkcije na preslikave, ki slikajo v Banachove algebre.

Definicija 3. Naj bo $\mathcal{A}$ Banachov prostor nad $\mathbb{C}$, G odprta podmnožica v $\mathbb{C}$ in $f : G \to \mathcal{A}$ funkcija. *Odvod* funkcije f v točki $z_0 \in G$ je

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

če limita obstaja. Če odvod obstaja v vsaki točki na G in če je $z \mapsto f'(z)$ zvezna funkcija, potem pravimo, da je f *(krepko) holomorfna na G.*

Opomba 4. Označimo z $\mathcal{A}^*$ prostor zveznih linearnih funkcionalov na $\mathcal{A}$. Temu prostoru pravimo *dualni prostor* $\mathcal{A}$. Naj bosta G in f kot v definiciji. Za $\varphi \in \mathcal{A}^*$ je $\varphi \circ f : G \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija v običajnem smislu z odvodom $\varphi \circ f'$, kar pokaže spodnji račun:

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(f(z)) - \varphi(f(z_0))}{z - z_0} &= \lim_{z \to z_0} \varphi\left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right) \\
&= \varphi\left(\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right) \\
&= \varphi(f'(z_0)).
\end{aligned}$$

Tej lastnosti f, da je $\varphi \circ f$ holomorfna za vsak $\varphi \in \mathcal{A}^*$, pravimo *šibka holomorfnost.* Izkaže se, da sta v Banachovih prostorih pojma šibke in krepke holomorfnosti ekivivalentna [1].

Pokazali bomo, da za holomorfne funkcije z vrednostmi v Banachovi algebri velja Liouvilleov izrek. Pri tem bomo rabili dejstvo, da dual Banachovega prostora loči točke, kar pomeni, da za poljubni dve različni točki v $\mathcal{A}$ obstaja tak zvezen funkcional, ki ju slika v različna elementa. V posebnem je torej 0 edini element, ki ga vsi elementi $\mathcal{A}^*$ slikajo v 0. To je očitna posledica naslednje trditve, katere dokaz lahko najdemo v [2].

Trditev 5. *Naj bo $\mathcal{A}$ normiran vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ in naj bodo $v_1, \ldots v_n$ linearno neodvisni vektorji v $\mathcal{A}$. Za poljubne skalarje $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ obstaja tak zvezen funkcional $f \in \mathcal{A}$, za katerega velja $f(v_j) = \alpha_j$ za vsak $j \in \{1, \ldots, n\}$.*

Izrek 6 (Liouville). *Naj bo $\mathcal{A}$ Banachov prostor nad $\mathbb{C}$ in naj bo $f : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ cela holomorfna funkcija. Če je f omejena, je konstantna.*

Dokaz. Naj bo f kot v izreku in naj bo $\varphi \in \mathcal{A}^*$ poljuben. Tedaj je $\varphi \circ f$ cela holomorfna funkcija v običajnem smislu. Je tudi omejena, saj je φ omejen funkcional, slika funkcije f pa je po predpostavki vsebovana v neki krogli. Po običajnem Liouvilleovem izreku iz kompleksne analize je $\varphi \circ f$ konstantna. V tem primeru pa f ne more imeti dveh različnih vrednosti v sliki, ker bi tedaj obstajal zvezen funkcional, ki ju loči. Sledi, da je f tudi konstantna. ■

Pokažimo sedaj še nepraznost spektra danega elementa kompleksne Banachove algebre.

Trditev 7. *Naj bo $\mathcal{A}$ kompleksna Banachova algebra in $a \in \mathcal{A}$. Tedaj je $\sigma(a) \neq \emptyset$.*

Dokaz. Naj bo $a \in \mathcal{A}$ in definirajmo preslikavo $F\colon \rho(a) \to \mathcal{A}$ s predpisom $F(z) = (z-a)^{-1}$. To je zvezna preslikava, saj je invertiranje zvezno. Pokazali bomo, da je holomorfna na $\rho(a)$, pri čemer pa bomo potrebovali zvezo

$$x^{-1} - y^{-1} = x^{-1}(y-x)y^{-1},$$

ki jo dokažemo s preprostim izračunom. Naj bo sedaj $z_0 \in \rho(a)$. Velja

$$\begin{aligned}\frac{(z-a)^{-1} - (z_0-a)^{-1}}{z-z_0} &= \frac{(z-a)^{-1}(z_0-a-z+a)(z_0-a)^{-1}}{z-z_0}\\ &= \frac{(z-a)^{-1}(z_0-z)(z_0-a)^{-1}}{z-z_0}\\ &= -(z-a)^{-1}(z_0-a)^{-1}.\end{aligned}$$

Ko gre z proti z_0, gre zaradi zveznosti invertiranja desna stran proti $-(z_0-a)^{-2}$. Ker je predpis $z \mapsto -(z-a)^{-2}$ zvezen na $\rho(a)$, holomorfnost sledi. Predpostavimo sedaj, da je $\sigma(a) = \emptyset$ (oziroma $\rho(a) = \mathbb{C}$) in izpeljimo protislovje. Trdimo, da je F omejena. Res, za $|z| > \|a\|$ lahko pišemo $F(z) = z^{-1}(1-\frac{a}{z})^{-1}$. Ko pa gre $|z|$ proti neskončno, gre $1-\frac{a}{z}$ proti 1, torej gre tudi $(1-\frac{a}{z})^{-1}$ proti 1. To nam pove, da je izven zaprte krogle $\overline{K}(0, \|a\|)$ omejena, zaradi zveznosti pa je omejena tudi na krogli, saj je ta kompaktna. Po Liouvilleovem izreku sledi, da je F konstantna, kar pa je protislovje, saj nima ničelnega odvoda. ■

3. Rieszov funkcijski račun

Sedaj bomo še nekoliko bolj razvili teorijo holomorfnih funkcij z vrednostmi v Banachovem prostoru in jo nato uporabili za konstrukcijo Rieszovega funkcijskega računa. Odslej bomo ves čas predpostavljali, da je $\mathcal{A}$ kompleksna Banachova algebra z enoto. Za točko $a \in \mathbb{C}$ in $r > 0$ označimo z $\mathbb{B}(a, r)$ zaprto kroglo s središčem v a in polmerom r. Spomnimo se, da za holomorfno f na neki odprti domeni G in $a \in G$ velja Cauchyeva formula. Naj bo $r > 0$ tak, da $\mathbb{B}(a, r) \subset G$. Tedaj je

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,r)} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z.$$

Ideja konstrukcije je, da v tej formuli a zamenjamo z elementom Banachove algebre. Da bo to smiselno, moramo najprej vpeljati pojem krivuljnega integrala za take funkcije. Za krivuljo $\gamma\colon [0,1] \to G$ lahko krivuljni integral f po γ definiramo kot običajno, vseeno pa to natančno zabeležimo.

Definicija 4. *Krivuljni integral $f : G \to \mathcal{A}$ po γ* je tak element $I \in \mathcal{A}$, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da velja

$$\left\| I - \sum_{j=0}^{n-1} (\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)) \cdot f(\gamma(\tau_j)) \right\| < \epsilon,$$

čim je $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1$ in $\max_j |t_{j+1} - t_j| < \delta$ in $\tau_j \in [t_j, t_{j+1}]$ za vsak j. Če tak I obstaja, ga označimo kar z $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$.

Opomba 5. Integral f po γ ne obstaja vedno. Obstaja pa, če ima γ končno totalno variacijo. Totalna variacija krivulje γ je definirana kot $V(\gamma) = \sup\{v(\gamma, P) \mid P$ particija intervala $[0,1]\}$, kjer je za particijo $P = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1\}$ $v(\gamma, P) = \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|$. V nadaljevanju bomo vedno predpostavljali, da imajo krivulje končno totalno variacijo.

Opomba 6. S popolnoma enakimi dokazi kot pri običajnem integralu pokažemo, da za zvezno funkcijo $f : G \to \mathcal{A}$ in krivuljo γ ta integral obstaja in da zanj veljajo vse osnovne lastnosti običajnega krivuljnega integrala [3]. V posebnem je integral linearen, kjer pa je vredno omeniti, da homogenost velja ne le za kompleksna števila, vendar za poljuben $a \in \mathcal{A}$. Če je torej f zvezna, G in γ pa sta kot zgoraj, velja

$$a \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma a f(z)\,\mathrm{d}z \quad \text{in} \quad \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\, a = \int_\gamma f(z) a\,\mathrm{d}z.$$

To sledi iz zveznosti množenja in dejstva, da integral dobimo kot limito.

Pomembna lastnost tega integrala je, da lahko menjamo vrstni red integracije in uporabe zveznega funkcionala na funkcijah:

Trditev 8. *Naj bodo $\varphi \in \mathcal{A}^*$, G odprta domena v $\mathbb{C}$, γ krivulja in $f\colon G \to \mathcal{A}$ zvezna funkcija. Tedaj velja*

$$\varphi\left(\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z\right) = \int_\gamma (\varphi \circ f)(z)\ \mathrm{d}z.$$

Dokaz. Naj bo $\epsilon > 0$. Po definiciji krivuljnega integrala obstaja tak $\delta_1 > 0$, da je

$$\left\| \int_\gamma (\varphi \circ f)(z)\,\mathrm{d}z - \sum_{j=0}^{n-1} (\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)) \varphi(f(\gamma(\tau_j))) \right\| < \frac{\epsilon}{2}$$

čim je $|t_{j+1} - t_j| < \delta_1$ in $\tau_j \in [t_j, t_{j+1}]$ za vsak j. Poleg tega zaradi zveznosti funkcionala φ obstaja tak $\delta_2 > 0$, da je

$$\left\| \varphi\left(\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right) - \varphi(a) \right\| < \frac{\epsilon}{2}$$

čim je $\left\| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z - a \right\| < \delta_2$. Naj bo torej $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ in naj bodo t_j in τ_j taki, da je $|t_{j+1} - t_j| < \delta$ za vsak j in da hkrati velja $\left\| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z - \sum_{j=0}^{n-1} (\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)) f(\tau_j) \right\| < \delta$. Tedaj velja

$$\begin{aligned}\left\| \varphi\left(\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right) - \int_\gamma (\varphi \circ f)(z)\,\mathrm{d}z \right\| &\leq \left\| \varphi\left(\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right) - \varphi\left(\sum_{j=0}^{n-1} (\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)) f(\tau_j)\right) \right\| \\ &\quad + \left\| \varphi\left(\sum_{j=0}^{n-1} (\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)) f(\tau_j)\right) - \int_\gamma (\varphi \circ f)(z)\,\mathrm{d}z \right\| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

Za zadnjo neenakost smo upoštevali linearnost funkcionala φ. ∎

Naj bo $a \in \mathcal{A}$. Preslikava $z \mapsto (z - a)^{-1}$ je na $\rho(a)$ zvezna, saj je invertiranje zvezno. Če je $f : G \to \mathcal{A}$ funkcija, ki je zvezna na neki odprti okolici $G \subseteq \mathbb{C}$ spektra $\sigma(a) \subset G$, lahko za krivuljo γ v $\rho(a) \cap G$ definiramo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)(z - a)^{-1}\,\mathrm{d}z.$$

V tem primeru ima torej ta izraz že smisel, vendar mi bi radi integrirali po takih krivuljah, ki v nekem smislu zaznajo spekter, saj le ta nosi informacijo o elementu a. V primeru matrik je to enostavno, saj je spekter končen in lahko integriramo po krožnicah okrog posameznih elementov spektra. Ker pa je spekter v splošnem bolj komplicirana množica, potrebujemo pomožen rezultat, ki nam bo povedal, da primerne krivulje obstajajo. Preden ga lahko navedemo, se moramo spomniti še pojma ovojnega števila.

Definicija 5. Naj bo $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ sklenjena krivulja in $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$. *Ovojno število* γ *okoli* a je

$$n(\gamma; a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-a} \mathrm{d}z.$$

Opomba 7. Osnovni rezultat kompleksne analize je, da je pri fiksni γ funkcija $a \mapsto n(\gamma; a)$ zvezna na $\mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$ in da slika v $\mathbb{Z}$. Ker je $\gamma([0,1])$ kompaktna množica, leži znotraj neke krogle, kar pomeni, da ima $\mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$ natanko eno neomejeno komponento. Ovojno število $n(\gamma; a)$ za element a v neomejeni komponenti je enako 0. Dokaze vseh teh lastnosti lahko najdemo v [3].

Za nas bodo pomembne predvsem enostavne sklenjene krivulje. To so take, ki razen v začetni in končni točki nimajo samopresečišč. Za tako krivuljo γ nam Jordanov izrek pove, da ima $\mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$ le dve komponenti, ovojno število $n(\gamma; a)$ je za element a omejene komponente lahko enako le 1 ali -1. V primeru, ko je ta vrednost enaka 1, pravimo, da je γ *pozitivno orientirana*, sicer pa, da je *negativno orientirana*. Seveda ne moremo pričakovati, da bo že ena sama taka krivulja dovolj za naše namene, zato vpeljemo pojem sistema krivulj.

Definicija 6. Naj bo $m \in \mathbb{N}$ in naj bo $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ množica krivulj. Pravimo, da je Γ *pozitivno orientiran sistem krivulj*, če veljajo naslednje lastnosti:

1. γ_j je enostavna sklenjena krivulja za vsak j,
2. za $i \neq j$ je $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$,
3. za $a \in \mathbb{C} \setminus (\bigcup_{j=1}^m \gamma_j)$ je $n(\Gamma; a) = \sum_{j=1}^m n(\gamma_j; a)$ enako 0 ali pa 1.

Opomba 8. Na kratko bomo pozitivno orientiranemu sistemu krivulj rekli kar *sistem krivulj*.

Če je Γ kot v zgornji definiciji, definiramo še množici

$$\mathrm{ins}(\Gamma) = \left\{ a \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^m \gamma_j \;\middle|\; n(\Gamma; a) = 1 \right\}$$
$$\mathrm{out}(\Gamma) = \left\{ a \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^m \gamma_j \;\middle|\; n(\Gamma; a) = 0 \right\}$$

Opomba 9. Množici $\mathrm{ins}(\Gamma)$ pravimo *notranjost* sistema krivulj Γ, množici $\mathrm{out}(\Gamma)$ pa *zunanjost* sistema krivulj Γ.

Sedaj smo pripravljeni, da navedemo za nas ključno trditev. Ker nam bo ta trditev le v tehnično pomoč, dokaz opuščamo. Najdemo ga lahko v [3].

Trditev 9. *Naj bo G odprta podmnožica, K pa taka kompaktna podmožica $\mathbb{C}$, da velja $K \subset G$. Tedaj obstaja tak sistem gladkih krivulj $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$, da $\gamma_j \subseteq G \setminus K$ za vsak j, $K \subseteq \mathrm{ins}(\Gamma)$ in $\mathbb{C} \setminus G \subseteq \mathrm{out}(\Gamma)$.*

Naj bo sedaj $a \in \mathcal{A}$ in f zvezna funkcija z vrednostmi v $\mathcal{A}$, definirana na odprti množici G, ki vsebuje $\sigma(a)$. Spekter je kompaktna množica, zato po trditvi obstaja gladek sistem krivulj $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$, po katerem lahko integriramo tako, da definiramo

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Tedaj nam izraz

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)(z-a)^{-1}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} f(z)(z-a)^{-1}\,\mathrm{d}z$$

definira element v $\mathcal{A}$. Radi bi videli še, da je ta definicija neodvisna od izbire sistema krivulj. Preden se lotimo dokaza, moramo posplošiti še Cauchyev izrek.

Izrek 10 (Cauchy). *Naj bo G odprta podmnožica v $\mathbb{C}$ in $f\colon G \to \mathcal{A}$ holomorfna. Naj bodo $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ krivulje v G, za katere velja $\sum_{j=1}^m n(\gamma_j; z) = 0$ za poljuben $z \in \mathbb{C} \setminus G$. Tedaj velja*

$$\sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} f(z)\ \mathrm{d}z = 0.$$

Dokaz. Naj bo $\varphi \in \mathcal{A}^*$. Velja

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z\right) = \sum_{j=1}^m \varphi\left(\int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z\right) = \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} (\varphi\circ f)(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Drugi enačaj velja po trditvi od prej, zadnji enačaj pa velja zaradi osnovnega Cauchyjevega izreka, saj je zaradi naših predpostavk $\varphi \circ f$ holomorfna. Ker to velja za vse zvezne funkcionale na $\mathcal{A}$ in ker ti ločijo točke, izrek sledi. ■

V nadaljevanju se moramo spomniti, da je za $a \in \mathcal{A}$ preslikava $z \mapsto (z-a)^{-1}$ holomorfna na $\rho(a)$. Če je $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorfna, je očitno holomorfna tudi $z \mapsto f(z)1_{\mathcal{A}}$. Z enakim dokazom kot običajno pa vidimo, da tudi za holomorfne funkcije z vrednostmi v Banachovi algebri velja Leibnizovo pravilo, zato je tedaj tudi $f(z)(z-a)^{-1}$ holomorfna funkcija na $G \cap \rho(a)$.

Pripravljeni smo na dokaz neodvisnosti krivuljnega integrala $\int_\Gamma f(z)(z-a)^{-1}\,\mathrm{d}z$ od gladkega sistema krivulj Γ.

Trditev 11. *Naj bo $a \in \mathcal{A}$, naj bo G odprta množica v $\mathbb{C}$, ki vsebuje $\sigma(a)$, $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ in $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ pa naj bosta sistema krivulj v G, za katera velja $\sigma(a) \subseteq \mathrm{ins}(\Gamma)$, $\sigma(a) \subseteq \mathrm{ins}(\Lambda)$, $\mathbb{C} \setminus G \subseteq \mathrm{out}(\Gamma)$ in $\mathbb{C} \setminus G \subseteq \mathrm{out}(\Lambda)$. Tedaj za holomorfno funkcijo $f\colon G \to \mathbb{C}$ velja*

$$\int_\Gamma f(z)(z-a)^{-1}\ \mathrm{d}z = \int_\Lambda f(z)(z-a)^{-1}\ \mathrm{d}z$$

Dokaz. Označimo z $-\lambda_j$ krivuljo $t \mapsto \lambda_j(1-t)$. Tedaj je za vsak $z \in G$ $n(-\lambda_j; z) = -n(\lambda_j; z)$ in velja

$$\begin{aligned}
&\int_\Gamma f(z)(z-a)^{-1}\,\mathrm{d}z - \int_\Lambda f(z)(z-a)^{-1}\,\mathrm{d}z \\
&= \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} f(z)(z-a)^{-1}\,\mathrm{d}z - \sum_{j=1}^k \int_{\lambda_j} f(z)(z-a)^{-1}\,\mathrm{d}z \\
&= \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} f(z)(z-a)^{-1}\,\mathrm{d}z + \sum_{j=1}^k \int_{-\lambda_j} f(z)(z-a)^{-1}\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Če označimo $\gamma_{m+j} = -\lambda_j$, lahko zadnjo vrstico zapišemo kot

$$\sum_{j=1}^{m+k} \int_{\gamma_j} f(z)(z-a)^{-1}\,\mathrm{d}z. \tag{1}$$

Pokazali bomo, da sistem $\Gamma' = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_{m+k}\}$ izpolnjuje predpostavke Cauchyevega izreka. Tedaj bo zaradi naših predpostavk sledilo, da je izraz (1) enak 0, saj je $z \mapsto f(z)(z-a)^{-1}$ holomorfna na $G \setminus \sigma(a)$. Če je $z \in \mathbb{C} \setminus G$, je $\sum_{j=1}^{m+k} n(\gamma_j; z) = \sum_{j=1}^{m} n(\gamma_j; z) - \sum_{j=1}^{k} n(\lambda_j, z) = 0 - 0 = 0$, če pa je $z \in \sigma(a)$, je $\sum_{j=1}^{m+k} n(\gamma_j; z) = \sum_{j=1}^{m} n(\gamma_j; z) - \sum_{j=1}^{k} n(\lambda_k, z) = 1 - 1 = 0$. Trditev sledi. ■

Zaradi zadnje trditve lahko za $a \in \mathcal{A}$ in funkcijo f, ki je holomorfna na neki okolici $\sigma(a)$, upravičeno definiramo

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)(z-a)^{-1}\,\mathrm{d}z,$$

kjer je Γ neki sistem gladkih krivulj kot prej. Definirajmo še množico funkcij, ki so holomorfne na neki odprti okolici $\sigma(a)$ in jo označimo s $\mathrm{Hol}(a)$. Tako dobimo predpis

$$\begin{aligned} \mathrm{Hol}(a) &\to \mathcal{A} \\ f &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

Opomba 10. Množica $\mathrm{Hol}(a)$ je za seštevanje in množenje po točkah algebra. Res, naj bosta $f, g \in \mathrm{Hol}(a)$. Tedaj obstajata odprti okolici U, V množice $\sigma(a)$, tako da je f holomorfna na U in da je g holomorfna na V. Tedaj je poljubna linearna kombinacija f in g holomorfna na $U \cap V$. Ker je $U \cap V$ tudi odprta okolica za $\sigma(a)$, je linearna kombinacija f in g element $\mathrm{Hol}(a)$. Podobno je produkt f in g holomorfna funkcija na $U \cap V$, zato je $\mathrm{Hol}(a)$ res algebra.

Definirani predpis ima mnogo lepih lastnosti in najbolj bistvene povzema naslednji izrek.

Izrek 12 (Rieszov funkcijski račun). *Naj bo $a \in \mathcal{A}$. Tedaj velja:*

1. *Predpis $f \mapsto f(a)$, definiran na $\mathrm{Hol}(a)$, je homomorfizem algeber.*
2. *Za $f(z) = z^k$, kjer je $k \geq 0$ celo število, je $f(a) = a^k$, pri čemer za $k = 0$ dobimo $f(a) = 1$.*
3. *Naj bo G odprta okolica $\sigma(a)$ in naj bo f holomorfna na G. Naj bo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje holomorfnih funkcij na G, ki konvergira k f enakomerno na kompaktnih podmnožicah množice G. Tedaj velja $\lim_{n\to\infty} \|f_n(a) - f(a)\| = 0$.*
4. *Če je $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$ potenčna vrsta s konvergenčnim radijem $R > r(a)$, kjer je $r(a)$ spektralni radij za a, je $f \in \mathrm{Hol}(a)$ in velja $f(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k a^k$.*

Opomba 11. Tretja trditev pove, da predpis $f \mapsto f(a)$ izpolnjuje nekakšen zveznostni pogoj. Množice $\mathrm{Hol}(a)$ namreč ne moremo na standarden način opremiti s topologijo enakomerne konvergence po kompaktnih podmnožicah, saj nimajo vse funkcije v tej množici iste domene. Četrta točka pove, da ta predpis dejansko posploši funkcijski račun na matrikah, ki smo ga omenili na začetku.

Dokaz. **1.** Naj bo f holomorfna na G_1, g pa na G_2, kjer sta G_1 in G_2 odprti okolici za $\sigma(a)$. Tedaj sta obe holomorfni na $G_1 \cap G_2$ in zato so tu holomorfne tudi njune linearne kombinacije in njuni produkti. Naj bosta $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ in izberimo tak gladek sistem krivulj Γ v $G_1 \cap G_2$, da je $\sigma(a) \subseteq \mathrm{ins}(\Gamma)$ in $\mathbb{C} \setminus (G_1 \cap G_2) \subseteq \mathrm{out}(\Gamma)$. Tedaj je

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)(a) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\alpha f(z) + \beta g(z))(z-a)^{-1}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{\alpha}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)(z-a)^{-1}\,\mathrm{d}z + \frac{\beta}{2\pi i}\int_\Gamma g(z)(z-a)^{-1}\,\mathrm{d}z \\ &= \alpha f(a) + \beta g(a).\end{aligned}$$

Uporabili smo le linearnost integrala in neodvisnost integrala od Γ, saj ta sistem izpolnjuje predpostavke trditve 11 tudi za G_1 in G_2. Pokažimo še multiplikativnost predpisa $f \mapsto f(a)$. Tokrat naj bosta Γ in Λ sistema gladkih krivulj, tako da je $\overline{\mathrm{ins}(\Gamma)} \subseteq \mathrm{ins}(\Lambda) \subseteq G_1 \cap G_2$. Pri danem sistemu Γ lahko tak sistem λ dobimo z uporabo trditve 9 za $\overline{\mathrm{ins}(\Gamma)} \subset G_1 \cap G_2$. Tedaj velja

$$\begin{aligned}f(a)g(a) &= -\frac{1}{4\pi}\left(\int_\Gamma f(z)(z-a)^{-1}\,\mathrm{d}z\right)\left(\int_\Lambda g(\zeta)(\zeta-a)^{-1}\,\mathrm{d}\zeta\right) \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma\int_\Lambda f(z)g(\zeta)(z-a)^{-1}(\zeta-a)^{-1}\,\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}z \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma\int_\Lambda f(z)g(\zeta)\left(\frac{(z-a)^{-1}-(\zeta-a)^{-1}}{\zeta-z}\right)\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}z \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma f(z)\left(\int_\Lambda \frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta\right)(z-a)^{-1}\,\mathrm{d}z \\ &\quad + \frac{1}{4\pi}\int_\Lambda g(\zeta)\left(\int_\Gamma \frac{f(z)}{\zeta-z}\mathrm{d}z\right)(\zeta-a)^{-1}\,\mathrm{d}\zeta.\end{aligned}$$

Druga enakost velja zaradi homogenosti integrala, tretja pa zaradi resolventne identitete. Zaradi izbire sistemov Γ in Λ na začetku, je vsak ζ, ki leži na tiru sistema Λ, vsebovan v $\mathrm{out}(\Gamma)$. Torej je po običajnem Cauchyevem izreku $\int_\Gamma (f(z)/(\zeta - z))\,\mathrm{d}z = 0$. Ker pa je z, ki leži na tiru sistema Γ, vsebovan v $\mathrm{ins}(\Lambda)$, je po Cauchyevi formuli $\int_\Lambda (g(\zeta)/(\zeta - z))\,d\zeta = 2\pi i g(z)$. Sledi

$$f(a)g(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)g(z)(z-a)^{-1}\,\mathrm{d}z = (fg)(z).$$

2. Naj bo $f(z) = z^k$ za $k \geq 0$ in definirajmo krivuljo $\gamma(t) = Re^{2\pi i t}$, kjer je $R > \|a\|$. Ker je $r(a) \leq \|a\|$, je $\sigma(a) \subset \mathrm{ins}(\gamma)$. Sedaj velja

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma z^k(z-a)^{-1}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma z^{k-1}\left(1-\frac{a}{z}\right)^{-1}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma z^{k-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{z^n}\,\mathrm{d}z.$$

Zadnja enakost velja, saj vemo, da je $(1-\frac{a}{z})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{z^n}$, čim je $\left\|\frac{a}{z}\right\| < 1$. Poleg tega ta vrsta enakomerno konvergira na celotnem tiru krivulje γ in zato lahko zamenjamo vrstni red integracije in seštevanja. Dobimo

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z^{n-k+1}}\mathrm{d}z\right)a^n.$$

Iz kompleksne analize vemo, da za $n \neq k$ obstaja primitivna funkcija za $\frac{1}{z^{n-k+1}}$. To pomeni, da je ta holomorfna na $\mathrm{ins}(\gamma)$ in je zato po Cauchyevem izreku njen integral po γ enak 0. Do razlike pride le pri $n = k$, kjer je $\int_\gamma z^{-1}\mathrm{d}z = 2\pi i$. Sledi $f(a) = a^k$ in v primeru, ko je $k = 0$ res dobimo $f(a) = 1$.

3. Naj bo $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ gladek sistem krivulj, tako da je $\sigma(a) \subseteq \mathrm{ins}(\Gamma)$ in da je $\mathbb{C} \setminus G \subseteq \mathrm{out}(\Gamma)$. Izberimo krivuljo $\gamma_k \in \Gamma$. Tedaj obstaja $M > 0$, da je $|\gamma_k'(t)| \leq M$ za vsak parameter t. Tedaj velja

$$\begin{aligned}\left\| \int_{\gamma_k} f_n(z)(z-a)^{-1}\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_k} f(z)(z-a)^{-1}\,\mathrm{d}z \right\| &= \left\| \int_0^1 (f_n(\gamma_k(t)) - f(\gamma_k(t)))(\gamma_k(t)-a)^{-1}\,\mathrm{d}\gamma_k(t) \right\| \\ &= \left\| \int_0^1 (f_n(\gamma_k(t)) - f(\gamma_k(t)))(\gamma_k(t)-a)^{-1}\gamma_k'(t)\,\mathrm{d}t \right\| \\ &\leq \int_0^1 |f_n(\gamma_k(t)) - f(\gamma_k(t))| \left\|(\gamma_k(t)-a)^{-1}\right\| M\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Tudi preslikava $t \mapsto \left\|(\gamma_k(t)-a)^{-1}\right\|$ je zvezna na $[0,1]$, torej omejena z neko konstanto M'. Tedaj je

$$\begin{aligned}&\left\| \int_{\gamma_k} f_n(z)(z-a)^{-1}\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_k} f(z)(z-a)^{-1}\,\mathrm{d}z \right\| \\ &\leq MM' \max\{|f_n(z) - f(z)| z \in \gamma_k([0,1])\}.\end{aligned}$$

Ker po predpostavki f_n konvergirajo proti f enakomerno na kompaktnih podmnožicah množice G, gre ta zadnja vrstica proti 0. To velja za vse γ_k, zato z uporabo trikotniške neenakosti sledi $\|f_n(a) - f(a)\| \to 0$.

4. Naj ima potenčna vrsta $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$ konvergenčni radij $R > r(a)$. Naj bo $p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k$. Točki 1. in 2. trditve nam povesta, da je $p(a) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k a^k$. Poleg tega p_n konvergirajo k f enakomerno na kompaktnih podmnožicah množice $\{z\,;\, |z| < R\}$. Po trditvi 3. sedaj sledi $p_n(a) \to f(a)$, torej je res $f(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k a^k$. ∎

Velja še več. Preslikava $\Phi\colon \mathrm{Hol}(a) \to \mathcal{A}$, za katero veljajo trditve iz izreka 12, je natanko Rieszov funkcijski račun. To je posledica Rungejevega izreka, ki ga navedemo brez dokaza. Tudi dokaz tega izreka najdemo v [3].

Izrek 13 (Runge). *Naj bo K kompaktna množica v $\mathbb{C}$ in naj bo E taka podmnožica v $\mathbb{C} \setminus K$, ki seka vsako njeno komponento za povezanost. Naj bo f holomorfna na odprti množici, ki vsebuje K in naj bo $\epsilon > 0$. Tedaj obstaja taka racionalna funkcija R s poli v E, da velja*

$$|f(z) - R(z)| < \epsilon$$

za vse $z \in K$.

Ta izrek nam torej pove, da je holomorfna funkcija pod temi predpostavkami enakomerna limita zaporedja racionalnih funkcij na danem kompaktu.

Trditev 14. *Naj bo $a \in \mathcal{A}$ in naj bo G odprta okolica za $\sigma(a)$. Naj bo $\tau\colon \mathrm{Hol}(a) \to \mathcal{A}$ homomorfizem algeber, za katerega je $\tau(1) = 1$ in $\tau(z) = a$. Naj za poljubno zaporedje holomorfnih funkcij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ na G, ki konvergira enakomerno na kompaktnih množicah v G k f, velja $\tau(f_n) \to \tau(f)$, ko gre $n \to \infty$. Tedaj je $\tau(f) = f(a)$ za vsako $f \in \mathrm{Hol}(a)$.*

Dokaz. Na množici polinomov se predpisa očitno ujemata. Če poleg tega polinom p nima ničel na $\sigma(a)$, je tudi $p^{-1} \in \mathrm{Hol}(a)$. Sledi $1 = \tau(1) = \tau(pp^{-1}) = \tau(p)\tau(p^{-1}) = p(a)\tau(p^{-1})$. Podobno je $1 = p(a)p^{-1}(a)$, kjer je $p^{-1}(a)$ dobljen s holomorfnim funkcijskim računom. Ker je inverz danega elementa enolično določen, sledi $\tau(p^{-1}) = p^{-1}(a)$. To pomeni, da se ta dva predpisa ujemata na množici racionalnih funkcij, ki imajo pole izven $\sigma(a)$. Po Rungejevem izreku za poljubno $f \in \mathrm{Hol}(a)$ obstaja zaporedje racionalnih funkcij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ki konvergira enakomerno k f na $\sigma(a)$. Zato je $\tau(f_n) = f_n(a) \to f(a)$ in tudi $\tau(f_n) \to \tau(f)$. Sledi $\tau(f) = f(a)$. ∎

Nadalje se lahko vprašamo o tem, kako predpis $f \mapsto f(a)$ vpliva na spekter elementa a. Če imamo opravka z matriko A, ki ima lastno vrednost λ, ima matrika $p(A)$, kjer je p nek polinom, lastno vrednost $p(\lambda)$. Zato naslednja trditev morda ni presenetljiva.

Trditev 15. *Naj bo $a \in \mathcal{A}$ in $f \in \mathrm{Hol}(a)$. Tedaj velja*

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)).$$

Dokaz. Naj bo $\lambda \in \sigma(a)$. Ker je λ ničla funkcije $z \mapsto f(z) - f(\lambda)$, obstaja taka funkcija $g \in \mathrm{Hol}(a)$, da velja $f(z) - f(\lambda) = (z - \lambda)g(z)$. Če je $f(\lambda) \notin \sigma(f(a))$, potem je $a - \lambda$ obrnljiv element, kar je protislovje. Sledi $f(\lambda) \in \sigma(f(a))$. Ker je bil λ poljuben, je $f(\sigma(a)) \subseteq \sigma(f(a))$.

Obratno denimo, da $\beta \notin f(\sigma(a))$. Tedaj je $f(z) - \beta$ obrnljiva in holomorfna na neki okolici $\sigma(a)$. Sledi, da je tudi $g(z) = (f(z) - \beta)^{-1} \in \mathrm{Hol}(a)$, torej je $g(a)(f(a) - \beta) = 1$. Torej je $f(a) - \beta$ obrnljiv in zato $\beta \notin \sigma(f(a))$. Skupaj dobimo $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$. ∎

Za konec si oglejmo še eno uporabo Rieszovega funkcijskega računa, ki spominja na razcep realne funkcije na njen pozitiven in negativen del.

Trditev 16. *Naj bo $a \in \mathcal{A}$ in naj bosta F_1 in F_2 taki disjunktni neprazni zaprti množici, da velja $\sigma(a) = F_1 \cup F_2$. Tedaj obstaja tak idempotent $e \in \mathcal{A}$, ki ni 0 ali enota, da velja*

1. *Če je $ba = ab$, je $be = eb$.*
2. *Če je $a_1 = ae$ in $a_2 = a(1 - e)$, potem je $a = a_1 + a_2$ in velja $a_1 a_2 = a_2 a_1 = 0$.*
3. *$\sigma(a_1) = F_1 \cup \{0\}$ in $\sigma(a_2) = F_2 \cup \{0\}$.*

V dokazu si bomo pomagali z naslednjo lemo.

Lema 17. *Naj za $a, b \in \mathcal{A}$ velja $ab = ba$ in naj bo $f \in \mathrm{Hol}(a)$. Tedaj je $f(a)b = bf(a)$.*

Dokaz. Če je f polinom, je to očitno. Zato trditev velja tudi za racionalne funkcije, ki imajo pole izven $\sigma(a)$. Poljubno $f \in \mathrm{Hol}(a)$ lahko po Rungejevem izreku na $\sigma(a)$ enakomerno aproksimiramo z zaporedjem $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ racionalnih funkcij, ki imajo pole izven $\sigma(a)$. Sedaj je $f(a)b = (\lim_{n\to\infty} R_n(a))b = \lim_{n\to\infty} R_n(a)b = \lim_{n\to\infty} bR_n(a) = b(\lim_{n\to\infty} R_n(z)) = bf(a)$. ∎

Dokaz (trditve). Ker sta F_1 in F_2 dejansko kompaktni in ker je $\mathbb{C}$ metričen prostor, je razdalja med tema dvema množicama pozitivna, kar pomeni, da lahko najdemo taki disjunktni odprti množici G_1 in G_2, da je $F_1 \subset G_1$ in $F_2 \subset G_2$. Naj bo sedaj Γ sistem gladkih krivulj v G_1, tako da je $F_1 \subseteq \operatorname{ins}\Gamma$ in $F_2 \subseteq \operatorname{out}\Gamma$. Funkcija f, ki je na G_1 enaka 1 drugod pa 0, je očitno element v $\mathrm{Hol}(a)$. Definirajmo $e = f(a)$. Po trditvi 15 je $\sigma(e) = f(\sigma(a)) = \{0, 1\}$. Zadnja enakost velja, ker sta F_1 in F_2 neprazni. To pomeni, da e ni 0 ali enota $1_{\mathcal{A}}$, saj je $\sigma(0) = \{0\}$ in $\sigma(1_{\mathcal{A}}) = \{1\}$. Ker je Rieszov funkcijski račun homomorfizem algeber, je $e^2 = e$, saj je $f^2 = f$. Prva trditev sledi neposredno iz leme 17. Velja $a_1 + a_2 = ae + a(1 - e) = ae + a - ae = a$. Ker je $e^2 = e$, je $e(1 - e) = e^2 - e = e - e = 0$. Podobno je $(1 - e)e = 0$. Ker a komutira s samim sabo, nam lema 17 pove, da komutira z e. Sledi $a_1 a_2 = a_2 a_1 = a(1 - e)ae = a^2(1 - e)e = 0$, zato velja tudi druga trditev. Za tretjo trditev opazimo, da lahko a_1 in a_2 dobimo direktno, če na a uporabimo funkciji $f_1(z) = zf(z)$ in $f_2(z) = z(1 - f(z))$. Če sedaj upoštevamo trditev 15, dobimo $\sigma(a_1) = f_1(\sigma(a)) = F_1 \cup \{0\}$ in podobno za $\sigma(a_2)$. ∎

4. Zaključek

Tako smo konstruirali Rieszov funkcijski račun in raziskali nekaj njegovih lastnosti. Poznamo še veliko funkcijskih računov, ki so še splošnejši od tega, ampak moramo na naših Banachovih algebrah potem zahtevati še več strukture. Nasploh so funkcijski računi zelo močno orodje pri študiju Banachovih algeber in še posebej pri študiju operatorskih algeber, zato so tam nepogrešljivo orodje.

LITERATURA

[1] W. Rudin *Functional Analysis*, McGraw-Hill Inc., Singapore, 1991

[2] J. B. Conway *A Course in Functional Analysis*, Graduate texts in mathematics **96**, Springer

[3] J. B. Conway *Functions of One Complex Variable*, Graduate texts in mathematics **11**, Springer