UPORABA STATISTIČNIH TESTOV ZA KALIBRACIJO PARAMETROV V BLACK-SCHOLESOVEM MODELU

AYRTON SINANI

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

V tem članku je predstavljena statistična metoda za kalibracijo parametrov v Black-Scholesovem modelu. Cilj diplomske naloge je na podlagi empiričnih podatkov oceniti v kolikšni meri je Black-Scholesov model primeren za vrednotenje evropskih opcij. Model je odvisen od dveh parametrov, ki sta v praksi neznana. To sta upanje (ali koeficient zdrsa) in volatilnost. Ta dva parametra smo ocenjevali s pomočjo statističnih testov in analizirali, če lahko na tovrsten način določimo ceno evropskih opcij. Pomagali smo si s Student-t testom za ocenjevanje upanja in χ^2 testom za ocenjevanje volatilnosti. Analiza je bila opravljena na dva načina. Najprej smo metodo uporabili na sintetičnih podatkih, ki smo jih sintetizirali v R-ju. Potem pa na pravih podatkih (tj. na indeksu S & P 500 v letu 2013). Obravnavali smo tudi možne izboljšave samega modela.

USE OF STATISTICAL TESTS FOR CALIBRATION OF PARAMETERS IN THE BLACK-SCHOLES MODEL

We present a statistical method for calibrating the parameters of the Black-Scholes asset price dynamics model. We used statistical tests to estimate the two parameters of the Black-Scholes model: the drift coefficient and the volatility. The effects of these estimates on the option pricing problem were investigated. Numerical experiments involving synthetic and real data were presented. The real data considered were the daily closing values of the S & P 500 index and the associated European call and put option prices in the year 2013.

1. Uvod

Borza je reguliran trg, kjer se trguje z raznimi finančnimi inštrumenti, to so lahko osnovni (kot delnica, obveznica itd.) ali pa izvedeni finančni inštrumenti (to so razne terminske pogodbe, opcije itd.). Vrednost izvedenih finančnih inštrumentov je odvisna od osnovnih finančnih inštrumentov, na katere se nanašajo. Ponavadi je to kar cena delnice ob določenem času, lahko pa je tudi recimo obrestna mera ali pa nekaj bolj nenavadnega, kot je količina dežja, ki je zapadla na teden. Izmed vseh teh izvedenih finančnih inštrumentov se bomo v tej študiji bolj poglobili v izvedene finančne inštrumente, ki so odvisni od cene delnice. Opcija je izveden finančni inštrument, s katero imamo možnost, ne pa tudi obveznost, da bodisi kupimo bodisi prodamo delnico po vnaprej določeni ceni (izvršilna cena) na vnaprej določen datum (datum dospetja).

Poznamo več vrst opcij glede na čas izvršitve, in sicer evropske in ameriške (sicer so tudi razne druge, katerim pravimo eksotične opcije, toda te niso tako bistvene za to študijo). Za evropske opcije je značilno, da jih lahko izvršimo šele ob času dospetja, za ameriške opcije pa velja, da jih lahko izvršimo kadarkoli do časa dospetja. Opcije so lahko nakupne (to pomeni, da osnovni inštrument na koncu kupiš) ali pa prodajne (osnovni inštrument prodaš). Problem pri opcijah je ponavadi ta, da jih je težko ovrednotiti. Opcije imajo svojo ceno, ki jo moramo plačati, da jo lahko kasneje izvršimo. Najbolj pogoste so ameriške opcije, čeprav se jih veliko težje ovrednoti kot evropske opcije.

V tej študiji se bomo ukvarjali samo z evropskimi opcijami. Načinov ocenjevanja je mnogo: Pomagamo si lahko s paritetnimi enačbami in binomskim modelom. V letu 1973 pa sta Black in Scholes sprožila pravo malo revolucijo v financah s člankom, kjer sta predstavila Black-Scholesov model, s pomočjo katerega lahko ovrednotimo evropske (nakupne in prodajne) opcije. Za to delo je Scholes (Black je preminil že dve leti nazaj) leta 1997 tudi prejel Nobelovo nagrado iz ekonomije. Njuna enačba je ustvarila področje finančnega inženirstva (*"Financial engineering"*), ki se ukvarja z ustvarjanjem finančnih pogodb ter vrednotenjem finančnih derivatov. Njuna teorija je od samega nastanka doživljala hude kritike, toda kljub vsem kritikam se je do danes Black-Scholesov model ohranil kot eden najbolj uporabnih modelov za ovrednotenje evropskih opcij.

Black-Scholesov model je odvisen od dveh parametrov, ki sta v praksi neznana. To sta matematično upanje ter volatilnost. Ta dva parametra bomo poskusili oceniti s pomočjo statističnih testov in poskusili analizirati, če se da na tak način res določiti ceno evropskih opcij. Pri tem bomo uporabili Student-t test za upanje in χ^2 test za ocenjevanje volatilnosti. Analizirali bomo na dva načina. Najprej bomo uporabili metodo na sintetičnih podatkih, ki jih bomo sintetizirali s pomočjo R-ja. Potem pa bomo uporabili še metodo na pravih podatkih (tj. na indeksu S & P 500) in tako poskusili oceniti, če se metodo da na tak način uporabiti ter če so možne kake izboljšave.

2. Black-Scholesov model

V tem poglavju bomo predstavili Black-Scholesov model. S pomočjo Black-Scholesovega modela lahko izračunamo vrednosti evropskih (tako nakupnih kot prodajnih) opcij. Model vsebuje predpostavko, da se vrednost delnice giblje kot Geometrijsko Brownovo gibanje. Zato bomo pričeli z definicijo osnovnega Brownovega gibanja in njegovimi razširitvami, ker jih bomo potrebovali za razumevanje stohastičnih diferencialnih enačb. Nato bomo predstavili še ostale lastnosti modela.

Definicija 1. Standardno enodimenzionalno Brownovo gibanje W je glede na filtracijo F_t prilagojen proces, ki ima naslednje lastnosti:

- W(0) = 0
- $W(t) - W(s)$ je neodvisen od F_s za $0 \leq s \leq t$
- $W(t) - W(s) \sim N(0, t-s)$ za $0 \leq s \leq t$
- skoraj gotovo je zvezno

2.1 Uvod v Black-Scholesov model

V najbolj enostavni obliki Black-Scholes
(-Mertonov) model predpostavlja, da sta na trgu dva finančna inštrumenta: obveznica, ki ne predstavlja tveganja izgube premoženja ter delnica, ki je tvegan finančni inštrument. Obveznica ima netvegan donos r_t, ki ni slučajen, lahko pa se skozi čas spreminja. S temi predpostavkami lahko ceno obveznice B_t v času t napišemo v obliki diferencialne enačbe kot:

$$\frac{dB_t}{dt} = r_t B_t \tag{1}$$

Če predpostavimo še začetno rešitev $B_0 = 1$, potem ima enačba enolično rešitev:

$$B_t = exp(\int_0^t r_s ds) \tag{2}$$

Naj S_t označuje ceno delnice v času $t \geq 0$. Torej Black-Scholesov model privzame, da se cena instrumenta obnaša kot slučajni proces, katere dinamiko določa sledeča stohastična diferencialna enačba:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma S_t dW_t, t > 0 \tag{3}$$

z začetnim pogojem $S_0 = \hat{S}_0$,

kjer sta $\mu_t \in \mathbb{R}$ ter $\sigma > 0$ parametra, pri čemer je μ_t deterministična (vendar ne nujno konstantna) funkcija t-ja, σ je nestanovitnost, W_t, $t > 0$ je standardno Brownovo gibanje, torej $W_0 = 0$ in dW_t je mišljen kot slučajni diferencial ter začetni pogoj, $\hat{S_0} > 0$ pa je slučajna spremenljivka. Rešitev tega modela je slučajni proces Geometrijsko Brownovo gibanje. Navedli bomo še en izrek ter posledico le-tega, ki bo pomembna za definiranje statističnega vzorca.

Trditev 1. *Naj bo koeficient zdrsa μ_t omejen. Potem ima stohastična diferencialna enačba (3) enolično rešitev z začetnim pogojem S_0 . Rešitev je dana kot:*

$$S_t = S_0 exp(\sigma W_t - \sigma^2(t/2) + \int_0^t \mu_s ds)$$

Velja pa še več, pod tveganju-nevtralne mero mora veljati

$$r_t = \mu_t$$

Za dokaz bomo vzeli Itôvo formulo za pomoč.

Lema 2 (Itôva lema za Brownovo gibanje). *Naj bo dana stohastična diferencialna enačba*

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dW$$

in naj bo f(x, t) dvakrat zvezno odvedljiva funkcija x-a in t-ja. Potem je

$$df(x,t) = (f_t + a(x,t)f_x + \frac{1}{2}b^2(x,t)f_{xx})dt + b(x,t)f_x dW$$

Najprej si oglejmo rešitev stohastične diferencialne enačbe; da se prepričamo o tem ali je to res rešitev stohastične diferencialne enačbe, je treba uporabiti Itôvo lemo pri funkciji:

$$u(x,t) = exp(\sigma x - \sigma^2(t/2) + \int_0^t \mu_s ds)$$

Enoličnost rešitve je tu očitna. Dokazati je še treba, da je koeficient zdrsa μ_t enak netvegani obrestni meri r_t v primeru tveganju – nevtralnem trga. V primeru
tveganja – nevtralne mere je diskontirana cena delnice (s ceno obveznice kot numerarja) martingal. Torej

$$S'_t = S_t/B_t = S_0 exp(\sigma W_t - (\sigma^2 t/2) + \int_0^t (\mu_s - r_s)ds)$$

Če še enkrat uporabimo Itôvo formulo, potem dobimo, da je

$$dS'_t = \sigma S'_t dW_t + S'_t(\mu_t - r_t)dt$$

Če mora biti S'_t martingal, potem mora biti drugi člen enak 0, kar pomeni, da je $\mu_t = r_t$. □

Posledica 3. *Logaritem diskontirane cene v času t je porazdeljen normalno z upanjem $logS_0 - \sigma^2 t/2$ in varianco $\sigma^2 t$.*

2.2 Black-Scholesova formula za vrednotenje evropskih opcij

Sedaj privzemimo v modelu evropsko nakupno opcijo, ki se nanaša na delnico z izvršilno ceno K ter časom dospetja T. To je torej izvedeni finančni inštrument, ki lastniku le-te dovoli, da kupi eno delnico za ceno K v času T. Vrednost te opcije je v času T enaka $(S_T - K)_+$. Po osnovnem izreku finančne matematike mora biti vrednost le-te v času t = 0 diskontirana pričakovana cena, pod tveganju – nevtralno mero, v času t=T pa zaradi Posledice 4.4 je enaka

$$C(x,0;x,t) = x\Phi(z) - \frac{K}{B_T}\Phi(z - \sigma\sqrt{T}), \tag{4}$$

kjer je z enak

$$z = \frac{log(xB_t/K) + \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

Φ pa je normalna kumulativna porazdelitvena funkcija. To je že Black-Scholesova formula. V naslednjem poglavju bomo predstavili še model z vidika parcialne diferencialne enačbe. Še prej je potrebno dodati, da ta formula deluje za vse izvedene finančne inštrumente evropskega tipa. Naj bo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija polinomske rasti in naj bo vrednost izvedenega finančnega inštrumenta v času t = T enaka $F(S_T)$. Potem je njegova vrednost v času t = 0 enaka

$$V_0 = EB_T^{-1}F(B_T S_T')$$

kjer je S_T' log-normalno porazdeljena z upanjem $\ln S_0 - \sigma^2 t/2$ in varianco $\sigma^2 t$.

2.3 Black-Scholesova PDE

V tem poglavju bomo predstavili, kako drugače rešiti problem vrednotenja opcij. Najprej je treba najti primerno parcialno diferencialno enačbo za funkcijo $C(x,T) = C(x,T;K)$ in potem določiti, če Black-Scholesova formula, ki smo jo v prejšnjem poglavju predstavili, dejansko reši to parcialno diferencialno enačbo. Tu nastane problem, da je treba enoličnost in gladkost obravnavati posebej. Zato bomo ta problem malce poenostavili in obravnavali samo primer, kjer je obrestna mera konstantna tj. $r_t = r$.

Naj bo $C(S_t,t)$ vrednost opcije v času t, ko je cena delnice enaka S_t. Po osnovnem izreku Finančne matematike mora biti diskontirana vrednost nakupne opcije martingal za tveganju-nevtralno mero . Iz Itôve formule sledi, da mora vrednost te opcije zadoščati stohastični diferencialni enačbi

$$B_t d(B_t^{-1}C(S_t,t)) = C_x(S_t,t)dS_t + \frac{1}{2}C_{xx}(S_t,t)\sigma^2 S_t^2 dt + C_t(S_t,t)dt - r_t C(S_t,t)dt$$

$$= C_x(S_t,t) = \sigma S_t dW_t + (C_x(S_t,t)r_t S_t + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2}C_{xx}(S_t,t) + C_t(S_t,t) - r_t C(S_t,t))dt$$

Tu so C_x, C_{xx}, C_t parcialni odvodi vrednosti izvedenega finančnega inštrumenta C(x, t). Če pomnožimo z diskontnim faktorjem B_t^{-1}, lahko vidimo, da je diskontirana vrednost lahko martingal edino v primeru, če drugi člen dt na desni izgine. Torej mora nakupna vrednost C(x, t) zadoščati parcialni diferencialni enačbi

$$-r_t C(x,t) + C_t(x,t) + r_t x C_x(x,t) + \frac{\sigma^2 x^2}{2}C_{xx}(x,t) = 0 \tag{5}$$

z robnim pogojem

$$C(x,T) = (x-K)_+$$

Na tem mestu bi lahko recimo preverili, če Black-Scholesova formula dejansko reši Black- Scholesovo (-Mertonovo) parcialno diferencialno enačbo ter da konvergira k izvršilni ceni, ko gre $t \to T$.

2.4 Izpeljava modela za statistični vzorec

Model bomo malce poenostavili tako, da bomo fiksirali slučajno spremenljivko, torej bo $\hat{S}_0 > 0$ realno število. Parametra μ in σ sta neznanki v tem problemu kalibracije. Model lahko preuredimo tako, da dobimo:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \tag{6}$$

V naslednjem koraku bomo logaritmirali celotno enačbo. S tem bomo dobili novo spremenljivko $G_t = \ln(\frac{S_t}{\hat{S}_0})$, ki predstavlja logaritem donosa v času t. Z uporabo zgornje enačbe in s pomočjo Itôve leme (Ker velja $\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}$, $\frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = \frac{-1}{S^2}$ in $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$), dobimo enačbo, ki kaže gibanje nove spremenljivke G_t:

$$dG_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW_t \tag{7}$$

z začetnim pogojem (katerega izpeljemo iz $S_0 = \hat{S}_0$) $G_0 = 0$. Vemo, da sta α in σ konstanti. Torej spremenljivka G = lnS sledi aritmetičnemu Brownovemu gibanju. To pomeni, da je sprememba med časom 0 in časom t porazdeljena normalno z upanjem $(\alpha - \frac{\sigma}{2})t$ in varianco $\sigma^2 t$. Torej je spremenljivka S_t (cena delnice) porazdeljena log-normalno. Gornja enačba nam pove, da je G_t Wienerjev proces s konstantnim upanjem $\mu - \sigma^2/2$ in s konstantno nestanovitnostjo $\sigma > 0$. Za $t > 0$, $\tau > 0$, je prirastek v $G_t = \ln(\frac{S_t}{S_0})$ med časoma t in τ porazdeljen normalno z upanjem $(\mu - \sigma^2/2)\tau$ in varianco $\sigma^2\tau$. To je

$$G_{t+\tau} - G_t = \ln S_{t+\tau} - \ln S_t \sim N((\mu - \frac{\sigma^2}{2})\tau, \sigma^2\tau) \tag{8}$$

kjer je $N(M, V^2)$ mišljena kot normalna porazdelitev z upanjem M in disperzijo V^2 (M in V sta realni števili). Iz tega dejstva sledi, da lahko s pomočjo enačbe za logaritem donosa cene instrumenta v množici ekvidistantnih časov tvorimo zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih normalnih slučajnih spremenljivk. Naj bo $\Delta t > 0$ dolžina intervala. Potem so $t_i = i\Delta t, i = 0, 1, ...n$ množica ekvidistantnih časov, ki bodo kasneje služili kot časi opazovanja. Potem lahko definiramo X_{t_i} kot logaritem donosa inštrumenta iz časa t_{i-1} do t_i, torej:

$$X_{t_i} = \ln\left(\frac{S_t}{S_{i-1}}\right), i = 1, 2, ..., n \tag{9}$$

Lahko vidimo, da so slučajne spremenljivke $X_{t_i}, i = 1, 2, ..., n$ neodvisne enako porazdeljene normalne slučajne spremenljivke z upanjem M in disperzijo V^2, kjer je:

$$M = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t, V^2 = \sigma^2 \Delta t$$

Tako dobimo:

$$X_{t_i} \sim N((\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t, \sigma^2\Delta t), i = 1, 2, ..., n \tag{10}$$

Sedaj imamo vse dano, da definiramo problem kalibracije.

3. Problem kalibracije

Denimo, da imamo dano dolžino časovnega intervala $\Delta t > 0$, statistično stopnjo značilnosti α, $0 < \alpha < 1$, in ceno finančnega inštrumenta $\hat{S}_i$, ki ga imamo danega v časih $t = t_i = i\Delta t, i = 0, 1, ..., n$. Določiti je treba dva intervala, v katerem bosta parametra μ in σ iz začetnega modela vsebovana s stopnjo značilnosti α. Na tem mestu je treba poudariti, da bi lahko tudi točkovno ocenili parametra, ampak to ni preveč koristno, saj je interval zaupanja bolj informativen. Interval zaupanja stopnje β pomeni, da je v intervalu zaupanja vsebovan delež velikosti β statističnega vzorca. Zato bomo raje ocenili parametra z intervalom zaupanja z dano stopnjo značilnosti α. Kasneje bomo še pokazali, da teorija zahteva, da določimo interval zaupanja za σ za dano stopnjo značilnosti α. Cene opcij v Black-Scholesovem modelu so neodvisne od parametra μ, vendar so odvisne od obrestne mere. Ponavadi je obrestna mera dana v problemu. Toda v numeričnih eksperimentih smo morali uporabiti interval zaupanja za μ, da bi lahko določili obrestno mero.

Dane cene $\hat{S}_i$ instrumenta v časih $t = t_i, i = 0, 1, ..., n$ so nenegativna realna števila. Teh n + 1 cen finančnega instrumenta v ekvidistantnih časih so podatki, ki jih uporabimo v problemu kalibracije. Logaritem donosa $\hat{x}_i = \ln(\frac{\hat{S}_i}{\widehat{S_{i-1}}}), i = 1, 2, ..., n$ so vrednosti iz statističnega vzorca $X_{t_i}, i = 1, 2, ..., n$, to je iz neodvisnih enako porazdeljenih normalnih spremenljivk. Z uporabo teh podatkov in z uporabo Student-t testa ter χ^2 testa lahko določimo intervala zaupanja za M in V^2 normalnih slučajnih spremenljivk z dano stopnjo značilnosti α. Ko dobimo M in V^2, potem lahko dobimo iskana μ in σ začetnega problema.

Denimo, da imamo dano stopnjo značilnosti α, potem lahko izvedemo statistični test na varianci V^2 in na upanju M slučajnih spremenljivk
$X_{t_i} = \ln(\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}})$, i =1, ..., n pri vzorcu podatkov $\hat{x}_i = \ln(\frac{\hat{S}_i}{\widehat{S_{i-1}}}), i = 1, 2, ..., n$ z uporabo χ^2 testa in z uporabo Student-t testa. Z uporabo formule med M in μ ter V in σ lahko s stopnjo značilnosti $\alpha, 0 < \alpha < 1$ bodisi zavrnemo bodisi ne zavrnemo ničelno hipotezo o dveh parametrih Black-Scholesovega modela:

$$\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$$

in

$$\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$$

kjer je:

$$\sigma_i = \frac{V_i}{\sqrt{\Delta t}}, \mu_i = \frac{M_i}{\Delta t} + \frac{V_i^2}{2\Delta t}, i = 1, 2, \tag{11}$$

kjer mora veljati, da je $M_1 < M_2$ in $0 < V_1 < V_2$. To so količine, ki določajo hipoteze za M in V. To se da zlahka narediti tako, da pretvorimo rezultate statističnih testov iz M in V^2 na μ in σ. Za dani vzorec $\hat{x}_i$ za:

$$X_{t_i} \sim N(M, V^2), i = 1, 2, ..., n \tag{12}$$

lahko najprej ocenimo V^2 (in s tem tudi σ^2) z uporabo χ^2 testa in posledično ocenimo M (ter s tem tudi μ; to pa lahko naredimo zato, ker imamo podatek za σ, ki smo ga pridobili s pomočjo χ^2 testa) z uporabo Student-t testa. Še enkrat bi poudarili, da je bolj praktično oceniti interval zaupanja za μ in σ kot pa poskusiti izračunati točkovno oceno. Da bi ocenili V^2 iz logaritma donosa instrumenta, je treba podati hipotezo, ki jo želimo preveriti s pomočjo testov. To se da narediti na več načinov. Postopek, uporabljen v tej študiji (vzeto iz [1]), je sledeč:

3.1 Iterativni postopek

- Imamo dan statistični vzorec $\hat{x}_i, i = 1, 2, ..., n$; fiksiramo stopnjo značilnosti α, $0 < \alpha < 1$.
- Izberemo dovolj velik interval $I = I^{(0)} = [a^{(0)}, b^{(0)}], 0 < a^{(0)} < b^{(0)}$, da bo $V^2 \in I^{(0)}$ s stopnjo značilnosti α.
- Interval $I^{(0)}$ delimo na m podintervalov (ki so enake dolžine): $I_i^{(0)} = [a_i^{(0)}, b_i^{(0)}]$
$i = 1, 2, ...m$
- uporabimo χ^2 test, da preverimo, če je $V^2 \in I_i^{(0)}, i = 1, 2, ..., m$. Osredotočali se bomo na podintervale $I_{i^*}^{(0)} = [a_{i^*}^{(0)}, b_{i^*}^{(0)}] \subset I^{(0)}$, kjer ničelne hipoteze:
$$H_0 : a_{i^*}^{(0)} \leq V^2 \leq b_{i^*}^{(0)}$$
ne zavrnemo z dano stopnjo značilnosti α.
- Če nam ostane en sam interval $I_{i^*}^{(0)}$, potem nastavimo $I^{(1)} = [a^{(1)}, b^{(1)}] = I_{i^*}^{(0)}$, sicer pa vzamemo za $I^{(1)}$ unijo intervalov, katere nismo zavrnili s stopnjo značilnosti α.
- postopek iterativno ponavljamo. V prvem primeru ga ponovimo s ponovno delitvijo intervala $I^{(1)}$, v drugem pa s krčitvijo intervala $I^{(1)}$. Na ta način dobimo zaporedje podintervalov $I^{(k)} = [a^{(k)}, b^{(k)}], k = 1, 2, ...$, ki jih dobimo tako, da hipoteze:
$$H_0 : a^{(k)} \leq V^2 \leq b^{(k)}, k = 1, 2, ...$$
ne zavrnemo za dano stopnjo značilnosti α.
- Postopek ustavimo, ko bo $b^{(k)} - a^{(k)} < tol$, kjer je tol dana toleranca.

Na koncu vzamemo iz iterativnega postopka tisto množico, ki je ne zavrnemo za dano stopnjo značilnosti α. To je najboljša možna ocena za stopnjo značilnosti α. V primeru da test ničelno hipotezo zavrne na vseh podintervalih, potem lahko bodisi spremenimo začetni interval $I^{(0)}$ bodisi izberemo drug m.

Podoben postopek smo uporabili za ocenjevanje intervala, kjer je vsebovan M s stopnjo značilnosti α. Tudi tu smo uporabili vzorec $\hat{x}_i, i = 1, 2, ..., n$, za statistični test pa smo uporabili Student-t test.

Na tem mestu bi še obrazložili samo konstrukcijo postopkov 1 in 2 (tj. postopek za ocenjevanje variance oz. upanja). Ker sta si postopka 1 in 2 zelo podobna, je dovolj, da podamo motivacijo za postopek 1.

V postopku 1 so statistični testi uporabljeni med problemom kalibracije, da bi uravnotežili dve zahtevi. Po eni strani je konservativen in previden način zaželen, kar pomeni, da je dovolj velik interval oblikovan tako, da bo σ v njem vsebovan in da ne bo ničelna hipoteza s tem zavrnjena. Po drugi strani pa mora biti interval dovolj majhen, da bomo dobili smiseln rezultat za nestanovitnost pri cenah opcij. Prevelik interval za nestanovitnost bi hkrati pomenil tudi prevelik interval za ceno opcije, s čimer bi sam podatek postal premalo informativen. Da bi lahko zadostili obema pogojema, moramo najprej izbrati dovolj velik interval, da bo σ vsebovana za stopnjo značilnosti. Vsi možni scenariji, tudi najbolj ekstremni, so vključeni v ničelno hipotezo. S postopkom 1 poskušamo sistematično zmanjševati interval z idejo, da v kolikor je sam interval nezavrnjen z ničelno hipotezo, potem bomo lahko izpilili kake manjše intervale na tak način. Oba postopka sta iterativna. V vsakem koraku se ničelna hipoteza H_0 modificira na bazi preteklih podatkov, ki jih dobimo s tem iterativnim postopkom. To vodi v postopek iterativnega testiranja hipoteze. Vzorec podatkov se ne spreminja med postopkom. Napake tipa 1, ki se pojavijo, se upoštevajo, kot da se ostali testi sploh niso izvedli. Ta iterativen postopek se konceptualno razlikuje od postopka večkratnega testiranja in analitičnega induktivnega postopka. V postopku večkratnega testiranja se množica statističnih sklepov obravnava hkrati (vsak test ima svoj vzorec podatkov) in napake tipa 1 naraščajo z naraščajočim številom primerjanj, razen če so testi med seboj popolnoma odvisni. V analitičnem induktivnem postopku se napaka tipa 1 zmanjšuje zaradi povečevanja vzorca podatkov v induktivnem postopku.

Alternativen pristop bi bila uporaba elementarne metode iz elementarne statistike. Na primer, najprej vzamemo točkovno oceno za σ (izračunamo povprečje nestanovitnosti iz vzorca podatkov) in potem določimo interval zaupanja okrog te točke, da dobimo želeni interval. Podobno lahko tako metodo uporabimo za določanje μ. Iz večih razlogov pa sta postopek 1 in 2 še vedno boljša kot uporaba elementarne statistike. Z elementarno statistično metodo tvegamo, da dobimo dvomljive rezultate, če izberemo recimo preslabo točkovno oceno. Še več, konstrukcija prevelikega intervala za nestanovitnost lahko uniči vse napovedi za cene opcij.

Tu bi še poudarili, da sta metodi 1 in 2 samo eni izmed možnosti, kako oceniti tak interval. Veliko drugih metod se lahko uporabi za testiranje teh dveh parametrov v modelu s pomočjo statističnih testov, ki so ravno tako smiselne, kot recimo metoda elementarne statistike, ki je bila že prej omenjena.

4. Cene opcij z neznano volatilnostjo

Ponovno bomo obravnavali začetni Black-Scholesov dinamični model cene finančnega instrumenta ter problem določanja cene opcije z neznano nestanovitnostjo v Black-Scholesovem modelu z dano stopnjo značilnosti $\alpha, 0 < \alpha < 1$. Predpostavili bomo, da nestanovitnost σ ni točno znana, ampak se ve, da leži na nekem intervalu, recimo $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, kjer sta σ_1 in σ_2 konstanti, $0 < \sigma_1 < \sigma_2$, s stopnjo značilnosti α. χ^2 test se lahko uporabi na vzorcu uporabljenem v problemu kalibracije, kot je bilo opisano v prejšnjem poglavju, za odločitev o zavrniti oz. nezavrnitvi hipoteze:

$$\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$$

s stopnjo značilnosti α. Omejimo se na evropske nakupne in prodajne opcije. Tu se postavlja sledeče vprašanje: Z dano stopnjo značilnosti α, $0 < \alpha < 1$ in ob upoštevanju, da ničelna hipoteza $H_0 : \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ ni zavrnjena s stopnjo značilnosti α, kako bi lahko določili interval, kjer bi se morala gibati cena evropske opcije (s stopnjo značilnosti α)?

Torej vse, kar vemo, je, da je $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$. Tukaj moramo poudariti, da to ni isti interval kot v problemu kalibracije. Tam se določi interval s pomočjo χ^2 testa s stopnjo značilnosti α tako, da ničelne hipoteze $H_0 : \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ ne zavrnemo za dani vzorec podatkov s stopnjo značilnosti α. Ti meji na intervalu sta bili določeni z iterativnim postopkom 1. V drugem primeru pa imamo določeni meji, ki sta bili izbrani kot ekstremna primera nestanovitnosti na podlagi cene opcij iz preteklosti oziroma določeni sta iz minimalne in maksimalne vrednosti nestanovitnosti zgodovinskih podatkov.

Naj bo r obrestna mera, t naj označuje čas, S pa ceno finančnega instrumenta, $\tau > 0$, g(S), $S > 0$, je čas dospetja ter funkcija izplačila opcije, katere ceno želimo določiti. Če je nestanovitnost omejena na nekem intervalu, potem obstaja interval $[v_1, v_2]$, odvisen od S in t, tako da cena opcije $v(S,t), S > 0, 0 < t \leq \tau$, leži na tem intervalu. To je:

$$v_1(S,t) \leq v(S,t) \leq v_2(S,t), S > 0, 0 < t \leq \tau \tag{13}$$

Tudi v najslabšem primeru vrednost opcije $v_1(S,t), S > 0, 0 < t \leq \tau$ zadošča nelinearni parcialni diferencialni enačbi:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{1}{2} a(\Gamma_1)^2 S^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial S^2} + rS \frac{\partial v_1}{\partial S} - rv_1 = 0, S > 0, 0 < t \leq \tau \tag{14}$$

z robnim pogojem

$$v_1(S, \tau) = g(S), S > 0$$

kjer je:

$$\Gamma_1 = \frac{\partial^2 v_1}{\partial S^2}$$

in

$$a(\Gamma_1) = \begin{cases} \sigma_2 & \text{če } \Gamma_1 \leq 0 \\ \sigma_1 & \text{če } \Gamma_1 > 0 \end{cases}$$

Podobno velja tudi za $v_2(S, t), S > 0, 0 < t < \tau$ zadošča sledeči nelinearni parcialni diferencialni enačbi:

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{1}{2} a(\Gamma_2)^2 S^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial S^2} + rS \frac{\partial v_2}{\partial S} - rv_2 = 0, S > 0, 0 < t \leq \tau \tag{15}$$

z robnim pogojem

$$v_2(S, \tau) = g(S), S > 0$$

kjer je:

$$\Gamma_2 = \frac{\partial^2 v_2}{\partial S^2}$$

in

$$a(\Gamma_2) = \begin{cases} \sigma_2 & \text{če } \Gamma_2 \geq 0 \\ \sigma_1 & \text{če } \Gamma_2 < 0 \end{cases}$$

Če za primer vzamemo evropsko nakupno opcijo, potem je $g(S) = max(S - K, 0), S > 0$, za evropsko prodajno opcijo pa je $g(S) = max(K - S, 0), S > 0$, kjer je K izvršilna cena opcije. Da bi bila rešitev enolično določena, je treba dodati še sledeča robna pogoja:

$$v(S, t) \longrightarrow 0, \text{ko gre } S \longrightarrow 0, 0 < t < \tau \tag{16}$$

$$v(S, t) \sim S - Ke^{-r(\tau - t)}, \text{ko gre } S \longrightarrow \infty, 0 < t < \tau \tag{17}$$

Enake robne pogoje je treba dodati v primeru evropske prodajne opcije. Gornji nelinearni parcialni diferencialni enačbi se imenujeta Black-Scholes-Barenblatt enačbi. Ti se omejita na splošno Black-Scholesovo enačbo v primeru, da poznamo nestanovitnost (tj. recimo $\sigma_1 = \sigma_2$). Za splošno izplačilno funkcijo ne moremo priti do rešitev analitično in je potrebno rešiti enačbi numerično. Toda lastnosti Black-Scholes-Barenblatt oziroma maksimum parabolične parcialne diferencialne enačbe poskrbi, da, ko se gre za evropsko nakupno oziroma prodajno opcijo, konveksnost izplačilne funkcije $g(S), S > 0$ implicira, da funkciji $\frac{\partial^2 v_1}{\partial S^2}$ in $\frac{\partial^2 v_2}{\partial S^2}$ ne spremenita predznaka za $S > 0, 0 < t < \tau$. To pomeni, da za $S > 0, 0 < t < \tau$, funkciji $\frac{\partial^2 v_1}{\partial S^2}$ in $\frac{\partial^2 v_2}{\partial S^2}$ ohranita predznak pri $t = \tau$; torej se v kontekstu prodajne in nakupne opcije parcialni diferencialni enačbi preoblikujeta v Black-Scholesovo formulo. Pri $t = \tau$ je $v_i(S, \tau) = g(S), S > 0, i = 1, 2$. Izplačilna funkcija g evropske prodajne oziroma nakupne opcije je $\frac{\partial^2 g}{\partial S^2}$ Dirac delta funkcija, ki zahteva, da se $\frac{\partial^2 g}{\partial S^2}$ interpretira v kontekstu porazdelitve. Black-Scholesova enačba je linearna. Z enostavnimi končnimi pogoji, to so recimo pogoji za evropsko prodajno oziroma nakupno opcijo, se da enačbo rešiti eksplicitno z uporabo Black-Scholesove formule.

Za primer si lahko pogledamo situacijo z najslabšim možnim primerom za vrednost opcije υ_1, ki je rešitev enačbe za evropsko nakupno opcijo:

$$\frac{\partial \upsilon_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S^2 \frac{\partial^2 \upsilon_1}{\partial S^2} + rS\frac{\partial \upsilon_1}{\partial S} - r\upsilon_1 = 0, S > 0, 0 < t \leq \tau \tag{18}$$

s pogojem

$$\upsilon_1(S,\tau) = max(S-K,0), S > 0$$

in zgornjima pogojema, da zagotovi obstoj enolične rešitve. Podobno za najboljšo možno nakupno opcijsko ceno υ_2 zadošča

$$\frac{\partial \upsilon_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S^2 \frac{\partial^2 \upsilon_2}{\partial S^2} + rS\frac{\partial \upsilon_2}{\partial S} - r\upsilon_2 = 0, S > 0, 0 < t \leq \tau \tag{19}$$

s pogojem

$$\upsilon_2(S,\tau) = max(K-S,0), S > 0$$

z istima robnima pogojema.
Eksplicitne rešitve teh dveh enačb glede na robna pogoja so:

$$\upsilon_1(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(\tau-t)}N(e_1), S > 0, 0 < t < \tau \tag{20}$$

$$\upsilon_2(S,t) = SN(d_2) - Ke^{-r(\tau-t)}N(e_2), S > 0, 0 < t < \tau \tag{21}$$

kjer je

$$d_1 = \frac{log(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma_1^2)(\tau - t)}{\sigma_1\sqrt{\tau - t}}, e_1 = d_1 - \sigma_1\sqrt{\tau - t}, S > 0, 0 < t < \tau$$

in

$$d_2 = \frac{log(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma_2^2)(\tau - t)}{\sigma_2\sqrt{\tau - t}}, e_2 = d_2 - \sigma_2\sqrt{\tau - t}, S > 0, 0 < t < \tau$$

ter

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}y^2}dy, x \in \mathbb{R}$$

Eksplicitni rešitvi tega problema sta Black-Scholesovi formuli za najslabši scenarij υ_1 in najboljši primer υ_2. Sedaj je vse pripravljeno, da lahko odgovorimo na vprašanje, ki je bilo podano na začetku: kje bi se morala nahajati cena opcije za dan interval zaupanja $[\sigma_1, \sigma_2]$? Najprej predpostavimo, da obstaja neka nestanovitnost σ, četudi je neznana. V Black-Scholesovem modelu je υ monotono naraščajoča funkcija glede na nestanovitnost. Torej lahko zaključimo, da če drži, da je nestanovitnost omejena med nekima vrednostima σ_1 in σ_2, potem iz tega sledi, da je

$$\upsilon_1(S,t) \leq \upsilon(S,t) \leq \upsilon_2(S,t), S > 0, 0 < t < \tau \text{ s stopnjo značilnosti } \alpha$$

kjer so $v_1(S,t)$, $v_2(S,t), S > 0, 0 < t < \tau$ rešitve omenjenih Black-Scholes-Barenblatt enačb. To pomeni, če res obstaja neka vrednost σ in nam vzorec podatkov dovoli predpostaviti, da, z dano stopnjo značilnosti α, leži na nekem intervalu $[\sigma_1, \sigma_2]$ tj. $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ z verjetnostjo $1-\alpha$, potem sledi, da cena v leži na intervalu $[v_1, v_2]$ z verjetnostjo $1-\alpha$, tj. $v_1(S,t) \leq v(S,t) \leq v_2(S,t), S > 0, 0 < t < \tau$ s stopnjo značilnosti α, kjer sta v_1 in v_2 rešitvi zgornjih Black-Scholes-Barenblatt enačb.

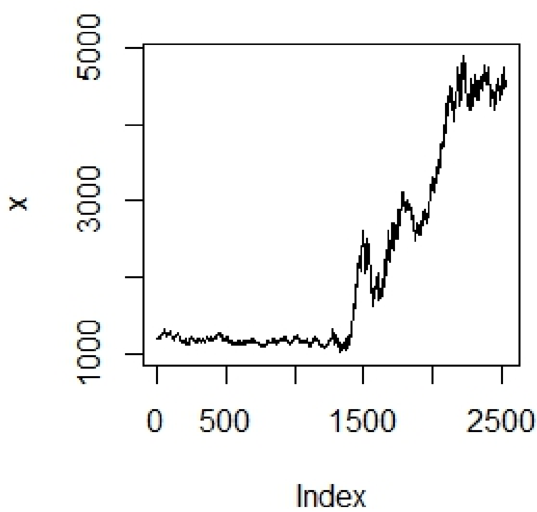
5. Empirična analiza

Za preizkus obeh iterativnih postopkov smo uporabili dve vrsti eksperimentov. Uporabili smo iterativno metodo na sintetičnih podatkih, potem pa še na realnih podatkih. Najprej smo morali preveriti, če se metoda obnese na sintetičnih, šele potem smo jo lahko uporabili na realnih podatkih.

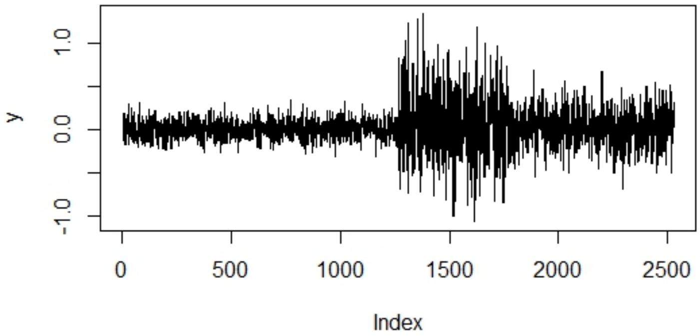
5.1 Sintetični podatki

Podatke smo sintetizirali v programu R, in sicer tako, da smo predpostavili, da se cena delnice giblje kot geometrijsko Brownovo gibanje. S pomočjo funkcije GBM smo simulirali gibanje cene delnice za naslednjih 10 let. Za Δt smo privzeli, da je $\Delta t = 1$. Torej, če smo želeli simulirati podatke za 10 let, smo potrebovali 2530 enot dolgo časovno obdobje. To pa zato, ker je v enem letu 253 trgovalnih dni. Za začetno stanje, torej S_0, smo podali $S_0 = 1200$. Za prvih 5 let smo predpostavili, da bo upanje $\mu = 0$ in standardni odklon $\sigma = 0.1$. Za naslednji dve leti smo predpostavili, da je upanje $\mu = 0.3$ in standardni odklon $\sigma = 0.3$. Za obdobje zadnjih treh let smo privzeli, da je upanje enako $\mu = 0.1$, standardni odklon pa je enak $\sigma = 0.1$.

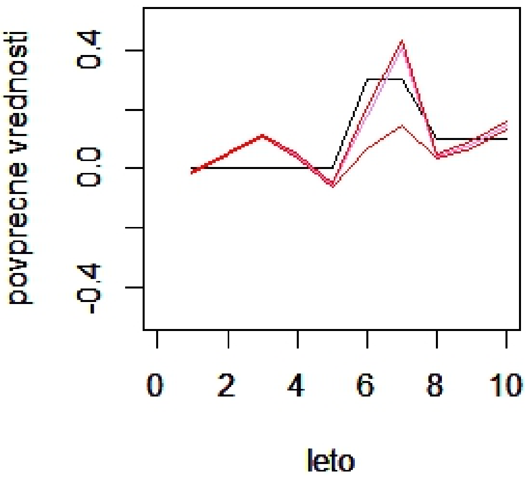
Simulacija delnice je izgledala takole:



Potem smo (kot je v teoriji navedeno) v R-ju izračunali donose in vse skupaj logaritmirali. Iz logaritma donosov smo potem dobili sledeči graf:

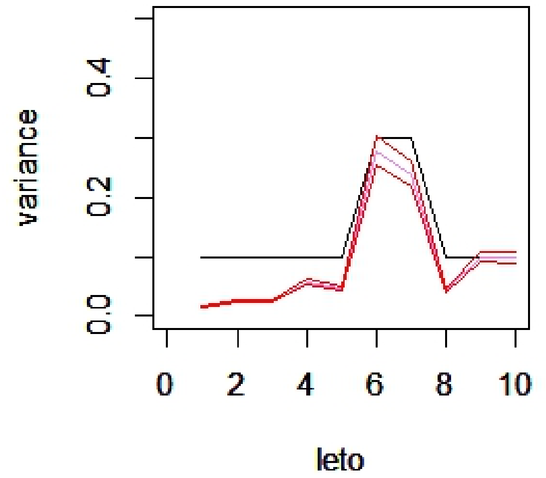


Z uporabo ustreznih statističnih testov za upanje in varianco (torej Student t-test in χ^2 test) smo potem lahko prišli do sledečih ocen za upanje ter varianco:



Črna črta prikazuje, kolikšno bi moralo biti dejansko upanje. Rdeči črti prikazujeta, kakšni meji dobimo s pomočjo iterativnega postopka. Vijolična črta pa je točkovna ocena upanja. Iz same slike se vidi, da je dejanski interval zaupanja precej ozek, kar je zelo dobro, saj to pomeni, da je zelo informativen. V oči mogoče bode dejstvo, da je ocena v precejšnjem razhajanju s samim upanjem, toda tu je treba upoštevati, da so podatki slučajni oz. psevdoslučajni. Že sama točkovna ocena ni prišla kaj dosti blizu samim predpostavljenim upanjem. Iterativni postopek smo uporabili za vsako leto posebej, torej za vsakih 253 dni. Pri tem smo zraven podali tudi točkovno oceno (torej povprečje logaritmov donosov).

Za varianco pa smo dobili sledeči graf:



Tu velja isto kot pri upanju. Že sam trend je zelo obetajoč, saj lahko v 6. in 7. letu vidimo, kako se varianca naglo poveča. Na koncu je ocena tudi precej natančno zadela velikost variance. Na tem mestu bi mogoče še omenili, da smo za parametre izbrali m = 2, $\alpha = 0.05$ in tol = 0.01.

5.2 Realni podatki

Za realne podatke smo izbrali gibanje indeksa S&P500 v letu 2013. Dobili smo podatke o 74915 opcijah, ki se nanašajo na S&P500 indeks. Na isti način smo podatke obdelali kot sintetične. Najprej smo opazovali samo donose, potem smo le-te tudi logaritmirali. Tu bi radi poudarili, da je treba vzeti kratek časovni interval, saj je ena izmed večjih omejitev Black-Scholesovega modela ta, da je volatilnost konstantna. Zato smo morali uporabiti malo iznajdljivostii in vzeti manjši vzorec podatkov. V tej študiji smo uporabili 6-mesečni časovni interval. Za prodajne opcije smo s pomočjo iterativne metode pravilno ocenili 53,10 % cen. Kar se pa tiče nakupnih cen, je slika precej drugačna. Samo 21,07 % vseh cen je bilo pravilno ocenjenih s pomočjo iterativnega postopka. Kar je zelo dobro in informativno pri tem postopku je, da je sam interval cene zelo kratek. Gledano tako za prodajne kot za nakupne cene (na tri decimalke natančno) je bil povprečen razpon enak 0,023.

Metodo smo preverili tudi na posameznih delnicah (naše zanimanje je bilo osredotočeno na nelikvidne delnice). Kot primer smo vzeli delnico W& T Shore Inc. (Wti) in prišli do zaključka, da je za nakupne opcije več kot polovico cenitev znotraj intervala, ki je bil izračunan (bolj natančno; teh je bilo točno 53,13 %). Kar se prodajnih opcij tiče, pa je slika zelo slaba. Samo 2,86 % ocen je bilo znotraj ocenjenega intervala, ki je bil določen s pomočjo iterativnega postopka.

5.3 Testiranje ali je vzorec normalno porazdeljen

Rezultati na empiričnih podatkih so bili nekakšna motivacija za to, da bi preverili če je logaritem donosa normalno porazdeljen. Za test normalnosti smo uporabili Shapiro-Wilk test normalnosti, saj je izmed vseh testov normalnosti (glej [6]) najmočnejši. Teste smo izvedli v programu R. Tako kot pri vseh ostalih statističnih testih smo za stopnjo značilnosti, torej α, vzeli $\alpha = 5\%$. Torej kot pri kalibraciji z realnimi podatki, smo za statistični vzorec vzeli logaritem donosa S&P500 indeksa. Teste smo izvedli za različne časovne intervale. Rezultati testov so bili sledeči:

- za 2-letne podatke je p-vrednost = 3.147e-09; hipoteza se zavrne.

- za enoletne podatke je p-vrednost = 2.273e-06; hipoteza se zavrne.
- za 6-mesečne podatke je p-vrednost = 1.174e-05; hipoteza se zavrne.
- za 3-mesečne podatke je p-vrednost = 0.001509; hipoteza se zavrne.
- za mesečne podatke je p-vrednost = 0.0021; hipoteza se zavrne.

Iz rezultatov je razvidno, da ne moremo predpostaviti, da je logaritem donosa delnice normalno porazdeljen za preverjene časovne intervale. To pomeni, da predpostavka v Black-Scholesovem modelu ne drži. Ker pa Shapiro-Wilk test izgubi na moči pri manjših statističnih vzorcih, smo se odločili, da bomo manjše vzorce še enkrat testirali z Anderson-Darling testom. Spet smo za statistični vzorec vzeli logaritem donosa S&P500 indeksa. Statistična značilnost testa je bila enaka 5%. Tokrat smo teste izvedli samo na manjših časovnih intervalih. Rezultati so bili sledeči:

- za 6-mesečne podatke je p-vrednost = 0.000389; hipoteza se zavrne.
- za 3-mesečne podatke je p-vrednost = 0.00228; hipoteza se zavrne.
- za mesečne podatke je p-vrednost = 0.0003655; hipoteza se zavrne.

Iz teh rezultatov lahko sklepamo, da Black-Scholesov model v praksi ne drži. S pomočjo testov lahko pokažemo, da logaritem donosa ni porazdeljen normalno. Razlog za to bi lahko bila predpostavka modela o konstantni volatilnosti, saj lahko to v veliki meri vpliva na samo porazdelitev vzorca. Spreminjanje volatilnosti s časom lahko povsem spremeni porazdelitev. Testi kažejo, da ne moremo predpostaviti log-normalne porazdelitve donosov.

6. Zaključek

Na podlagi te študije smo ugotovili, da je uporaba statistike in statističnih metod zelo dober način, kako (na podlagi statističnega vzorca) najti parametre za Black-Scholesov model. Tu bi še poudarili, da je metoda, ki je bila v tej študiji predstavljena, samo ena izmed več možnih. Iterativni postopek ima več pozitivnih lastnosti, toda obstajajo seveda druge alternative. Lahko vzamemo recimo samo točkovno oceno, torej za upanje izračunamo vzorčno povprečje, za varianco pa izračunamo nepristransko cenilko za varianco. Tako seveda dobimo samo točkovno oceno. Dobra alternativa je, da vzamemo primeren interval zaupanja. Za statistične teste smo uporabili 5 % stopnjo značilnosti, zato bi bilo primerno uporabiti 95 % interval zaupanja.

Ta metoda je kljub dokaj slabim rezultatom z realnimi podatki primerna za vsakodnevno izračunavanje cen opcij, saj v tem primeru ni veliko časa za bolj zapletene algoritme. Lahko tudi spremenimo stopnjo značilnosti. Če jo denimo povečamo na 10 %, potem se zmanjša tudi sam interval, kjer naj bi bili parametri vsebovani. Tako bi bil tudi razpon cen manjši.

Poudarili bi še, da ima sam Black-Scholesov model kot tak določene pomanjkljivosti. Verjetno je največja ta, da model predpostavlja, da je volatilnost konstantna. To je načeloma zelo velika omejitev za ta model, posebej če delamo z veliko količino podatkov na velikem časovnem intervalu. S te perspektive je npr. Hestonov model bolj primeren, saj predpostavlja, da je volatilnost slučajna spremenljivka. Ena možnost bi bila recimo ta, da uporabimo Parkov test, da preverimo, če se na podlagi statističnega vzorca volatilnost zlomi.

Naslednja pomanjkljivost bi lahko bila premajhna robustnost uporabljenih statističnih testov. Za χ^2 test recimo velja, če statistični vzorec ni porazdeljen normalno, potem ta test ni uporaben za dani vzorec. Zato smo s pomočjo Shapiro-Wilk testa testirali statistični vzorec, če je normalno porazdeljen. Ti testi pa so zavrnili ničelno hipotezo, da je vzorec normalno porazdeljen.

Ne glede na vse pa je ta metoda še vedno zelo dobra in precej enostavna za uporabo. Toda paziti moramo, da uporabimo ustrezno majhne časovne intervale, da se volatilnost ne zlomi. Seveda obstajajo možne izboljšave modela, toda na koncu koncev rezultati kažejo, da v praksi lahko delamo hitre in dobre napovedi na tak način. Četudi niso cene točne, lahko vseeno služijo kot dobri približki. Ti nam lahko pomagajo, da zavarujemo portfelj tako, da minimiziramo tveganje.

LITERATURA

[1] L. Fatone, F. Mariani, M. Recchioni, F. Zirilli, *The use of statistical tests to Calibrate the Black-Scholes Asset Dynamics Model Applied to Pricing Options with Uncertain Volatility*, Journal of Probability and Statistics **2012** (2012) 59-84

[2] G. Roussas, *A Course in Mathematical Statistics*, **2**, Academic Press, San Diego, 1997.

[3] J. Shao, *Mathematical Statistics*, Springer **2**,Madison, ZDA, 2003.

[4] N. Razali, Y. Wah, *Power comparisons of Shapiro-Wilk, Kolmogorov-Smirnov, Liliefors and Anderson-Darling tests*, Journal of Statistical Modeling and Analytics **2** (2011) 21-22

[5] P. Gross *Parameter estimation for Black-Scholes Equation*, URA Spring, (2006)